全国高等医药院校试用教材

高等数学

（供药学、中药专业用）

下　册

沈阳药学院　主编

上海科学技术出版社

全国高等医药院校试用教材

高 等 数 学

——数 理 统 计 方 法——

供药学、中药专业用

下 册

主 编

沈 阳 药 学 院

编写单位

上海第一医学院　四 川 医 学 院

北 京 医 学 院　沈 阳 药 学 院

南 京 药 学 院

上 海 科 学 技 术 出 版 社

全国高等医药院校试用教材

高　等　数　学

——数理统计方法——

(供药学、中药专业用)

下　　册

沈阳药学院　主编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行　上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/16　印张 14.75　字数 350,000

1979 年 7 月第 1 版　1979 年 7 月第 1 次印刷

印数 1—25,000

书号：13119·791　　定价：1.40 元

编 写 说 明

本书是由卫生部组织有关医药院校编写的教材，供全国高等医药院校药学、中药专业试用．化学制药、抗菌素等有关专业也可试用或参考．

本教材分上、下两册．上册内容主要为微积分（包括向量代数、空间解析几何和常微分方程），讲授需 120 到 150 学时；下册内容为数理统计原理与方法，讲授需 40 到 60 学时．使用时可按专业要求和学生水平加以取舍，如果授课时数较少，附星号和小字排印的内容可不讲授．下册在学生学完微积分和具有较多专业知识之后再行讲授为宜．

为了加深对基本理论、基本概念的理解，提高分析问题和解决问题的能力，一般是每节之后附有“思考和练习”，每章之后附有“习题”．此外，本书还于上册附有简明不定积分表，下册附有数理统计有关用表，以备查用．

由于我们政治水平有限，实践经验很少，并且编写时间非常匆促，因而教材中一定存在许多缺点和错误，恳请广大读者批评指正．并请各院校及时提供本教材的使用情况、发现的问题和收集到的反映，以便进一步修订提高．

1978 年 3 月

目　　录

第二篇　数理统计方法

第二篇 数理统计方法

前 言

一、随机事件和数理统计

自然界里，到处都有随机事件(或偶然事件)，它们在一定条件下可能发生，也可能不发生，可能这样，也可能那样. 例如，从一批同样工艺条件下试制的针剂中任取一支作检验，其结果可能是"合格"，再取一支作检验，其结果也有可能"不合格"；又如，同一份样品在同一架天平上多次称重，其读数可以不尽相同；再如，按同样的剂量标准给同一窠大鼠注射同种有毒性的药物，结果有的死亡，有的却生存……等等.

一定条件下的随机事件并不是漫无规律的，正如恩格斯所指出的："表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律". 数理统计正是研究随机事件数量规律的学科之一. 随机事件的普遍性使得这门学科在自然科学和社会科学以及各种技术领域里获得了广泛的应用. 药物科学自不例外，目前，诸如处方的选择、工艺改进、质量控制、药物分析、生物检定、临床观察、抽样验收以及理论研究中数学模型的提出、试验设计和数据处理等等方面，已经不同程度地运用了数理统计的概念和方法.

二、总体、样本和置信系数

在数理统计中，惯常把研究对象的全体称为总体. 例如，同样工艺条件下的整批针剂(的质量)，某架天平所能称量的全部样品(的重量)以及用以研究某药物毒性的一定品系大鼠的全体(包括世界上所有的这种大鼠在内)……等等都是总体. 对总体中任何一个个体逐一研究往往是不必要或不可能的，从中抽出若干个体加以研究时，这些个体就称为样本，样本中个体的数目称为样本的大小.

数理统计的任务就是根据样本所提供的资料推测总体的规律性. 为了完成这个任务，首先必须保证样本确能反应总体的概貌，因此，从总体中抽取样本时，应使样本尽可能具有代表性，总体具备的重要特点样本亦要具备，在这个前提下，务必随机抽样而不能按主观意愿有倾向地选择(随机抽样可通过抽签等方法进行)；此外，数理统计中的许多方法都要求样本中各个体的资料是互相独立地取得的，即彼此不受影响，互不关联，这一点需要注意.

既然是从样本推测总体，那么数理统计所能提供的只能是推测性的意见，诸如"总体的平均数在(25, 29)这一范围内；当然，也可能说错，但是说错的可能性只有5%". 一般的统

计学结论既不绝对肯定，亦不绝对否定，往往包含两个方面的内容，一是倾向性的意见，二是这一意见出错误的可能性大小，称之为置信系数．人们可以凭置信系数的大小来决定对倾向性意见的态度．这样来刻划随机现象的规律性是审慎的，客观的，和科学的．

三、内 容 安 排

数理统计的理论和方法十分丰富，我们选择了与药物科研、生产经常密切有关的内容编入本书，以介绍方法为主．

任何一种科学方法都要求人们科学地使用，适当地了解原理则有助于发挥能动性，避免盲目性．为此，我们将从概率、随机变量、分布、数字特征等基本概念讲起，对某些统计方法即使不作严格证明，也力图阐明其思路或背景，尽量使读者熟悉数理统计的语言和思维方法，为今后必要的时候主动选用本专业所需的其它统计方法准备一定的基础．

学习的目的在于应用，我们将通过相当数量的实例来加深对理论和方法的认识．至于数理统计在各专业领域里更为深入的应用，则越出了本书的范围，读者可参阅有关专著．

第一章　概率的基本知识

第一节　概率及其运算

一、频率和概率

频率和概率都是描写某一事件出现的可能性大小的数量，频率是对样本而言，概率则是总体的属性.

【例 1】　硬币有正反两面，有人作掷币试验，结果如下：

试验者	掷币次数	出现正面次数	频率
蒲　丰	4040	2048	$\frac{2048}{4040}=0.5069$
K. 皮尔逊	12000	6019	$\frac{6019}{12000}=0.5016$
K. 皮尔逊	24000	12012	$\frac{12012}{24000}=0.5005$

由直观经验可以想象，每次掷币的结果是个随机现象，既可能出现正面，也可能出现反面．频率就是指某一事件出现的次数相对于总试验次数的百分比，它反映了某事件在样本中出现的机会大小．表中频率栏的三个数字都接近 0.5.

假设硬币是绝对均匀的，无限次掷币的结果构成一个总体，那么出现正面的机会有多大呢？如果样本的频率确实在 0.5 附近摆动，那么我们就用 0.5 来刻划总体中出现正面这一事件的机会大小．相对于频率，称之为概率.

【例 2】　根据瑞典 1935 年官方的统计资料，每月出生婴儿的性别数记于下表：

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	全年
总数	7280	6957	7883	7884	7892	7609	7585	7393	7203	6903	6552	7132	88273
男孩	3743	3550	4017	4173	4117	3944	3964	3797	3712	3512	3392	3761	45682
女孩	3537	3407	3866	3711	3775	3665	3621	3596	3491	3391	3160	3371	42591
生女频率	0.486	0.490	0.490	0.471	0.478	0.482	0.477	0.486	0.485	0.491	0.482	0.473	0.4825

若以月份为横坐标，生女的频率为纵坐标，据上述对应数据作图，可以看出各频率摆动于 0.4825 这个数的上下(图 1.1)．这说明，出生婴儿的性别有男有女，是个随机事件；但生男或生女的机会在客观上是存在规律性的，我们就用频率围之摆动的那个数“0.4825”来刻划 1935 年瑞典生女这一事件的机会大小，也就是说，这一年瑞典生女的概率近似等于 0.4825.

以上两例表明，一定条件下的随机事件，其出现的机会大小是客观存在的，通常可用一

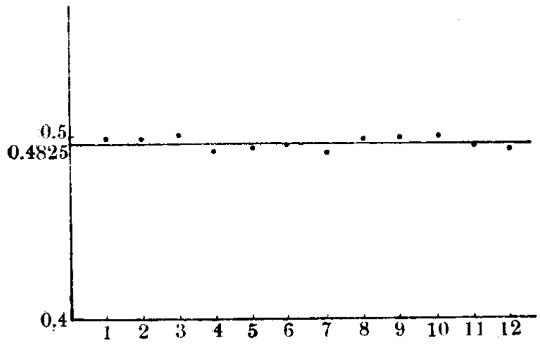

图 1.1

个介于0和1之间的数来刻划这种机会的大小，这就是该随机事件的概率.

对于肯定发生的事件，称为必然事件，肯定不发生的事件，称为不可能事件；习惯上规定必然事件的概率为1，不可能事件的概率为0.

在多数情况下，概率的准确值是难以获得的，只能借助于大量试验下的频率来估计. 在某些特殊的问题中，也可能从理论上推算，例如，掷币时出现正面的概率不通过大量试验也容易推算出1/2这个答案. 因为，假设硬币绝对均匀，以至出现正面和反面的机会均等. 这样，投掷一次可能发生的总共有2种机会均等的事件，而"出现正面"这一事件则是其中之一.

【例3】 一个口袋中盛有质量和外形都相同的球14个，其中2个无色，3个红色，4个黄色，5个黑色. 今自袋中任意摸出一球，它是红球的概率有多大？ 它是黄球的概率有多大？

解：这里，任一个球都以同等的机会被摸出，无疑共有14种机会均等的结果，而这些结果中与"它是红球"这一事件相符合的则有3种，因此，可将3/14作为摸出红球这一事件的概率. 同理，可将4/14作为摸出黄球这一事件的概率.

一般地，在n种机会均等的试验结果中，若有m种与某事件相符合，则可将m/n作为该事件的概率.

【例4】 瓶中装有50片药，其中有3片已经失效，今自瓶中任取5片，求所取5片中有2片失效的概率.

解：自50片中任取5片，共有C_{50}^5种机会均等的取法[注]，而5片中有2片失效，3片未失效的情况则有$C_3^2\cdot C_{47}^3$种，故所求概率为

$$P=\frac{C_3^2\cdot C_{47}^3}{C_{50}^5}=\frac{9}{392}=0.0230.$$

二、概率的运算规则

1. 互不相容事件概率的加法规则

【例5】 自例3的口袋中任摸一球，它是红色或黄色的概率是多少？

[注] 从n个不同物品中选出k个构成一组，只要两组的成员不尽相同就算是不同的选法，初等数学告诉我们总共有$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$种选法。其中$n!=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$.

解：若以事件“A 或 B”表示事件 A、B 中至少有一发生，那么这里关心的是“红色球或黄色球”这一事件，若摸出的是红球，符合这一事件，若摸出的是黄球也符合这一事件.

此外，我们看到一个球如果是红色的，它就绝不会是黄色的，如果是黄色的，也绝不会是红色的，因此，“红色球”这一事件与“黄色球”这一事件不可能同时发生，通常就说这两个事件是互不相容的．现在我们从两方面来计算概率.

首先，和前面一样，任摸一球共有 14 种机会均等的结果，与“它是红色球或黄色球”这一事件相符合的是其中的 3+4 种，因此

$$P(\text{红色球或黄色球})=\frac{3+4}{14}.$$

从另一方面，这 $\frac{3+4}{14}$ 又等于 $\frac{3}{14}+\frac{4}{14}$，正是例 3 中 P(红色球)与 P(黄色球)之和，由此，不难得到

$$P(\text{红色球或黄色球})=P(\text{红色球})+P(\text{黄色球}).$$

通过这个例子，我们可以概括地提出一个定义和一条定理.

定义　设有两个随机事件 A、B，如果它们绝不可能同时发生，则称 A、B 为互不相容的事件.

定理　若 A、B 为互不相容的随机事件，则事件“A 或 B”的概率等于这两个事件概率之和，即

$$P(A\text{ 或 }B)=P(A)+P(B). \tag{1}$$

这条定理还可推广为：

若 A、B、C、… 等为有限个互不相容的事件，则事件“A 或 B 或 C 或…”表示 A、B、C、…中任一个发生均符合于这一事件，其概率等于各事件概率之和，即

$$P(A\text{ 或 }B\text{ 或 }C\text{ 或}\cdots)=P(A)+P(B)+P(C)+\cdots. \tag{2}$$

如果互不相容的事件 A、B、C、… 等概括了某随机现象所有可能出现的结果，则称它们构成了完备系．显然，对于完备系，有

$$P(A\text{ 或 }B\text{ 或 }C\text{ 或}\cdots)=1,$$

从而

$$P(A)+P(B)+P(C)+\cdots=1. \tag{3}$$

这是一条重要的结论，即：

完备系中诸事件的概率之和为 1.

当完备系中只有两个互不相容的事件时，这两个事件就称为互相对立的事件．与一个事件 A 对立的事件习惯上记为 $\overline{A}$，显然，

互相对立的两个事件概率之和为 1，即

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

或

$$P(A)=1-P(\overline{A}). \tag{4}$$

2．概率的乘法规则

为了便于说明问题，我们仍从一个例子讲起.

设有甲、乙、丙、丁四个地区的四个球队，每队中男女运动员的人数如下：

地区	甲	乙	丙	丁	合计
男	12	15	18	21	66
女	8	10	12	14	44

现从中随机抽一名队员去执行某项任务，用 A 表示所抽的是男队员这一事件，显然

$$P(A)=\frac{66}{66+44}=0.6.$$

如果我们首先决定从哪个球队抽人，用 B 表示所选地区恰为丙地这一事件，在此前提下，随机抽一人恰为男队员的概率记为 $P(A|B)$，则有

$$P(A|B)=\frac{18}{18+12}=0.6.$$

现在

$$P(A|B)=P(A),$$

这就是说，B 事件的发生并没有影响 A 事件的概率，在这种情况下，可以认为 A、B 两事件是互相独立的.

一般地，我们有如下定义：

定义 (1) 随机事件 B 发生的条件下事件 A 的概率称为条件概率，记作 $P(A|B)$. 这里 B 事件的发生是条件，A 事件是考察的对象.

(2) 如果概率 $P(A)$ 和条件概率 $P(A|B)$ 相等，即

$$P(A)=P(A|B), \tag{5}$$

则称 A、B 两事件彼此独立.

记两事件 A、B 同时发生为事件"A 和 B"，那么，$P(A\text{ 和 }B)$ 与 $P(A)$，$P(B)$ 又有什么关系呢？概率运算中的乘法法则指出：

"A 和 B"的概率等于 B 的概率与 B 发生的条件下 A 的概率之乘积，即

$$P(A\text{ 和 }B)=P(B)\cdot P(A|B). \tag{6}$$

显然，当 A 与 B 彼此独立时

$$P(A\text{ 和 }B)=P(A)\cdot P(B). \tag{7}$$

反之，若此式成立，A 与 B 必定彼此独立，因此，作为推论，可以说(7)式是 A、B 彼此独立的充要条件.

还可以进一步推广为：

有限个事件 A、B、C、… 互相独立的充要条件是

$$P(A\text{ 和 }B\text{ 和 }C\text{ 和}\cdots)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)\cdots. \tag{8}$$

【例 6】 某药厂的针剂车间灌装一批合格的注射液需经 4 道工序，从长期生产经验获知，由于割锯时掉入玻璃屑而成为废品的概率为 0.5%，由于安瓿洗涤不洁而成为废品的概率为 0.2%，由于灌装时污染剂液而成为废品的概率为 0.1%，由于封口不严而成为废品的概率为 0.8%，求 4 道工序全都合格的概率.

解：从实际情况看，在这个问题中，一道工序的好坏对另一道工序的影响不太大，可以忽略，因此，上述形成废品的 4 种原因彼此独立. 据由乘法规则推论的公式(8)，4 道工序全都合格的概率就是各道工序合格概率之连乘积，即为

$$(1-0.5\%)\cdot(1-0.2\%)\cdot(1-0.1\%)\cdot(1-0.8\%)=98.41\%.$$

【例 7】 有一种新药，据传可以治愈某种病毒所致的流行性感冒．在 400 名流感病人中，有的服了这种药(事件 A)，有的没有服(事件 $\bar{A}$)；经过 5 天以后，有的好了(事件 B)，有的未好(事件 $\bar{B}$)；经调查，各种情况的人数记录于下表，其中 n_{AB} 表示发生事件"A 和 B"的人数，即服药且痊愈的人数，$n_{\bar{A}B}$，$n_{A\bar{B}}$，$n_{\bar{A}\bar{B}}$ 的含意也类似．试判断此药是否确有疗效．

	服　药　(A)	未　服　($\bar{A}$)	总　　计
痊 愈 (B) 未 愈 ($\bar{B}$)	$n_{AB}=130$ $n_{A\bar{B}}=30$	$n_{\bar{A}B}=190$ $n_{\bar{A}\bar{B}}=50$	$n_{AB}+n_{\bar{A}B}=320$ $n_{A\bar{B}}+n_{\bar{A}\bar{B}}=80$
	$n_{AB}+n_{A\bar{B}}=160$	$n_{\bar{A}B}+n_{\bar{A}\bar{B}}=240$	$N=n_{AB}+n_{\bar{A}B}+n_{A\bar{B}}+n_{\bar{A}\bar{B}}=400$

解：我们从考察服药和痊愈这两个事件是否独立着手，如果独立，说明服药无济于事．这就要算一算概率和条件概率．但我们只掌握 400 人的样本资料，准确的概率值无法获得，只好用频率作为它的近似值：

$$P(B)\approx\frac{n_{AB}+n_{\bar{A}B}}{N}=\frac{320}{400}=0.800;$$

$$P(B|A)\approx\frac{n_{AB}}{n_{AB}+n_{A\bar{B}}}=\frac{130}{160}=0.813.$$

显见，两者十分接近．据事件独立的定义式(6)，我们可以认为 A 和 B 几乎是互相独立的，换言之，这种新药几乎无效．

3．全概率公式

设事件 B 能而且只能与互不相容的事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 之一同时发生，则事件"B 和 A_1"、"B 和 A_2"、……、"B 和 A_n"等必定也是互不相容的，而且事件 B 可以表示成事件"(B 和 A_1)或(B 和 A_2)或…或(B 和 A_n)"，　由加法规则：

$$\begin{aligned}P(B)&=p[(B\text{ 和 }A_1)\text{或}(B\text{ 和 }A_2)\text{或}\cdots\text{或}(B\text{ 和 }A_n)]\\&=P(B\text{ 和 }A_1)+P(B\text{ 和 }A_2)+\cdots+P(B\text{ 和 }A_n)=\sum_{j=1}^{n}P(B\text{ 和 }A_j)\end{aligned}$$

由乘法规则：

$$P(B\text{ 和 }A_j)=P(A_j)\cdot P(B|A_j),$$

所以

$$P(B)=\sum_{j=1}^{n}P(A_j)\cdot P(B|A_j).$$

这就是在概率计算中起着重要作用的全概率公式．实际上，公式中的 $n\to\infty$ 时，仍然成立．

4．贝叶斯逆概率公式

设事件 B 能而且只能与互不相容的事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 之一同时发生，在 B 已经发生的情况下，A_i 的条件概率怎么样计算？

由乘法法则

$$P(A_i\text{ 和 }B)=P(B)\cdot P(A_i|B),$$

同时也有

$$P(A_i\text{ 和 }B)=P(A_i)\cdot P(B|A_i),$$

从而

$$P(B)\cdot P(A_i|B)=P(A_i)\cdot P(B|A_i),$$

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{P(B)}.$$

由全概率公式

$$P(B)=\sum_{j=1}^{n}P(A_j)\cdot P(B|A_j),$$

所以最终得到

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)\cdot P(B|A_j)}.$$

这就是在许多判断性的问题中得到广泛应用的贝叶斯公式. 同样,其中的 $n\to\infty$ 时仍然成立.

【例 8】 由一系列研究结果得知, 具有某特征 B 的草药可能而且只能是 5 种草药 $A_1, A_2, \cdots, A_5$ 之一,若收到一份具有特征 B 的未知样品,能否判断它属于 $A_1, A_2, \cdots, A_5$ 中的哪一种?

解: 贝叶斯逆概率公式是解决这类问题的重要途径之一. 只要搜集相当数量的资料,用频率近似地代替概率, 估计出 $P(A_1), P(A_2), \cdots$ 和 $P(A_5)$ 以及 $P(B|A_1), P(B|A_2), \cdots$ 和 $P(B|A_5)$, 然后代入贝叶斯公式分别计算出 $P(A_1|B), P(A_2|B), \cdots$ 和 $P(A_n|B)$, 加以比较, 其中最大的一个如果是 $P(A_k|B)$, 那么就有理由推测该未知样品可能属于 A_k 这一种.

现在用具体数字来说明. 假定已经完成了两项调查:

(1) 关于条件概率,数据如下:

		样 本 数	具备特征 B 的样本数	$P(B\|A_i)$
	A_1	12	6	0.50
草	A_2	40	8	0.20
	A_3	12	3	0.25
药	A_4	55	11	0.20
	A_5	100	30	0.30

(2) 关于非条件概率. 把当时当地以及与本问题有关的特定环境下, $A_1, A_2, \cdots, A_5$ 出现的频率作为概率的近似值,有

$$P(A_1)=0.10,\quad P(A_2)=0.20,$$
$$P(A_3)=0.05,\quad P(A_4)=0.25,$$
$$P(A_5)=0.40.$$

将以上数据代入贝叶斯公式,得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{\sum_{j=1}^{5}P(A_j)\cdot P(B|A_j)}=\frac{0.10\times 0.50}{P(B)}=\frac{0.05}{P(B)},$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}{\sum_{j=1}^{5}P(A_j)\cdot P(B|A_j)}=\frac{0.20\times 0.20}{P(B)}=\frac{0.04}{P(B)},$$

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)\cdot P(B|A_3)}{\sum_{j=1}^{5}P(A_j)\cdot P(B|A_j)}=\frac{0.05\times 0.35}{P(B)}=\frac{0.0175}{P(B)},$$

$$P(A_4|B)=\frac{P(A_4)\cdot P(B|A_4)}{\sum_{j=1}^{5}P(A_j)\cdot P(B|A_j)}=\frac{0.25\times 0.20}{P(B)}=\frac{0.05}{P(B)},$$

$$P(A_5|B)=\frac{P(A_5)\cdot P(B|A_5)}{\sum_{j=1}^{5}P(A_j)\cdot P(B|A_j)}=\frac{0.40\times 0.30}{P(B)}=\frac{0.125}{P(B)}.$$

因为我们只需要相对地比较 $P(A_1|B), P(A_2|B), \cdots$ 等, 所以公共的分母 $P(B)$ 不必算出, 就能看出 $P(A_5|B)$ 最大, 在具备 B 特征的情况下, 该未知草药属于 A_5 这一种的可能性最大, 属于 A_3 这一种的可能性最小.

最后, 我们附带提一下, 目前贝叶斯公式在医学电子计算机诊断中已成为重要方法之一, 在那里, B 表

示疾病的症状，可以包括许多个项目，如体温、体征、化验指标、X 光检查结果等等，把每个项目看作一个事件，m 个项目可表示为 $B_1, B_2, \cdots, B_m$，这样，公式中的 B 便可看作 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 等的同时发生，即

$$B=(B_1 和 B_2 和 B_3 和\cdots和 B_m).$$

如果假定 $B_1, B_2, \cdots$等互相独立，则

$$P(B)=P(B_1)\cdot P(B_2)\cdots P(B_n),$$
$$P(B|A_i)=P(B_1|A_i)\cdot P(B_2|A_i)\cdots P(B_m|A_i).$$

思 考 和 练 习

1. 某事件的频率和概率有何区别和联系？
2. 何谓互不相容的事件？何谓对立事件？何谓互相独立的事件？何谓诸事件构成完备系？事件“A 或 B”、“A 和 B”是什么涵义？
3. 应用加法规则求某事件的概率时应注意哪些条件？应用乘法规则应注意那些条件？何谓条件概率？
4. 全概率公式和贝叶斯逆概率公式的意义何在？
5. 一袋中装有大小与质量相等的 20 个球，其中 8 个红色，6 个黄色，4 个黑色，2 个白色．今在袋中任取一球，试求
 (1) 取得的是红球的概率；
 (2) 取得的是红球或黄球的概率；
 (3) 取得的是红球或黄球或黑球的概率．
6. 有甲乙两袋，甲袋中盛有红球 6 个，白球 3 个；乙袋中盛有红球 5 个，白球 2 个．今自甲、乙二袋中各取一球，试求
 (1) 两球都为红球的概率；
 (2) 一红一白的概率；
 (3) 二白的概率．
 上述三个事件之和的概率等于多少？其理由何在？
7. 某城市在第一季度出生婴儿的情况为：
 一月份，男孩 145 个，女孩 135 个；
 二月份，男孩 142 个，女孩 136 个；
 三月份，男孩 152 个，女孩 140 个；
 问生男孩的概率约为多少？
8. 瑞典物理学家斯韦捷尔格曾观察浮悬于水中的黄金微粒的随机运动（布朗运动）共 518 次，在受观测的空间内有 112 次没有观测到一颗粒子，168 次观测到一颗粒子，130 次两颗粒子，69 次三颗粒子，32 次四颗粒子，5 次五颗粒子，1 次六颗粒子，1 次七颗粒子，求在一次观测中发生以上各种情况的概率（近似值）．
9. 一个射手的命中概率是 80%，另一个射手是 70%，如果两人同时发射，求两人中至少有一人命中的概率．
10. 在 1、2、3、4 路电车独立地经过的电车站，有一乘客等候 1 路或 3 路电车，假定各路电车经过这里的概率是相同的，求首先到站的正合该乘客所需的概率．
11. 甲、乙两个反应罐在一小时内需要工人照顾的概率分别为 0.1 和 0.2，求在一小时内
 (1) 甲乙两罐都需要照顾的概率；
 (2) 甲乙两罐都不需要照顾的概率；
 (3) 有一台需要照顾而另一台不需要照顾的概率．

*12. 有两个工厂生产电灯泡，第一个工厂供应全部灯泡的 70%，第二个工厂供应 30%．在每 100 个灯泡中，第一个工厂平均有 83 个标准品，而第二个工厂则有 63 个标准品，求消费者买到标准品的概率．

13. 设 $P(A)=0.2$, $P(B)=0.3$, $P(C)=0.4$, $P(D)=0.5$, $P(A|B)=0.3$, $P(C|B)=0.2$, $P(A|C)=0.2$, $P(A|D)=0$.

试计算

(1) $P(\bar{A})$; (2) $P(A$ 和 $D)$;

(3) $P(A$ 或 $D)$; (4) $P(A$ 和 $B)$;

(5) $P(A$ 和 $C)$; (6) $P(B$ 和 $C)$;

(7) $P(B|A)$; (8) $P(C|A)$;

(9) $P(B|C)$; (10) $P(\bar{A}$ 和 $B)$;

(11) $P(A$ 和 $\bar{B})$; (12) $P(\bar{A}$ 和 $\bar{B})$.

*14. 设事件 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相容, $P(A_1)=\frac{1}{2}$, $P(A_2)=\frac{1}{2^2}$, $\cdots$, $P(A_i)=\frac{1}{2^i}$, $\cdots$ 事件 B 只能和 $A_1, A_2, \cdots$ 之一同时发生, 且 $P(B|A_1)=\frac{1}{2}$, $P(B|A_2)=\frac{3}{4}$, $\cdots$, $P(B|A_i)=1-\frac{1}{2^i}$, $\cdots$, 试计算 $P(A_1|B)$, $P(A_2|B)$, $\cdots$, $P(A_i|B)$, $\cdots$ 并指出 B 事件发生的情况下, $A_1, A_2, \cdots$ 中哪一个最可能发生.

*15. 有 10 个口袋, 其中 3 个布口袋的内容相同, 均盛有黑球 6 个, 红球 3 个, 白球 1 个; 另有 6 个纸口袋内容亦相同, 均盛黑球 1 个, 红球 6 个, 白球 3 个; 还有一个尼龙口袋, 其中盛黑球 3 个, 红球 1 个, 白球 6 个. 今在暗室中随机地从某个口袋中摸出一球是黑色的, 问它是从各种口袋摸出的概率分别是多少? 最大可能是从哪种口袋里摸出的? 假定摸出的球是红色的如何? 假定是白色的, 又如何?

第二节 随机变量及其分布

一、两类随机变量

前面我们介绍了随机现象在一定条件下可能表现为事件 A, 也可能表现为事件 B 或其它. 如果这些事件可以用数字来表示, 那么我们就说这个随机现象可通过随机变量来研究.

【例 1】 从上节例 3 的口袋中任摸一球又放回的试验独立地重复进行 10 次, 摸出红球的次数可能是 0 次, 可能是 1 次, 也可能是 2, 3, 4, $\cdots$ 或 10 次. 显然, 摸出红球的次数是个随机变量, 其取值范围是 0 到 10 之间的正整数.

【例 2】 在毒性试验中, 给大鼠注射一定剂量的药物后, 可能死亡, 也可能生存, 用 0 表示死亡, 用 1 表示生存, 那么这也是随机变量, 其可能取值的范围只是两个数 0 和 1.

【例 3】 100 名病人服用某种药物, 治愈人数可能是 0, 也可能是 1, 2, 3, $\cdots$, 100 等正整数.

凡此等等, 如果随机变量的值可以一个一个地列出来, 我们称之为离散型随机变量.

还有一大类随机变量, 其取值无法一一列出.

【例 4】 从同一品种的大量片剂中任抽一片称重, 其重量可能是某一范围内的任一数值, 换言之, 该随机变量的取值充满了某一区间.

【例 5】 将某药投于盛水的大容器里, 搅拌后用吸管取样, 测定浓度. 尽管已经搅拌, 但由于取样的部位不同, 样品的浓度也不尽相同, 一次取样所得的结果可以认为是随机变量, 某一个小范围内的所有数值它都可以取到.

【例 6】 规定了药物的失效标准后, 客观上, 每支注射液都有各自的失效时间, 同一批