椭圆型方程差分方法

〔苏〕 A. A. 萨马尔斯基　B .Б . 安德烈耶夫　著

科 学 出 版 社

TJM 1170/124

椭圆型方程差分方法

〔苏〕A. A. 萨马尔斯基
B. Б. 安德烈耶夫 著

武汉大学计算数学教研室 译

北京师范大学
藏书
1242889
图书馆

科学出版社

1984

内 容 简 介

近年来，在偏微分方程数值解法的研究方面取得较大的进展．本书是叙述椭圆型方程差分方法理论的较新较系统的著作．书中介绍了构造几个典型数学物理问题的差分格式的方法，讨论了守恒方法、变分差分方法和泛函逼近方法等．本书自成系统，易读易懂，不论对计算数学理论研究人员还是对实际计算工作者都有重要的参考价值．

А. А. Самарский　В. Б. Андреев
РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва　1976

椭圆型方程差分方法

〔苏〕A. A. 萨马尔斯基　B. Б. 安德烈耶夫 著
武汉大学计算数学教研室 译
责任编辑　向安全　林鹏
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1984年 9月第一版　开本：787×1092　1/32
1984年 9月第一次印刷　印张：11 3/4
印数：0001—9,750　字数：268,000

统一书号：13031·2678
本社书号：3682·13—1

定价：1.85 元

译者前言

本书主要论述了椭圆型偏微分方程近似解的差分格式理论.

书中叙述了构造典型数学物理问题差分格式的各种方法,研究均衡方法,变分差分方法,近似泛函法,以及用解函数类中的逼近来提高逼近误差阶的方法等等. 可供综合性大学数学系高年级学生、研究生以及有关科学工作者使用.

本书第一章至第五章,分别由许嘉谟、胡泽民、李茂祥、费浦生、康立山等同志翻译,第六章及附录由雷晋干同志翻译.

武汉大学计算数学教研室

序

各种物理性质的许多稳定过程都归结为椭圆型偏微分方程．诸如定常热传导和扩散问题，导体中电流分布问题，静电学和静磁学问题，弹性理论和渗流理论问题等等．

椭圆型方程边值问题的精确解只有在特殊情况下才能得到．因此必须善于近似地求解这些问题．

有限差分法是解椭圆型方程的通用而有效的方法，本书就是论述这种方法的．

用差分方法解微分方程的过程有两个基本步骤：

1）第一步——将微分方程及附加条件（例如边界条件）用一组网格方程来代替(建立差分格式)；

2）第二步——求解所得的网格(差分)方程组．

本书仅讨论与差分格式的建立及其分析有关的问题．逼近椭圆型方程的差分方程的解法(直接法和迭代法)将在另一书中讨论．

本书重点是对典型数学物理问题的方程及附加条件作差分逼近．我们仅限于研究相应于二阶及四阶方程和方程组的问题，特别是在它们之中的有直接实际应用价值的问题．因此我们认为，援引各种数学物理问题的提法(第一章)，并附上方程和边界条的推导是适宜的．

我们指出，椭圆型方程的差分逼近，可以用于建立与抛物型及双曲型方程有关的非定常数学物理问题的差分格式．

为叙述方便，本书主要研究两个自变量方程的差分格式．当进一步研究三维的情况时，不会引起任何原则性的困难，只

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

不过公式更复杂而已.

在建立差分格式时，总是应当注意到求解得到的差分方程组所需的计算量. 所以我们仅研究能保证二阶(或四阶)精确度的具有最小模式的最简单格式. 而且在实际中广泛应用的正是这些类型的格式.

在建立差分格式时，我们要关心的不仅是从逼近误差观点使它们能很好地逼近原来的微分方程，而且使它们在网格函数空间中能够模拟原问题的基本特性(例如自共轭性,椭圆性等等). 本书对此问题将给予应有的重视.

目前已有很多建立椭圆型方程差分逼近的方法. 在本书范围内,要详细叙述一般情形下的这些方法是不可能的.

我们以最简单的一维问题为例子来说明构造差分格式的各种方法. 这样做可以突出各种方法的建设性的思想，而不过多地叙述在讨论更一般方程时所出现的非常复杂的技术性细节.

差分格式的好坏首先取决于它的精度. 本书对差分格式的研究基于对逼近误差及稳定性的细致分析，因为正是这两个特征决定着差分格式的精确度.

差分格式稳定性的研究，归结为对差分边值问题的解作出先验估计. 对于椭圆型方程的差分格式，已有很多不同的先验估计，它们在各种不同程度上模仿了微分方程的先验估计.

本书中的先验估计，在很大程度上具有例证的特点. 对书中建立的差分格式没有一一进行先验估计，但按第三、五、六章中所讲的方法,可以得到这些估计.

在第三章中非常详尽地研究了各种坐标系中泊松方程的差分格式.

第四章讨论二阶椭圆型方程基本边值问题的差分格式

(含有或者不含有混合导数的情况，高阶的以及非均匀网格上的格式等等)，弹性理论方程组以及四阶方程的差分格式.

本章还详细研究了二阶和四阶方程的各种连接条件和边界条件的逼近.

第五章介绍差分格式理论中最基本的数学工具（差分格林公式，差分算子的特征值问题，网格嵌入定理等等），这在第六章中用能量不等式方法求某些先验估计时要用到.

本书所讲的构造差分格式的方法，也可用于非线性方程的差分逼近. 但本书不讨论非线性格式，因为这要花相当大的精力去寻求先验估计，在本书中这样做是不适宜的.

本书是作者以莫斯科大学数学力学系、物理系、计算数学和自控系所用的讲义为基础而写成的. 本书可能有较多的读者，并可作为研究数学物理方程差分解法的教材. 在叙述方面具有系统性和初等性，不要求读者具有差分格式理论方面的预备知识. 应该指出，本书同 A. A. 萨马尔斯基著的《差分格式引论》(科学出版社，莫斯科，1971 年) 在方法上和思想上都是相近的.

作者感谢 И. Г. 别鲁茜娜在整理手稿时的帮助.

A. A. 萨马尔斯基
B. Б. 安德烈耶夫

目　　录

第一章　引　　论

§1. 导出椭圆型方程的科学技术问题实例

1. 定常热传导和扩散问题. 各种物理性质的定常（即不随时间变化）过程，可由椭圆型方程来描述，在最简单的情况下（均匀介质和无源）由拉普拉斯方程描述．例如有热传导、扩散问题，静电学、静磁学问题，有势流问题等等．

我们考察三维空间 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 中由曲面 Γ 所界的某体积 G 内的定常热分布．热迁移（或热传导）过程由傅里叶定律确定：热流密度向量 $\boldsymbol{W}$ 正比于温度 $u=u(x)$ 的梯度，即

$$\boldsymbol{W}=-k\operatorname{grad} u, \tag{1}$$

其中 $k=k(x)$ 是热传导系数．热流密度等于单位时间内穿过同温面单位面积的热量．

对于表面为 S 且全部位于 G 中的体积 V，我们写出热平衡方程．假设体积 V 内有按密度 $f(x)$ 分布的热源，那么体积 dV 中所产生的热量就是 $f(x)dV$.

令 W_n 是向量 $\boldsymbol{W}$ 在表面 S 的外法线 $\boldsymbol{n}$ 上的投影，热平衡方程表示以下显见的事实：通过表面 S 的热流总和

$$\iint_S W_n dS$$

应等于体积 V 中所产生的热量

$$\iiint_V f(x)dV,$$

亦即

$$\iint_S W_n dS = \iiint_V f(x) dV. \tag{2}$$

利用奥氏公式

$$\iint_S W_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{W} dV$$

将平衡方程 (2) 改写成

$$\iiint_V (\operatorname{div} \boldsymbol{W} - f(x)) dV = 0. \tag{2'}$$

如果 $f(x)$ 和 $\operatorname{div} \boldsymbol{W}$ 是点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 的连续函数，则由体积 V 的任意性，从 (2′) 可得

$$\operatorname{div} \boldsymbol{W} = f(x). \tag{3}$$

将热流向量表示式 (1) 代入上式，我们得到定常温度 $u = u(x)$ 的方程

$$Lu = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = -f(x) \tag{4}$$

或其展开的形式

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = -f(x_1, x_2, x_3). \tag{4'}$$

系数 k 是点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 的函数:

$$k = k(x) = k(x_1, x_2, x_3).$$

在均匀介质情况下，热传导系数不依赖于点 x，$k = \text{const}$，定常温度分布 $u = u(x)$ 就由泊松方程来描述:

$$\Delta u = -\bar{f}(x), \quad \bar{f} = f/k.$$

为方便起见，右边仍记为 $f(x)$，于是

$$\Delta u = -f(x), \tag{5}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -f(x). \tag{5'}$$

此为试读，需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

如果无热源，即 $f(x)=0$，则对定常温度 $u=u(x)$，可得齐次方程

$$\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)=0,$$

（或者在 $k=\text{const}$ 情况下为拉普拉斯方程 $\Delta u=0$.）

热传导方程 (4) 是在热迁移过程为各向同性的假定下得到的. 如果热传导系数依赖于方向，因而是一个张量（各向异性介质），则代替 (4) 的就是方程

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)=-f(x). \tag{6}$$

如果 $\alpha\neq\beta$ 时 $k_{\alpha\beta}=0$，则方程的形式为

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(k_{33}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$$
$$=-f(x).$$

方程 (4) 在区域 G 的所有内点成立. 在它的边界 Γ 上要给出附加条件.

通常就是下面的几个条件之一：

1）当 $x\in\Gamma$ 时，温度是给定的：$u=g(x)$；

2）当 $x\in\Gamma$ 时，热流量是给定的：$k\dfrac{\partial u}{\partial n}=g(x)$；

3）按牛顿定律，热交换是给定的：$k\dfrac{\partial u}{\partial n}=\kappa u+g(x)$，

$x\in\Gamma$，其中 $\kappa=\kappa(x)>0$.

相应于这些条件，我们得到三个基本边值问题：

1）第一边值问题，或狄利克雷问题：由条件 $Lu=-f(x)$

当 $x\in G$，$u=g(x)$ 当 $x\in\Gamma$，

求出闭区域 $G+\Gamma$ 上的连续函数 $u(x)$；

2）第二边值问题，或诺依曼问题：

$$Lu=-f(x)\ \text{当}\ x\in G,\quad k\frac{\partial u}{\partial n}=g(x)\ \text{当}\ x\in\Gamma;$$

3）第三边值问题：

$$Lu = -f(x) \text{ 当 } x \in G, \quad k\frac{\partial u}{\partial n} = \kappa u + g(x) \text{ 当 } x \in \Gamma.$$

我们指出，为使诺依曼问题可解，必须满足条件

$$\int_\Gamma g(x)d\sigma + \int_G f(x)dx = 0, \tag{7}$$

在齐次方程的情况（$f \equiv 0$）下，式(7)就成为

$$\int_\Gamma g(x)d\sigma = 0. \tag{8}$$

这个条件意味着流入区域G的热量应等于流出的热量（否则过程将带有不定常的特征）。

物质扩散过程在很多方面类似于热传导过程．描述扩散现象时，与热传导的基本定律相类似的，就是涅恩斯特定律，据此，物质流量密度向量 $\boldsymbol{W}$ 正比于浓度 $u = u(x)$ 的梯度：

$$\boldsymbol{W} = -D\,\mathrm{grad}\,u,$$

其中 $D=D(x)$ 是扩散系数．把此式代入方程(3)，当 $f(x)=0$（表示没有扩散物质的源），就得到扩散方程

$$\mathrm{div}(D\,\mathrm{grad}\,u) = 0,$$

在均匀介质（$D = \mathrm{const}$）时，它变成拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$.

如果扩散发生在以速度 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 运动的介质中，则对定常浓度分布 $u = u(x)$，扩散方程为

$$\mathrm{div}\,(D\,\mathrm{grad}\,u) - \mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}u) = 0. \tag{9}$$

或者如果 $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$（介质是不可压缩的），则有

$$\mathrm{div}(D\,\mathrm{grad}\,u) - v_1\frac{\partial u}{\partial x_1} - v_2\frac{\partial u}{\partial x_2} - v_3\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

事实上，如果介质是运动的，则物质流的总和是由等于 $-D\,\mathrm{grad}\,u$ 的扩散流和等于 $u\boldsymbol{v}$ 的迁移流（传播流）所构成，即总的流是

$$\boldsymbol{W} = -D\,\mathrm{grad}\,u + u\boldsymbol{v}.$$

现在我们只要把此式代入(3)式中，并令 $f=0$ (无源)即可。在扩散过程中可能伴有分解反应或物质增生，这相当于出现汇或源．如果这些源(汇)的密度例如是正比于浓度，则代替(9)式的就是方程

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u)-(\boldsymbol{v} \operatorname{grad} u)+\beta u=0 \tag{10}$$

其中 β 是比例系数[当 $\beta>0$ 有源(物质增生)，当 $\beta<0$ 有汇]．

注 1．其他问题也可以导出上述方程．例如，考察绝缘介质中的静电场问题．它可由马克斯威尔方程描述：

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}=0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D}=4\pi\rho, \quad \boldsymbol{D}=\varepsilon \boldsymbol{E},$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是电场强度向量，$\boldsymbol{D}$ 是电感应向量，$\varepsilon=\varepsilon(x)$ 是介质的介电系数，$\rho=\rho(x)$ 是在点 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 处电荷的体密度．由方程 $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0$ 可知，$\boldsymbol{E}$ 是有势向量，可表成

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad} u,$$

其中 $u=u(x)$ 是电场的势．将 $\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad} u$ 代入方程 $\operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E}=4\pi\rho$，得

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u)=-4\pi\rho.$$

如果介质是均匀的 ($\varepsilon=\text{const}$)，则

$$\Delta u=-4\pi\rho/\varepsilon;$$

在真空中 ($\varepsilon=1$) 有 $\Delta u=-4\pi\rho$.

如果问题是定常的，则由马克斯威尔方程，对于磁场强度向量可得(静磁学方程)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}=0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B}=0, \quad \boldsymbol{B}=\mu \boldsymbol{H}.$$

同静电学类似，引入磁场势 u，它在均匀介质 ($\mu=\text{const}$) 中满足拉普拉斯方程 $\Delta u=0$，并且 $\boldsymbol{H}=-\operatorname{grad} u$.

注 2．定常不可压流体流动的速度势 φ 也满足拉普拉斯方程 $\Delta\varphi=0$，且速度 $\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\varphi$.

如果方程(4)的解不依赖于 x_3 (显然，这只有在 $f=f(x_1,$

x_2)，$k=k(x_1, x_2)$，边界条件不依赖于 x_3，以及特殊类型的区域情况下才有可能)，则得到确定 $u=u(x_1, x_2)$ 的二维方程

$$Lu=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$$
$$=-f(x_1, x_2).$$

例如这可能在下述情况下成立，即区域为沿 x_3 轴的母线所围成的无限柱体，并且方程的系数和右端项以及边界条件等一切已知量沿母线都不变化。这时，问题可在平行于平面（x_1，x_2）的任一柱体截面上来研究。

以后，为了叙述方便，我们仅考虑二维问题。转到三维椭圆问题不会发生原则性的困难，照例只是计算和公式复杂些而已。

2. 在导体中定常电流密度分布问题. 定常电磁场的分布问题导至椭圆型方程。这些问题可由马克斯威尔方程组来描述，在定常情况其形式为

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0, \\ &\operatorname{div}\mu\boldsymbol{H}=0, \quad \operatorname{div}\varepsilon\boldsymbol{E}=4\pi\rho, \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是电场强度向量，$\boldsymbol{H}$ 是磁场强度向量，$\boldsymbol{j}$ 是电流的体密度向量，ρ 是电荷的体密度，μ 是导磁率，ε 是导电率。

在介质为各向异性和非均匀的一般情况下，ε 和 μ 是依赖于空间点 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 的张量。如果介质是各向同性的，则 ε 和 μ 是 x 的标量函数。在介质为各向同性和均匀的情况下，ε 和 μ 是常量：$\varepsilon=\text{const}>0$，$\mu=\text{const}>0$。在电介质中，可认为 $\mu=1$，在导体中 $\varepsilon=1$，在真空中 $\varepsilon=\mu=1$。

在一般情况下，方程(11)中的 $\boldsymbol{j}$ 要用 $\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}^{(e)}$ 代替，其

中 $\boldsymbol{j}^{(e)}$ 是由另外的电动势所产生的电流体密度向量．在这里我们假定 $\boldsymbol{j}^{(e)}=0$，如果介质是非传导的，则 $\boldsymbol{j}=0$．静磁学方程（$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=0$，$\operatorname{div}\mu\boldsymbol{H}=0$）在非传导的介质中也成立．

以上所提到的条件 $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0$，意味着向量 $\boldsymbol{E}$ 是有势的，而条件 $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$（在 $\mu=\text{const}$ 时成立），意味着 $\boldsymbol{H}$ 是管量场，即存在向量势 $\boldsymbol{A}$，使得 $\boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$，$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$．向量 $\boldsymbol{A}$ 满足泊松方程 $\Delta\boldsymbol{A}=(-4\pi/c)\boldsymbol{j}$．事实上，(11) 的第一个方程给出

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{A}=-\Delta\boldsymbol{A}=(4\pi/c)\boldsymbol{j}.$$

由于研究导体中定常电流的分布而产生了一些有意义的问题，从马克斯威尔方程 (11)，得到电荷守恒律

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0,$$

电场的有势性条件，即

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}u, \tag{12}$$

应该与上述守恒条件列在一起．电流密度向量 $\boldsymbol{j}$ 和电场强度之间有联系，这种联系表现为欧姆定律

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}, \tag{13}$$

其中 σ 是导电系数，如果介质的传导性不依赖于方向（传导是各向同性的），它是 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 的标量函数；反之，σ 是张量．由式 (12)，(13) 得 $\boldsymbol{j}=-\sigma\operatorname{grad}u$．再由式 $\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0$，我们得到势函数的方程：$\operatorname{div}(\sigma\operatorname{grad}u)=0$，它可以写成如下的展开形式：

$$\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=0,\ \text{在各向异性介质中,}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=0,\ \text{在各向同性介质中,}$$

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0,\ \text{在均匀且各向同性介质中.}$$

在可传导的曲面上，电场向量的切向分量为零，这等价于势函数是常数：$u = \text{const}$（第一类边界条件）．特别在接地的理想可传导曲面上 $u = 0$．在与电介质相连的导体边界上，电流密度的法向分量 $j_n = -\sigma \frac{\partial u}{\partial n}$ 为零，即

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{（第二类边界条件）}.$$

在研究液体和气体在磁流体管中流动，以及在研究强磁场中不平衡的等离子体的性态时，会遇到有界区域中电动力学的定常问题，它们的特性就是广义欧姆定律，此定律不仅表示向量 $\boldsymbol{j}$ 对于 $\boldsymbol{E}$，而且表示向量 $\boldsymbol{j}$ 对于 $\boldsymbol{H}$ 的依赖关系．首先必须指出，在以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的介质中，欧姆定律（13）的形式为

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]). \tag{14}$$

如果介质以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，并考虑到所谓霍尔效应，则广义欧姆定律为

$$\boldsymbol{j} + [\boldsymbol{j}\boldsymbol{\Omega}] = \sigma(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]), \quad \boldsymbol{\Omega} = \beta\frac{\boldsymbol{H}}{|\boldsymbol{H}|}, \tag{15}$$

其中 β 是霍尔参数，$\sigma > 0$ 是导电系数．

如果霍尔参数 $\beta = 0$，则关于 $\boldsymbol{j}$ 的这个方程变成运动介质中通常的欧姆定律．

假若位移电流和感应磁场都小得可忽略，这就允许将磁场看成是不变的和给定的．

导电系数 σ，霍尔参数 β 及介质速度 $\boldsymbol{v}$ 的空间分布都将认为是给定的．在一般情况下，这些量可从求解另外的方程而得到，例如磁气动方程，电子能量守恒定律，等等．

以下仅限于研究二维问题，假定向量 $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{v}$ 都与坐标 x_3 无关，并且都位于同一平面 (x_1, x_2) 上，因此

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com