

等学校教材

数学分析



下 册

王煥初 编著

西北工业大学出版社

高等学校教材

数 学 分 析

下 册

王焕初 编著

西北工业大学出版社

1989年3月 西安

高等学校教材

数学分析

王焕初 / 编著

责任编辑 刘彦真

责任校对 郭景清

西北工业大学出版社出版

(西安市友谊西路127号)

陕西省新华书店发行

空军导弹学院印刷厂印装

ISBN 7-5612-0123-0/O·11 (课)

开本787×1092毫米 1/32 7.75印张 175千字

1989年3月第1版

1989年3月第1次印刷

印数 1—2000册

定价: 1.57元

前 言

本书是根据1980年高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会审订的“数学分析教学大纲”和工科数学课程教学指导委员会于1986年拟定并经国家教育委员会1987年批准的“高等数学课程教学基本要求”编写的。

书中的空间解析几何与常微分方程两部分，是工科“高等数学”课程的内容，其它均为理科“数学分析”课程的内容，标有“*”的则是超出工科“高等数学”课程基本要求的内容。

本书从实数的完备性开始，由一元函数到多元函数，由函数的极限和连续性到函数的微分学和积分学，对于每一个新的理论，总是把它的来源叙述得清清楚楚，丝毫没有脱节之处。

本书内容和一般通用教材有许多不同之处。例如，曲线的弧长定义和曲面的面积定义是属于同一类型的数学问题，如果不用同一方法处理，就失去数学的概括性。因此，本书关于曲线弧长的定义与一般著作中所用的定义是不相同的，还有曲线的拐点问题，为了不至于把拐点和两侧凹凸情况相反的点相混淆，本书关于拐点的定义也与一般著作中所用的定义是不相同的。又如，对几何学和物理学中的问题，在一般著述中，多从有关问题的近似值出发，以求出其计算公式。这就可能使读者因此而产生错误的思路，即：对事物的近似值求极限，就得到事物的真值。为了避免这种情况，本书舍弃了应用近似值这个途径，而直接从有关问题在几何学或物理学中的定义求出其真实结果，然后再推导出这个真实

结果的计算公式。

以上这些都是本书在理论上不同于一般著述之处。至于其它不同之处，就不缕述了。

本书完成初稿后，承蒙国家教委工科数学课程指导委员会委员孙家永教授予以审阅，并提出了不少宝贵意见，俾得修改定稿。但修改后，恐尚有不妥之处，敬希读者批评指正。

王焕初

1988年1月于西北工业大学

目 录

第六章 多元函数的微分学	1
6·01 区域.....	1
6·02 多元函数.....	4
6·03 多元函数的极限和连续性.....	6
6·04 多元连续函数的运算定理.....	9
6·05 多元连续函数的一些定理.....	11
6·06 偏导数和偏导函数.....	15
6·07 全改变量.....	17
6·08 多元复合函数的微分法.....	19
6·09 方向导数.....	20
6·10 全微分和它在近似计算中的应用.....	21
6·11 全微分形式的不变性.....	23
6·12 高阶偏导数和高阶偏导函数.....	24
6·13 高阶全微分.....	29
6·14 隐函数及其存在定理.....	31
6·15 隐函数的微分法.....	39
6·16 二元函数的反函数.....	43
6·17 空间两曲面相交曲线的切线和法面.....	43
6·18 曲面的切面和法线.....	50
6·19 二元函数的有限改变量公式.....	51
6·20 多元函数的极值.....	53
6·21 条件极值.....	57
6·22 多元函数的最大值和最小值.....	58

6·23	矢函数及其微分法	62
6·24	梯度、散度和旋度	64

第七章 曲线积分和二重积分 67

7·01	对弧长的曲线积分	67
7·02	对坐标的曲线积分	71
7·03	两种曲线积分之间的关系	75
7·04	二重积分	76
7·05	二重积分的性质	77
7·06	二重积分的计算公式	78
7·07	格林公式	84
7·08	对坐标的曲线积分与积分线路无关的条件	86
7·09	平面面积的变量替换	90
7·10	二重积分的变量替换	91
7·11	用极坐标计算二重积分	93
7·12	平面面积的投影	95
7·13	曲面的参数方程和它的面积	97
7·14	非均匀薄板的质量、重心和惯性矩	104

第八章 曲面积分和三重积分 106

8·01	曲面的侧	106
8·02	对曲面面积的曲面积分	107
8·03	对坐标的曲面积分	111
8·04	斯托克斯公式	115
8·05	三重积分	118
8·06	高斯公式	123
8·07	空间区域的体积变换	126

8·08	三重积分的变量替换·····	129
8·09	非均匀物体的静力矩和重心·····	133

第九章 含参数的积分····· 136

9·01	含参数的定积分·····	136
9·02	含参数定积分的导函数与定积分·····	137
9·03	含参数的无穷限广义积分·····	139
9·04	含参数无穷限广义积分的定积分与导函数·····	143
9·05	广义积分的收敛定理·····	145
9·06	贝塔函数·····	147
9·07	伽马函数·····	148
9·08	贝塔函数与伽马函数的关系·····	149

第十章 无穷级数····· 152

10·01	级数的概念·····	152
10·02	无穷级数的一些定理·····	153
10·03	正项级数·····	162
10·04	交错级数·····	172
10·05	函数项级数·····	173
10·06	函数项级数的一些定理·····	175
10·07	幂级数·····	179
10·08	幂级数的运算·····	182
10·09	泰勒公式·····	183
10·10	泰勒级数·····	185
10·11	初等函数的幂级数展开式·····	186
10·12	欧拉公式·····	192
10·13	用幂级数作近似计算·····	193

10·14	付立叶级数	195
10·15	函数的付立叶展开	198
10·16	函数在任何区间上的付立叶展开	204
10·17	将函数展成付立叶正弦或余弦级数	207
10·18	定积分的第二中值定理	208
10·19	付立叶级数的一致收敛性	211
10·20	付立叶级数的逐项积分与微分	215
第十一章 常微分方程		217
11·01	微分方程的一般概念	217
11·02	变量可分离的方程	218
11·03	齐次方程	219
11·04	一阶线性方程	221
11·05	伯努利方程	223
11·06	全微分方程	224
11·07	可化为一阶方程的高阶微分方程	226
11·08	线性微分方程	228
11·09	二阶常系数齐次线性微分方程	230
11·10	高阶常系数齐次线性微分方程	232
11·11	高阶常系数非齐次线性微分方程在特殊 情况下的特解的简易求法	234
11·12	欧拉方程	237
11·13	常系数线性微分方程组	238
11·14	微分方程的幂级数解法	239

第六章 多元函数的微分学

§6.01 区 域

在坐标面上，把一部分平面中的一切点 (x, y) 的集合 D 叫做平面区域。当平面区域延伸到无限远处，就说它是无界的。否则，它总可以被包围在一个以原点为圆心而半径适当大的圆内，这样的区域叫做有界的，如果平面区域是由一条或几条线（直线或曲线）所围成，就把围成区域的线叫做该区域的边界。边界上的点叫做区域的界点，边界以内的点叫做区域的内点。包括一切界点和内点的区域叫做闭区域。只包括所有内点而不包括任何界点的区域叫做开区域。本书在以后所说平面区域的边界曲线，都指的是连续曲线与逐段光滑曲线（§2.19）。

例如，满足 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$ 的一切点 (x, y) 的集合是一个平面闭区域，它的边界是圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 。满足 $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ 的一切点 (x, y) 的集合是一个平面开区域，它的边界也是圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 。这样的平面开区域称为点 (a, b) 的圆形邻域，而不论 r 是任何正数。

又如，满足 $a - \delta_1 \leq x \leq a + \delta_1$ 和 $b - \delta_2 \leq y \leq b + \delta_2$ 的一切点 (x, y) 的集合是一个平面闭区域，它的边界是由以下四条直线所构成矩形的四个边

$$x = a - \delta_1, \quad x = a + \delta_1, \quad y = b - \delta_2, \quad y = b + \delta_2. \quad (1)$$

我们把这个平面闭区域记为

$$[a - \delta_1, a + \delta_1; b - \delta_2, b + \delta_2].$$

满足 $a - \delta_1 < x < a + \delta_1$ 和 $b - \delta_2 < y < b + \delta_2$ 的一切点 (x, y)

的集合是一个平面开区域，它的边界仍是(1)中四条直线所构成矩形的四条边。这个平面开区域又叫做点 (a, b) 的**矩形邻域**，记为

$$(a - \delta_1, a + \delta_1; b - \delta_2, b + \delta_2),$$

而不论 δ_1, δ_2 是任何正数。

平面上点 (a, b) 的矩形邻域和圆形邻域都简称为点 (a, b) 的邻域。

对空间中的区域来说，它的情况与平面区域的情况完全相同。例如，满足下式的一切点 (x, y, z) 的集合叫做点 (a, b, c) 的**球形邻域**

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < r^2,$$

其中的 r 可以是任何正数。满足下列各式的一切点 (x, y, z) 的集合叫做点 (a, b, c) 的**长方体邻域**

$$a - \delta_1 < x < a + \delta_1, \quad b - \delta_2 < y < b + \delta_2,$$

$$c - \delta_3 < z < c + \delta_3,$$

记为

$$(a - \delta_1, a + \delta_1; b - \delta_2, b + \delta_2; c - \delta_3, c + \delta_3),$$

其中的 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 可以是任何正数。以上两种邻域都简称为点 (a, b, c) 的邻域。

至于空间闭区域

$$a - \delta_1 \leq x \leq a + \delta_1, \quad b - \delta_2 \leq y \leq b + \delta_2,$$

$$c - \delta_3 \leq z \leq c + \delta_3$$

则记为

$$[a - \delta_1, a + \delta_1; b - \delta_2, b + \delta_2; c - \delta_3, c + \delta_3].$$

在上述平面区域中的点 (x, y) 的坐标都是两个，因此把它叫做**二维空间**中的区域。又在上述空间区域中的点 (x, y, z) 的坐标都是三个。因此把它叫做**三维空间**中的区域。现在，略述 **m 维空间**中的一些情况于下， m 是一个任何正整

数。

设有 m 个彼此无关的自变量 $x_1, x_2, \dots, x_m$, 就用下面的记号以表示 m 维空间中的任意一点 P

$$P(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

而不论 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 是任何实数, 并且说 x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 是点 P 的第 i 个坐标。

在 m 维空间中, 设有两点 $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ 和 $B(b_1, b_2, \dots, b_m)$, 就用下式表示线段 $\overline{AB}$ 的长度

$$\overline{AB} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (b_i - a_i)^2}.$$

又用下式作为直线 AB 的方程

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \dots = \frac{x_m - a_m}{b_m - a_m}$$

对 m 维空间中的区域来说, 它的情况也与平面区域的情况完全相同。例如, 满足下式的一切点 $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 的集合, 叫做点 $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的球形邻域

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2 < r^2,$$

其中的 r 可以是任何正数; 满足下列各式的一切点 $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 的集合, 叫做点 $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的长方体邻域

$$a_i - \delta_i < x_i < a_i + \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

记为

$$(a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1; a_2 - \delta_2, a_2 + \delta_2; \dots, \\ a_m - \delta_m, a_m + \delta_m),$$

其中的 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ 可以是任何正数。以上这两种邻域都简称为点 $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的邻域。

如果对区域中的任何两点, 都可用一条全部位于区域内的折线联结起来, 就把这样区域叫做连通区域。以后所说的

区域都指的是连通区域。

如果在一个平面区域内，任意画一条闭曲线而使之逐渐缩小能成一点，就把这个区域叫做单连通域。如坐标面上被一个圆所包围的区域就是单连通域，介于两个同心圆间的区域就不是单连通域，不是单连通域的连通区域叫做复连通域。如图 6·01 中的左图是单连通域，右面两图都是复连通域。

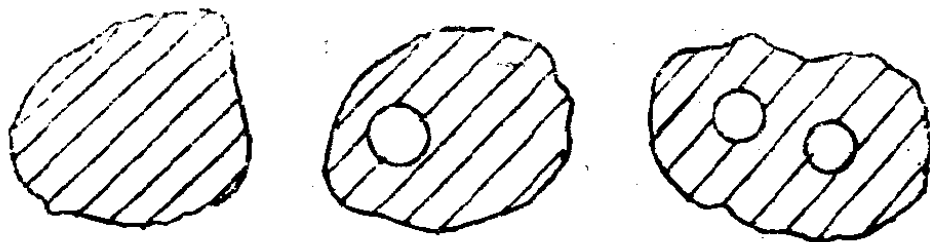


图 6·01

§6·02 多元函数

前面各章讨论了一个自变量的函数，但是在实际问题中常会遇到多个自变量同时影响一个因变量的情况。例如一定质量的理想气体的体积 V 和它的绝对温度 T 成正比，又和它所受的压强 P 成反比。这时， V 就是 T 和 P 两个自变量的函数

$$V = \frac{RT}{P},$$

其中的 R 是比例常数。又如长方体的体积 v 是长度 a ，宽度 b 和高度 h 的乘积。因此， v 是三个自变量的函数

$$v = abh.$$

在一个函数中，如果有 m 个自变量，就把它叫做 m 元函数。以后只重点地讨论二元函数和三元函数，至于三元以上的函数可以仿照二元和三元函数加以类推。

对多元函数的讨论，我们从叙述单值二元函数的定义开始。

定 义 在某一变化过程中，设有三个变量 x, y, z 。如果变量 x 和 y 在点 (x, y) 的集合 D 中变动，对 D 中任一点 (x, y) ，按照某一关系有唯一的 z 值与之对应，当 (x, y) 取遍 D 中各点时，设对应的 z 值构成一数集 R ，就把变量 z 叫做 x 和 y 在集合 D 上的二元函数。 x 和 y 都叫自变量，点 (x, y) 的集合 D 叫做函数 z 的定义域。数集 R 叫做函数 z 的值域。如果定义域是一个区域，就把它叫做定义区域。

和一元函数相类似，表示 x 和 y 的不相同的二元函数，可用 $f(x, y)$, $F(x, y)$, $\phi(x, y)$, $\psi(x, y)$ 等各种记号。有时也把因变量和函数记号用同一字母表示。例如当 u 是 x 和 y 的函数时，就写作 $u = u(x, y)$ ， v 是 x 和 y 的函数时，就写作 $v = v(x, y)$ 。

在给定一个函数 $f(x, y)$ 时，总是同时也给出它的定义域。但是，在给定函数的定义域是显然可知时，就不必写出来了。例如：函数

$$z = x^2 + y^2$$

的定义区域是 Oxy 直角坐标面，函数

$$z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

的定义区域是直角坐标面 Oxy 上在圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 以内的一切点的坐标的集合，函数

$$z = \arcsin \frac{x}{a} + \arcsin \frac{y}{b}$$

的定义区域是直角坐标面 Oxy 上以原点为圆心, 长为 $2a$ (和 x 轴平行) 宽为 $2b$ (和 y 轴平行) 的闭矩形区域, 也就是满足关系式 $-a \leq x \leq a$ 和 $-b \leq y \leq b$ 的一切点 (x, y) 的集合。

和二元函数相类似, 可定义三元函数。自变量为 x, y, z 的三元函数记为 $f(x, y, z), \phi(x, y, z), \psi(x, y, z)$ 等。当因变量和函数记号用同一字母表示时, 则记为 $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z)$ 等。

在 m 维空间中的区域 D 上所定义的 m 元函数的记号是 $f(x_1, x_2, \dots, x_m), \phi(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots$ 其中的 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 是 m 个自变量。

§6.03 多元函数的极限和连续性

我们只讨论二元函数的极限和连续性。二元以上的函数可以仿照二元函数的情况加以类推。

设有两个彼此无关的序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 就把下面的无穷多个有次序的点叫做一个点列

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$$

并记为 $\{(x_n, y_n)\}$ 。如果序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别收敛于 x_0 和 y_0 , 就把点 (x_0, y_0) 叫做点列 $\{(x_n, y_n)\}$ 的极限点。又如果序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是有界的, 就说点列 $\{(x_n, y_n)\}$ 是有界的。

定 义 设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义 (点 (x_0, y_0) 可除外)。又设 $\{\varepsilon'_n\}$ 和 $\{\varepsilon''_n\}$ 是任何两个彼此无关而又都收敛于 0 的序列, 但是 $\sqrt{(\varepsilon'_n)^2 + (\varepsilon''_n)^2} > 0$, 且点序列 $\{(x_0 + \varepsilon'_n, y_0 + \varepsilon''_n)\}$ 的一切点均在函数 $f(x, y)$ 的定义域中。如果序列 $\{f(x_0 + \varepsilon'_n, y_0 + \varepsilon''_n)\}$ 都收敛于同一常数 A , 就说函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的极限是 A , 或者说当点

(x, y) 趋于点 (x_0, y_0) 时, 函数 $f(x, y)$ 的极限是 A , 写做

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

或

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = A,$$

其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} > 0$, 也就是点 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 到点 (x_0, y_0) 的距离。如果常数 A 不存在, 就说函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的极限不存在。

上面所说的二元函数的极限定义是序列定义, 另外还可以用 ε - δ 语言叙述二元函数的极限定义如下。这两个定义是等价的。至于其等价性的证明, 和一元函数的情况类似, 故略而不证。

定 义 设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义(点 (x_0, y_0) 可除外)。如果能对于任何小的正数 ε , 就可以找到一个正数 δ , 当 (x, y) 是函数 $f(x, y)$ 的定义域以内的点, 并且当下式存在时

$$0 < \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

就有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

在这种情况下, 我们说函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的极限是 A 。

根据上述定义, 设

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \phi(x, y) = A, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \psi(x, y) = B,$$

则显然知道下面这三个计算公式都能成立:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} [\phi(x, y) \pm \psi(x, y)] = A \pm B, \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (\phi(x, y) \cdot \psi(x, y)) = A \cdot B, \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\phi(x, y)}{\psi(x, y)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0 \quad (3)$$

在上述定义中，如果令点 (x_0, y_0) 为点 p_0 ，令点 (x, y) 为点 p 。我们也有时把数 A 称为点 p 的函数 $f(p)$ ，在点 p_0 的极限，而记为

$$\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = A.$$

因此，如果令点 p 表示 m 维空间中的点 $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ，我们又常把 m 元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 记为 $f(p)$ 而把它叫做点 p 的函数。

定义 设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，又对于一个任何小的正数 ε ，就有一个正数 δ ，当 (x, y) 是函数 $f(x, y)$ 的定义域以内的点，并且 $|x - x_0| < \delta$ ， $|y - y_0| < \delta$ 时，又有下式存在

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

我们就说函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续。

这个定义也相当于在下式成立的情况下，就说函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0). \quad (4)$$

反之，如果(1)式不成立，就说 (x_0, y_0) 是函数 $f(x, y)$ 的不连续点或间断点。当函数 $f(x, y)$ 在某一区域 D 内的任何点都连续时，就说 $f(x, y)$ 是区域 D 上的连续函数。

下面再给出二元函数的一致连续性的定义。