等学校教材

数学分析

下册

王焕初 编著

西北工业大学出版社

高等学校教材

数学分析

下册

王焕初 编著

西北工业大学出版社

1989年3月 西安

高等学校教材

数学分析

[illegible]

王顺初 编著

责任辑编 刘[illegible]

责任校对 郭[illegible]

*

西北工业大学出版社出版

（西安市友谊西路127号）

陕西省新华书店发行

空军导弹学院印刷厂印装

ISBN 7-5612-0123-0/O·11（课）

*

开本787×1092毫米 1/32 7.75印张 175千字

1989年3月第1版 1989年3月第1次印刷

印数 1—2000册 定价：1.57元

前　言

本书是根据1980年高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会审订的“数学分析教学大纲”和工科数学课程教学指导委员会于1986年拟定并经国家教育委员会1987年批准的“高等数学课程教学基本要求”编写的。

书中的空间解析几何与常微分方程两部分，是工科“高等数学”课程的内容，其它均为理科“数学分析”课程的内容，标有“^{d}”的则是超出工科“高等数学”课程基本要求的内容。

本书从实数的完备性开始，由一元函数到多元函数，由函数的极限和连续性到函数的微分学和积分学，对于每一个新的理论，总是把它的来源叙述得清清楚楚，丝毫没有脱节之处。

本书内容和一般通用教材有许多不同之处。例如，曲线的弧长定义和曲面的面积定义是属于同一类型的数学问题，如果不用同一方法处理，就失去数学的概括性。因此，本书关于曲线弧长的定义与一般著作中所用的定义是不相同的，还有曲线的拐点问题，为了不至于把拐点和两侧凹凸情况相反的角点相混淆，本书关于拐点的定义也与一般著作中所用的定义是不相同的。又如，对几何学和物理学中的问题，在一般著述中，多从有关问题的近似值出发，以求出其计算公式。这就可能使读者因此而产生错误的思路，即：对事物的近似值求极限，就得到事物的真值。为了避免这种情况，本书舍弃了应用近似值这个途径，而直接从有关问题在几何学或物理学中的定义求出其真实结果，然后再推导出这个真实

结果的计算公式。

以上这些都是本书在理论上不同于一般著述之处。至于其它不同之处，就不缕述了。

本书完成初稿后，承蒙国家教委工科数学课程指导委员会委员孙家永教授予以审阅，并提出了不少宝贵意见，俾得修改定稿。但修改后，恐尚有不妥之处，敬希读者批评指正。

王焕初

1988年1月于西北工业大学

目　录

第六章　多元函数的微分学

§6·01　区　域

在坐标面上，把一部分平面中的一切点(x,y)的集合D叫做**平面区域**。当平面区域延伸到无限远处，就说它是**无界**的。否则，它总可以被包围在一个以原点为圆心而半径适当大的圆内，这样的区域叫做**有界**的，如果平面区域是由一条或几条线（直线或曲线）所围成，就把围成区域的线叫做该区域的**边界**。边界上的点叫做区域的**界点**，边界以内的点叫做区域的**内点**。包括一切界点和内点的区域叫做**闭区域**。只包括所有内点而不包括任何界点的区域叫做**开区域**。本书在以后所说平面区域的边界曲线，都指的是连续曲线与逐段光滑曲线（§2·19）。

例如，满足$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2$的一切点$(x,y)$的集合是一个平面闭区域，它的边界是圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$。满足$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$的一切点$(x,y)$的集合是一个平面开区域，它的边界也是圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$。这样的平面开区域称为点$(a,b)$的**圆形邻域**，而不论$r$是任何正数。

又如，满足$a-\delta_1\leqslant x\leqslant a+\delta_1$和$b-\delta_2\leqslant y\leqslant b+\delta_2$的一切点$(x,y)$的集合是一个平面闭区域，它的边界是由以下四条直线所构成矩形的四个边

$$x=a-\delta_1,\quad x=a+\delta_1,\quad y=b-\delta_2,\quad y=b+\delta_2. \tag{1}$$

我们把这个平面闭区域记为

$$[a-\delta_1,\ a+\delta_1;\ b-\delta_2,\ b+\delta_2].$$

满足$a-\delta_1<x<a+\delta_1$和$b-\delta_2<y<b+\delta_2$的一切点(x,y)

的集合是一个平面开区域，它的边界仍是（1）中四条直线所构成矩形的四条边。这个平面开区域又叫做点(a, b)的**矩形邻域**，记为

$$(a-\delta_1,\ a+\delta_1;\ b-\delta_2,\ b+\delta_2),$$

而不论δ_1，δ_2是任何正数。

平面上点(a, b)的矩形邻域和圆形邻域都简称为点(a, b)的**邻域**。

对空间中的区域来说，它的情况与平面区域的情况完全相同。例如，满足下式的一切点(x, y, z)的集合叫做点(a, b, c)的**球形邻域**

$$(x-a)^2+(y-b)^2-(z-c)^2<r^2,$$

其中的r可以是任何正数。满足下列各式的一切点(x, y, z)的集合叫做点(a, b, c)的**长方体邻域**

$$a-\delta_1<x<a+\delta_1,\quad b-\delta_2<y<b+\delta_2,$$
$$c-\delta_3<z<c+\delta_3,$$

记为

$$(a-\delta_1,\ a+\delta_1;\ b-\delta_2,\ b+\delta_2;\ c-\delta_3,\ c+\delta_3),$$

其中的δ_1，δ_2，δ_3可以是任何正数。以上两种邻域都简称为点(a, b, c)的邻域。

至于空间闭区域

$$a-\delta_1\leqslant x\leqslant a+\delta_1,\quad b-\delta_2\leqslant y\leqslant b+\delta_2,$$
$$c-\delta_3\leqslant z\leqslant c+\delta_3$$

则记为

$$[a-\delta_1,\ a+\delta_1;\ b-\delta_2,\ b+\delta_2;\ c-\delta_3,\ c+\delta_3].$$

在上述平面区域中的点(x, y)的坐标都是两个，因此把它叫做**二维空间**中的区域。又在上述空间区域中的点(x, y, z)的坐标都是三个。因此把它叫做**三维空间**中的区域。现在，略述m**维空间**中的一些情况于下，m是一个任何正整

数。

设有m个彼此无关的自变量x_1，x_2，…，x_m，就用下面的记号以表示m维空间中的任意一点P

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_m),$$

而不论x_1，x_2，…，x_m是任何实数，并且说x_i（$i=1, 2, \cdots, m$）是点P的第i个坐标。

在m维空间中，设有两点$A(a_1, a_2, \cdots, a_m)$和$B(b_1, b_2, \cdots, b_m)$，就用下式表示线段$\overline{AB}$的长度

$$\overline{AB}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(b_i-a_i)^2}.$$

又用下式作为直线AB的方程

$$\frac{x_1-a_1}{b_1-a_1}=\frac{x_2-a_2}{b_2-a_2}=\cdots=\frac{x_m-a_m}{b_m-a_m}$$

对m维空间中的区域来说，它的情况也与平面区域的情况完全相同。例如，满足下式的一切点$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$的集合，叫做点$(a_1, a_2, \cdots, a_m)$的球形邻域

$$(x_1+a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_m-a_m)^2<r^2,$$

其中的r可以是任何正数；满足下列各式的一切点$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$的集合，叫做点$(a_1, a_2, \cdots, a_m)$的长方体邻域

$$a_i-\delta_i<x_i<a_i+\delta_i, \quad i=1, 2, \cdots, m$$

记为

$$(a_1-\delta_1, a_1+\delta_1; a_2-\delta_2, a_2+\delta_2; \cdots, a_m-\delta_m, a_m+\delta_m),$$

其中的δ_1，δ_2，…，δ_m可以是任何正数。以上这两种邻域都简称为点$(a_1, a_2, \cdots, a_m)$的邻域。

如果对区域中的任何两点，都可用一条全部位于区域内的折线联结起来，就把这样区域叫做连通区域。以后所说的

区域都指的是连通区域。

如果在一个平面区域内，任意画一条闭曲线而使之逐渐缩小能成一点，就把这个区域叫做**单连通域**。如坐标面上被一个圆所包围的区域就是单连通域，介于两个同心圆间的区域就不是单连通域，不是单连通域的连通区域叫做**复连通域**。如图 6·01 中的左图是单连通域，右面两图都是复连通域。

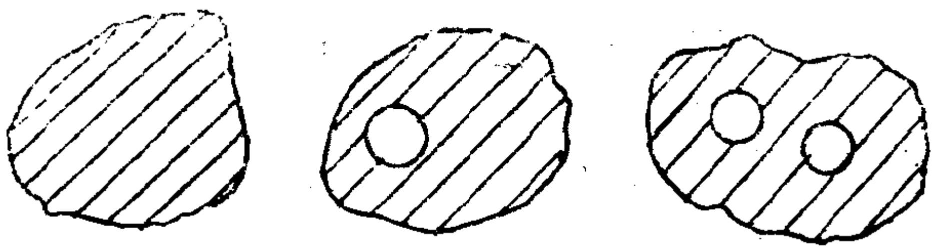

图 6·01

§6·02 多元函数

前面各章讨论了一个自变量的函数，但是在实际问题中常会遇到多个自变量同时影响一个因变量的情况。例如一定质量的理想气体的体积V和它的绝对温度T成正比，又和它所受的压强P成反比。这时，V就是T和P两个自变量的函数

$$V=\frac{RT}{P},$$

其中的R是比例常数。又如长方体的体积v是长度a，宽度b和高度h的乘积。因此，v是三个自变量的函数

$$v=abh.$$

在一个函数中，如果有m个自变量，就把它叫做m元函数。以后只重点地讨论二元函数和三元函数，至于三元以上的函数可以仿照二元和三元函数加以类推。

对多元函数的讨论，我们从叙述单值二元函数的定义开始。

定 义 在某一变化过程中，设有三个变量x,y,z。如果变量x和y在点(x, y)的集合D中变动，对D中任一点(x,y)，按照某一关系有唯一的z值与之对应，当(x,y)取遍D中各点时，设对应的z值构成一数集R，就把变量z叫做x和y在集合D上的二元函数。x和y都叫自变量，点(x, y)的集合D叫做函数z的定义域。数集R叫做函数z的值域。如果定义域是一个区域，就把它叫做定义区域。

和一元函数相类似，表示x和y的不相同的二元函数，可用$f(x, y)$，$F(x, y)$，$\phi(x, y)$，$\psi(x, y)$等各种记号。有时也把因变量和函数记号用同一字母表示。例如当u是x和y的函数时，就写作$u=u(x, y)$，v是x和y的函数时，就写作$v=v(x, y)$。

在给定一个函数$f(x, y)$时，总是同时也给出它的定义域。但是，在给定函数的定义域是显然可知时，就不必写出了。例如：函数

$$z=x^2+y^2$$

的定义区域是Oxy直角坐标面，函数

$$z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

的定义区域是直角坐标面Oxy上在圆周$x^2+y^2=1$以内的一切点的坐标的集合，函数

$$z=\arcsin\frac{x}{a}+\arcsin\frac{y}{b}$$

的定义区域是直角坐标面Oxy上以原点为圆心，长为$2a$（和x轴平行）宽为$2b$（和y轴平行）的闭矩形区域，也就是满足关系式$-a\leqslant x\leqslant a$和$-b\leqslant y\leqslant b$的一切点(x, y)的集合。

和二元函数相类似，可定义三元函数。自变量为x，y，z的三元函数记为$f(x, y, z)$，$\phi(x, y, z)$，$\psi(x, y, z)$等。当因变量和函数记号用同一字母表示时，则记为$u=u(x, y, z)$；$v=v(x, y, z)$，$w=w(x, y, z)$等。

在m维空间中的区域D上所定义的m元函数的记号是

$f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，…其中的$x_1$，$x_2$，…，$x_m$是$m$个自变量。

§6·03 多元函数的极限和连续性

我们只讨论二元函数的极限和连续性。二元以上的函数可以仿照二元函数的情况加以类推。

设有两个彼此无关的序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，就把下面的无穷多个有次序的点叫做一个**点列**

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n), \cdots$$

并记为$\{(x_n, y_n)\}$。如果序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$分别收敛于x_0和y_0，就把点(x_0, y_0)叫做点列$\{(x_n, y_n)\}$的**极限点**。又如果序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是有界的，就说点列$\{(x_n, y_n)\}$是有界的。

定 义 设函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义（点(x_0, y_0)可除外）。又设$\{\varepsilon'_n\}$和$\{\varepsilon''_n\}$是任何两个彼此无关而又都收敛于0的序列，但是$\sqrt{(\varepsilon'_n)^2+(\varepsilon''_n)^2}>0$，且点序列$\{(x_0+\varepsilon'_n, y_0+\varepsilon''_n)\}$的一切点均在函数$f(x, y)$的定义域中。如果序列$\{f(x_0+\varepsilon'_n, y_0+\varepsilon''_n)\}$都收敛于同一常数$A$，就说函数$f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$的极限是$A$，或者说当点

(x, y)趋于点(x_0, y_0)时，函数$f(x, y)$的极限是A，写做

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A$$

或
$$\lim_{\rho\to 0} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=A,$$

其中$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}>0$，也就是点$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$到点$(x_0, y_0)$的距离。如果常数$A$不存在，就说函数$f(x,y)$在点$(x_0, y_0)$的极限不存在。

上面所说的二元函数的极限定义是序列定义，另外还可以用ε-δ语言叙述二元函数的极限定义如下。这两个定义是等价的。至于其等价性的证明，和一元函数的情况类似，故略而不证。

定　义　设函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义（点(x_0, y_0)可除外）。如果能对于任何小的正数ε，就可以找到一个正数δ，当(x, y)是函数$f(x, y)$的定义域以内的点，并且当下式存在时

$$0<\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,$$

就有
$$|f(x, y)-A|<\varepsilon.$$

在这种情况下，我们说函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)的极限是A。

根据上述定义，设

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \phi(x, y)=A, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \psi(x, y)=B,$$

则显然知道下面这三个计算公式都能成立：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [\phi(x, y)\pm\psi(x, y)]=A\pm B, \tag{1}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}[\phi(x,\ y)\cdot\psi(x,\ y)]=A\cdot B, \tag{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\frac{\phi(x,\ y)}{\psi(x,\ y)}=\frac{A}{B},\quad B\neq 0 \tag{3}$$

在上述定义中，如果令点$(x_0,\ y_0)$为点p_0，令点$(x,\ y)$为点p。我们也有时把数A称为点p的函数$f(p)$，在点p_0的极限，而记为

$$\lim_{p\to p_0}f(p)=A\ .$$

因此，如果令点p表示m维空间中的点$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，我们又常把m元函数$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$记为$f(p)$而把它叫做点$p$的函数。

定　义　设函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，又对于一个任何小的正数ε，就有一个正数δ，当(x,y)是函数$f(x,y)$的定义域以内的点，并且$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$时，又有下式存在

$$|f(x,\ y)-f(x_0,\ y_0)|<\varepsilon.$$

我们就说函数$f(x,\ y)$在点$(x_0,\ y_0)$连续。

这个定义也相当于在下式成立的情况下，就说函数$f(x,y)$在点$(x_0,\ y_0)$连续

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0). \tag{4}$$

反之，如果(1)式不成立，就说$(x_0,\ y_0)$是函数$f(x,\ y)$的不连续点或间断点。当函数$f(x,\ y)$在某一区域D内的任何点都连续时，就说$f(x,\ y)$是区域D上的连续函数。

下面再给出二元函数的一致连续性的定义。