群论

QUN LUN

〔美〕M.赫尔 著

出版社

群　论

〔美〕M. 赫尔 著

裘光明 译

科 学 出 版 社

1 9 8 1

内 容 简 介

本书前十章为群论的基本知识，每章末尾还附有习题；后十章讲述群论中若干专门的问题，可以作为群论方面的选修课或专门化课的参考资料．

本书可供大学和师范学院数学系学生阅读；物理系学生也可从本书读到群表示理论的必要的初步知识．此外，还可供一般数学工作者和对群论有兴趣的其他科学工作者参考．

Marshall Hall, Jr.

THE THEORY OF GROUPS

The Macmillan Company

群 论

〔美〕M. 赫尔 著

裘光明 译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981 年 3 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1981 年 3 月第一次印刷 印张：16

印数：0001—8,100 字数：364,000

统一书号：13031・1494

本社书号：2056・13—1

定价： 2.45 元

序

编写本书有双重的目的．前十章可以作为群论课程的基础，因而每章末尾都有习题．后十章可以用作选修课材料或参考资料．本书用作课本时，要求学生具有近世代数入门课程的知识，即相当于勃霍夫和麦克兰的《近世代数概论》(Birkhoff and MacLane [1]) 的内容[1]．我尽可能使本书是独立的，凡是需要预备知识的地方，都给出了参考文献，主要是勃霍夫和麦克兰的书．

当代群论方面的研究是活跃的和广泛的，这可以从《数学评论》(Mathematical Reviews) 上刊载的文章来证实．要想概括全部主题或列举完全的文献，是不太可能的．因此我在很大程度上根据自己的兴趣来选择讨论的主题，参考文献也只限于列出本书所参考的．某些很重要课题的详细研究在新近的出版物中是很容易找到的，所以对于这些课题的论述我就力求精简．关于无限阿贝尔群的详细讨论，读者可以参考库罗什的《群论》[Kurosch (Курош)[2]][2] 和卡泼伦斯基的专著《无限阿贝尔群》(Kaplansky[1]) 的适当部分．同属于爱尔格勃尼色丛书 (Ergebnisse series) 的铃木通夫的《群的结构及其子群的格的结构》(Suzuki[1]) 及柯克色特和摩色尔的《离散群的生成元素和关系》(Coxeter and Moser, Generators

---

1) 学过高等代数的读者，只要再具有张禾瑞著《近世代数》一书的知识．——译者

2) 有中译本：А. Г. 库罗什，群论，人民教育出版社，1964．——译者

and Relations for Discrete Groups)[1]，可以供希望进一步研究这些课题的读者参考。

本书是从我在俄亥俄州立大学多年的群论课程的讲稿发展而成的。本书的主要部分是1956年在剑桥的三一学院写的。（下略）

M. 赫 尔

于俄亥俄州哥伦布城

1）这本书未列在书末文献中。——译者

目　　录

第一章　引论 …… 1
1.1. 代数定律 …… 1
1.2. 映射 …… 2
1.3. 群和若干有关体系的定义 …… 5
1.4. 子群，同构，同态 …… 9
1.5. 傍系．拉格朗日定理．循环群．指数 …… 12
1.6. 共轭者和共轭类 …… 16
1.7. 二重傍系 …… 17
1.8. 关于无限群的附注 …… 19
1.9. 群的例子 …… 23
第二章　正规子群和同态 …… 30
2.1. 正规子群 …… 30
2.2. 同态的核 …… 31
2.3. 商群 …… 31
2.4. 算子 …… 34
2.5. 直积和笛卡儿乘积 …… 37
第三章　阿贝尔群初步 …… 40
3.1. 阿贝尔群的定义．循环群 …… 40
3.2. 关于阿贝尔群构造的若干定理 …… 41
3.3. 有限阿贝尔群．不变量 …… 46
第四章　西罗定理 …… 50
4.1. 拉格朗日定理的逆定理不成立 …… 50
4.2. 三个西罗定理 …… 51
4.3. 有限 p 群 …… 55
4.4. 阶为 p, p^2, pq, p^3 的群 …… 57

第五章　置换群 ································ 62
5.1. 圈 ································ 62
5.2. 传递性 ································ 64
5.3. 用置换表示群 ································ 66
5.4. 交替群 A_n ································ 69
5.5. 不传递群. 次直积 ································ 73
5.6. 本原群 ································ 75
5.7. 多重传递群 ································ 79
5.8. 约当定理 ································ 84
5.9. 织积. 对称群的西罗子群 ································ 94
第六章　自同构 ································ 98
6.1. 代数体系的自同构 ································ 98
6.2. 群的自同构. 内自同构 ································ 98
6.3. 群的全形 ································ 100
6.4. 完备群 ································ 102
6.5. 正规乘积(或半直积) ································ 102
第七章　自由群 ································ 106
7.1. 自由群的定义 ································ 106
7.2. 自由群的子群. 施赖尔方法 ································ 109
7.3. 自由群的子群的自由生成元素. 臬尔逊方法 ································ 124
第八章　格和合成序列 ································ 134
8.1. 偏序集合 ································ 134
8.2. 格 ································ 135
8.3. 模格和半模格 ································ 137
8.4. 主序列和合成序列 ································ 143
8.5. 直接分解 ································ 148
8.6. 群中的合成序列 ································ 152
第九章　弗洛贝尼定理；可解群 ································ 157
9.1. 弗洛贝尼定理 ································ 157
9.2. 可解群 ································ 159

9.3. 关于可解群的推广的西罗定理 …………………………… 162
9.4. 关于可解群的进一步的结果 ………………………………… 167
第十章 超可解群和幂零群………………………………………… 172
10.1. 定义 ………………………………………………………… 172
10.2. 下和上中心序列 …………………………………………… 172
10.3. 幂零群的理论 ……………………………………………… 176
10.4. 群的弗拉梯尼子群 ………………………………………… 180
10.5. 超可解群 …………………………………………………… 182
第十一章 基本换位子……………………………………………… 190
11.1. 集积过程 …………………………………………………… 190
11.2. 维特公式. 基底定理 ……………………………………… 193
第十二章 p群理论；正则p群………………………………… 203
12.1. 初步结果 …………………………………………………… 203
12.2. 伯恩赛德基底定理. p群的自同构 …………………… 203
12.3. 集积公式 …………………………………………………… 205
12.4. 正则p群 ………………………………………………… 211
12.5. 一些特殊p群. 哈密尔顿群 …………………………… 215
第十三章 阿贝尔群理论的继续………………………………… 223
13.1. 加法群. 群取模1 ………………………………………… 223
13.2. 阿贝尔群的特征标. 阿贝尔群的对偶 ………………… 224
13.3. 可除群 ……………………………………………………… 227
13.4. 纯子群 ……………………………………………………… 228
13.5. 一般注解 …………………………………………………… 230
第十四章 单项表示和转移………………………………………… 231
14.1. 单项置换 …………………………………………………… 231
14.2. 转移 ………………………………………………………… 233
14.3. 伯恩赛德定理 ……………………………………………… 235
14.4. P. 赫尔、格润和维兰德的定理 …………………………… 237
第十五章 群的扩张和群的上同调………………………………… 252
15.1. 正规子群和商群的合成 …………………………………… 252

15.2. 中心扩张 …………………………………………………… 256
15.3. 循环扩张 …………………………………………………… 259
15.4. 定义关系和扩张 ………………………………………… 260
15.5. 群环和中心扩张 ………………………………………… 263
15.6. 二重模 ……………………………………………………… 270
15.7. 上链，上边缘和上同调群 ……………………………… 271
15.8. 上同调对扩张理论的应用 ……………………………… 276
第十六章 群的表示…………………………………………… 284
16.1. 一般注解 …………………………………………………… 284
16.2. 矩阵表示. 特征标 ………………………………………… 285
16.3. 完全可约性定理 ………………………………………… 289
16.4. 半单纯的群环和普通表示 ……………………………… 293
16.5. 绝对不可约表示. 单纯环的结构 ……………………… 300
16.6. 在普通特征标之间的关系 ……………………………… 307
16.7. 非本原表示 ………………………………………………… 322
16.8. 特征标理论的若干应用 ………………………………… 327
16.9. 酉表示和正交表示 ……………………………………… 337
16.10. 群表示的几个例子 ……………………………………… 341
第十七章 自由乘积和共合乘积……………………………… 356
17.1. 自由乘积的定义 ………………………………………… 356
17.2. 共合乘积 …………………………………………………… 358
17.3. 库罗什定理 ………………………………………………… 360
第十八章 伯恩赛德问题……………………………………… 367
18.1. 问题的表述 ………………………………………………… 367
18.2. $n=2$ 和 $n=3$ 时的伯恩赛德问题…………………………… 367
18.3. $B(4,r)$ 的有限性 ………………………………………… 372
18.4. 局限的伯恩赛德问题. P.赫尔和希格曼的定理.
$B(6,r)$ 的有限性 ………………………………………… 373
第十九章 子群的格…………………………………………… 389
19.1. 一般性质 …………………………………………………… 389

19.2. 局部循环群和分配格 …………………………… 390
19.3. 岩泽定理 ……………………………………… 392
第二十章 群论和射影平面……………………………… 397
20.1. 公理 ………………………………………… 397
20.2. 直射和德沙格定理 ………………………… 400
20.3. 坐标的导入 ………………………………… 405
20.4. 韦勃伦-魏德本体系. 赫尔体系……………… 408
20.5. 茂芳平面和德沙格平面 …………………… 420
20.6. 魏德本定理和阿廷-左恩定理 …………… 431
20.7. 二重传递群和准域 ………………………… 439
20.8. 有限平面. 勃鲁克-累色尔定理 …………… 450
20.9. 有限平面的直射 …………………………… 457
参考文献……………………………………………… 483
索引…………………………………………………… 491
人名索引……………………………………………… 497
特殊记号索引………………………………………… 499

第一章 引 论

1.1. 代数定律

代数学有很大一部分是探讨元素的体系的，这些元素象数一样，可以用加法或乘法或同时用两者把它们结合起来．设给定一个由字母 $a, b, c, \cdots$ 表示的元素的体系．我们把这个体系记做 $S = S(a, b, c, \cdots)$．这种体系的性质取决于下列基本定律中有哪一些成立：

闭合律	$A0$. 加法有意义.	$M0$. 乘法有意义.

这就是说，对于 S 的每一对有序的元素 a 和 b，$a + b = c$ 存在而且是 S 的唯一的元素，又 $ab = d$ 也存在而且是 S 的唯一的元素．

结合律	$A1$. $(a + b) + c = a + (b + c)$.	$M1$. $(ab)c = a(bc)$.
交换律	$A2$. $b + a = a + b$.	$M2$. $ba = ab$.
零和单位元素	$A3$. 0 存在，使得对于所有的 a 都有 $0 + a = a + 0 = a$.	$M3$. 1 存在，使得对于所有的 a 都有 $1a = a1 = a$.
负和逆	$A4$. 对于每个	$M4$.[1] 对于每个

1）这里提出的 $M4$ 的表述适用于加法和乘法都有意义的体系． 如果加法没有意义，因而在 S 内没有 0，那么这定律可以改写成：“对于每个 a，a^{-1} 存在，使得 $(a^{-1})a = a(a^{-1}) = 1$.”

		a，$-a$存在，使得 $(-a)+a=a+(-a)=0$.	$a\neq 0$，a^{-1} 存在，使得 $(a^{-1})a=a(a^{-1})=1$.
分配律	D1.	$a(b+c)=ab+ac$.	
	D2.	$(b+c)a=ba+ca$.	

定义. 满足所有这些定律的体系叫做域. 满足 $A0, A1, A2, A3, A4, M0, M1$ 和$D1, D2$ 的体系叫做环.

值得指出，除去在 $M4$ 中 0 的逆不存在以外，$A0$-$A4$ 和 $M0$-$M4$ 是完全平行的. 然而在分配律中，加法和乘法是绝然不同的. 加法和乘法之间的这种平行性可以用对数来说明. 在对数理论里，加法和乘法之间的基本的对应关系是以下的公式:

$$\log(xy)=\log x+\log y.$$

一般地说，集合 S 的一个 n 元运算是以 S 的元素 $a_1, \cdots, a_n$ 为元的 n 元函数$f=f(a_1, \cdots, a_n)$，当 f 对于这些元有定义时，它的值 $f(a_1, \cdots, a_n)=b$ 是 S 的唯一的元素. 如果对于在 S 中任意选取的 $a_1, \cdots, a_n$，$f(a_1, \cdots, a_n)$ 都有定义，我们就说运算 f 在 S 上有意义或者说集合 S 对于运算 f 来说是闭合的.

在域 F 内，加法和乘法都是有意义的二元运算，而逆运算 $f(a)=a^{-1}$ 则是对于除零外的所有元素都有意义的一元运算.

1.2. 映　射

从一个集合 S 到一个集合 T 的映射是现代数学中的一个

非常基本的概念.

定义. 从集合 S 到集合 T 的映射 α 是对于集合 S 的每个元素 x 指定集合 T 的唯一元素 y 的一个规则. 我们把它记做:

$$\alpha: x \to y \quad 或 \quad y = (x)\alpha.$$

元素 y 叫做 x 在 α 下的像. 如果集合 T 的每个 y 至少是 S 中一个 x 的像, 则就说 α 是从 S 到 T 上[1]的映射.

从一个集合到自身的映射是特别重要的. 例如平面的旋转可以看作是从平面的点集到自身上的映射. 按照以下的定义, 从集合 S 到自身的两个映射 α 和 β 可以结合起来而产生从 S 到自身的第三个映射.

定义. 给定从集合 S 到自身的两个映射 α 和 β, 我们用以下规则定义从 S 到自身的第三个映射 γ, 如果 $y = (x)\alpha$ 而且 $z = (y)\beta$, 则 $z = (x)\gamma$. 映射 γ 叫做 α 和 β 的乘积而且记做 $\gamma = \alpha\beta$.

这时因为 $y = (x)\alpha$ 和 $z = (y)\beta$ 都是唯一的, 所以 $z = [(x)\alpha]\beta = (x)\gamma$ 对于 S 的每个 x 都有意义而且是 S 的唯一的元素.

定理 1.2.1. 如果用映射的乘积来定义乘法, 则从集合 S 到自身的全体映射满足 $M0$, $M1$ 和 $M3$.

证明. 上面已经说过 $M0$ 是成立的. 让我们来讨论 $M1$. 设 α, β, γ 是三个已知映射. 取 S 的任意元素 x 而且设 $y = (x)\alpha$, $z = (y)\beta$ 和 $w = (z)\gamma$. 那么 $(x)[(\alpha\beta)\gamma] = (z)\gamma = w$, 而且 $(x)[\alpha(\beta\gamma)] = (y)(\beta\gamma) = w$. 因为两个映射 $(\alpha\beta)\gamma$ 和 $\alpha(\beta\gamma)$ 对于 S 的每个 x 都给出相同的像, 所以 $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

---

1) 请读者注意"从 S 到 (into) T 的映射"和"从 S 到 T 上 (onto) 的映射"的区别. ——译者

为了证明 $M3$ 成立，设 1 是对于 S 的每个 x 使 $(x)\ 1 = x$ 的映射. 那么 1 在下列意义下就是一个单位元素：对于任何映射 α，$\alpha 1 = 1\alpha = \alpha$.

一般地说，$M2$ 和 $M4$ 对于映射不一定成立. 但是对于一类重要的映射，即从 S 到自身上的一一映射，$M4$ 成立.

定义. 从集合 S 到集合 T 上的映射 α 叫做一一的（我们常常把它记做 1—1），如果 T 的每个元素恰好是 S 的一个元素的像. 我们把这样的映射记做：$\alpha: x \rightleftarrows y$，这里 x 是 S 的元素，y 是 T 的元素. 这时我们说 S 和 T 的元素的基数[1] 相同.

定理 1.2.2. 从集合 S 到自身上的全体一一映射满足 $M0$，$M1$，$M3$ 和 $M4$.

证明. 因为定理 1.2.1 包括了 $M0$，$M1$ 和 $M3$，我们只要验证 $M4$. 如果 $\alpha: x \rightleftarrows y$ 是从 S 到自身上的一一映射，则根据定义，对于 S 的每个 y，恰好存在 S 的一个 x 使得 $y = (x)\alpha$. 这样对于每个 y 就规定了唯一的 x，这个规定决定了从 S 到自身上的一个一一映射 $\tau: y \rightleftarrows x$. 从 τ 的定义得出，对于 S 的每个 x，$(x)(\alpha\tau) = x$，又对于 S 的每个 y，$(y)(\tau\alpha) = y$. 因此 $\alpha\tau = \tau\alpha = 1$，因而 τ 是具有 $M4$ 中 α^{-1} 的性质的映射.

我们把从一个集合到它自身上的一一映射叫做置换. 要是已知集合是有限的，为了表示一个置换，可以把这集合的元素排成一行而且把它们的像记在下面. 因而 $\alpha = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix}$

1）关于基数的讨论，参看 Birkhoff and MacLane[1]，第 356 页. 这个概念以及本书中其他类似于它的概念都请参考所提出的文献.（译者按：集合的元素的基数也叫做集合的势.）

和$\beta=\begin{pmatrix}1,2,3\\1,3,2\end{pmatrix}$是集合$S(1,2,3)$的两个置换．它们的乘积就定义为置换 $\alpha\beta=\begin{pmatrix}1,2,3\\3,2,1\end{pmatrix}$．注意这里给出的置换相乘的规则是从左到右的．有些作者定义置换乘积是从右到左地相乘的．

1.3. 群和若干有关体系的定义

我们看到，作为单个的运算，加法和乘法满足同样一些定律．这些定律除交换律外，还都被从一个集合到自身上的一一映射的相乘规则所满足．这些一一映射所服从的定律正是我们用来定义群的定律．

定义（群的第一个定义）．群G是这样的元素集合$G(a, b, c, \cdots)$，它具有叫做“乘法”的一个二元运算，满足：

$G0$．闭合律．对于G的每一对有序的元素a和b，乘积$ab=c$存在而且是G的唯一的元素．

$G1$．结合律．$(ab)c=a(bc)$．

$G2$．单位元素的存在．存在元素1，使得对于G的每个a，都有$1a=a1=a$．

$G3$．逆的存在．对于G的每个a，存在G的元素a^{-1}，使得$a^{-1}a=aa^{-1}=1$．

这些定律中有多余的．我们可以略去$G2$和$G3$的一半，而把它们换成：

$G2^*$．存在元素1，使得对于G的每个a，$1a=a$．

$G3^*$．对于G的每个a，存在G的元素x，使得$xa=1$．

让我们来证明从这两个定律可以导出$G2$和$G3$．对于已知的a，根据$G3^*$，设

$$xa = 1 \quad 和 \quad yx = 1.$$

于是我们有

$$ax=1(ax)=(yx)(ax)=y[x(ax)]=y[1x]=yx=1,$$

因而 $G3$ 成立．再有，

$$a = 1a = (ax)a = a(xa) = a1,$$

因而 $G2$ 也成立．

单位元素 1 和逆 a^{-1} 的唯一性很容易确立（参看习题 13）．我们当然还可以把 $G2$ 和 $G3$ 换成这样的假设：使得 $a1 = a$ 和 $ax = 1$ 的 1 和 x 存在．但是如果假设它们满足 $a1 = a$ 和 $xa = 1$，情况就有些不同[1]．

可以有好多种方法把一个序列 $a_1a_2\cdots a_n$ 加括弧以便逐步用二元乘积来计算它的值．当 $n = 3$ 时恰好有两种加括弧的方法，那就是 $(a_1a_2)a_3$ 和 $a_1(a_2a_3)$，而结合律断定这两个乘积是相等的．结合律的一个重要的推论是广义结合律．

把序列 $a_1a_2\cdots a_n$ 加括弧以便逐步用二元乘积来计算它的值的所有各种方法产生同样的一个值．

对 n 施行归纳法，容易证明广义结合律是结合律的推论（参看习题 1）．

可以给出另一个定义，它并未明白地假设单位元素的存在．

定义（群的第二个定义）．群 G 是这样的元素集合 $G(a, b, c, \cdots)$．它满足：

1）对于 G 的每一对有序的元素 a 和 b，二元乘积 ab 有定义，使得 $ab = c$ 是 G 的唯一的元素．

2）对于 G 的每个元素 a，一元运算"逆" a^{-1} 有定义，使得 a^{-1} 是 G 的唯一的元素．

1）参看H. B. Mann[1]．

3) 结合律. $(ab)c = a(bc)$.

4) 逆律. $a^{-1}(ab) = b = (ba)a^{-1}$.

容易验证满足第一个定义的全体公理的任何集合也满足第二个定义的公理. 为了证明逆命题，假设第二个定义的公理成立，考虑下面的等式:

$$a^{-1}a = [(a^{-1}a)b]b^{-1} = (a^{-1}a)(bb^{-1})$$
$$= a^{-1}[a(bb^{-1})] = bb^{-1}.$$

当 $a = b$ 时我们有 $a^{-1}a = aa^{-1}$, 因而对于 G 的每个 a, 元素 $a^{-1}a = aa^{-1}$ 是相同的. 我们把这个元素叫做"1", 于是 $G3$ 成立. 再有,

$$1b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = b,$$

和

$$b1 = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = b,$$

即 $G2$ 也成立. 因此群的两个定义是等价的.

还有群的第三个定义如下:

定义（群的第三个定义）. 群 G 是这样的元素集合 $G(a, b, \cdots)$, 它具有二元运算 a/b, 满足:

$L0$. 对于 G 的每一对有序的元素 a 和 b, a/b 有定义, 使得 $a/b = c$ 是 G 的唯一的元素.

$L1$. $a/a = b/b$.

$L2$. $a/(b/b) = a$.

$L3$. $(a/a)/(b/c) = c/b$.

$L4$. $(a/c)/(b/c) = a/b$.

利用这个运算, 我们用下列规则定义一元运算——逆 b^{-1}:

$$b^{-1} = (b/b)/b.$$

于是利用 $L3$ 和 $L2$, 我们有

$$(b^{-1})^{-1} = (b^{-1}/b^{-1})/b^{-1} = (b^{-1}/b^{-1})/[(b/b)/b]$$
$$= b/(b/b) = b.$$