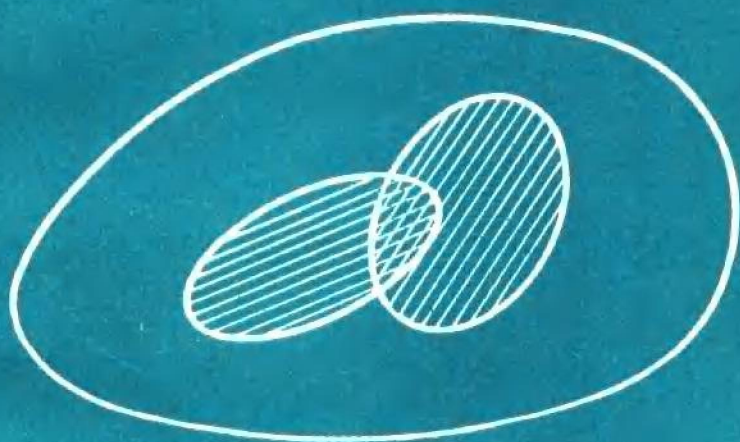


地理数学

[英] GRAHAM N. SUMNER 著

张 宝 光 译



地理数学

[英] G. N. Sumner 著

张宝光译

高等教育出版社

地理数学

【英】G. N. Sumner 著

张宝光译

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

国营五二三厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 10.25 字数 240,000

1982年11月 第1版 1984年1月第1次印刷

印数 00,001—5,150

书号 12010·029 定价 1.60 元

译者前言

随着科学技术的不断发展, 自然科学各学科间相互渗透日益深入。目前, 由于数学广泛渗透到地理学领域, 现代地理学已逐渐过渡到定量分析、定位试验和预测未来的阶段。

因此, 地理学界对数学书籍的需求日益增长。然而现有的数学书籍大多面向数学专业或工科专业的需要, 而现在出版的《地理数学》中译本可以填补这方面的空缺。

本书原名虽然是《自然地理工作者实用数学》, 但实际上并未纯粹以自然地理工作者为限, 故本译本取名《地理数学》似更妥当些。

本书既适合于自然地理工作者, 也适合于经济地理工作者使用, 当然也可供综合大学和高等师范院校地理专业教师教学和学生自修之用。

本书结合地理学实践, 依次讨论了向量代数、矩阵代数、微分、导数、级数、概率论、积分和微分方程。

学习本书有助于读者阅读国内外现代地理学书刊文献。本书还可为读者学习计量地理学提供必要且充分的数学基础, 并为读者把数学应用到地理学研究提供一些有益的范例。

本书文字简洁明晰, 并列有较多的地理实例, 每章均附有习题, 书后还附有答案, 可供自修者参考。

由于水平所限, 译文欠妥之处, 在所难免, 敬请读者批评指正。

本译稿承蒙天津市地理学会、天津师范大学地理系和人民教育出版社大学地理编辑组同志们的大力支持, 特别是陈树生主任审阅了全稿, 提出了许多宝贵意见, 谨此表示衷心的感谢! 此外, 张梗泛同志为译文定稿也做了大量的工作, 在此亦顺致谢意。

1982年8月

序 言

数学对于整个科学研究说来是很重要的，并且前者常常蕴含于后者之中。自然地理学是试图分析各种关系、确立统计规律或科学规律用以预测未来类似事件出现的一门科学。因此，自然地理学是这样一门科学分支，它研究的对象乃是各种变化、引起变化的各种过程以及这些变化的发生速度和这些过程的进行速度。通过野外或室内实验来确立各种关系，然后将这些关系再发展成为科学规律，这样就能够以给定的精度对类似事件的出现进行预测。数学能够为确切地描述各种观察到的关系和作出预测提供基础。如对预测精度没有把握时（这是自然地理学中常有的情形），预测本身就全靠运用统计学定律了。而统计学定律又都是以数学语言表达的。可见，如果自然地理学被认为是一门“真正的”科学的话，那么掌握和运用数学就是自然地理学的基础了。

自然地理研究的统计部分是很重要的一部分。我们往往不能唯一地确立自然地理中两个参数之间的关系，因为常常不知不觉地会出现很多的“干扰”，致使这种关系对预测来说成为不确定的。这种“干扰”，既来自对已考虑的参数而言为外在的其他参数的影响，又来自实验室中使用仪器不适当、观察结果不准确这些为自然地理工作者所熟知的外界因素。因此，在讨论函数论（第三章和第五章），即各种关系的数学表达方式的时候，假定部分读者对一些统计学概念和方法已经有所了解，因为本书毕竟不是一本统计学教科书。这虽然令人遗憾，但是也只能如此。如果读者对基本统计学毫无所知，那么可以参阅本书统计学附录（附录五）和一些有关的基本统计学教科书

第三章和第五章大概是全书最重要的两章。确定数学函数，以描述各种观察到的关系，这意味着对所研究的现象建立数学模型已经完成了一多半。函数一经确立，就能够借助于函数的导数（第五章）来研究一个参数随另一个参数而变化的速率，并且还可以通过取函数的积分（第八章）进而获得一个参数对另一个参数的累积作用这一概念。然而已经看到，确立了的各·种·关·系·往·往·都·是·不·可·靠·的·，因此，概率论知识乃是自然地理工作者必不可少的数学知识中重要的一部分。这一方面的问题在第七章讨论。

然而，自然地理工作者经常涉及自然环境中各种整体系统的模拟。近几年来，在自然地理学教科书中最常见的这种系统是生态系统和流域水分循环系统。以考察水量通过流域水分循环系统的历程为例。由于降水结果而形成的该系统来水量会有各种各样的结局。而水量通过流域的方式亦是多种多样的，例如河川径流、潜水径流或表面径流。各种径流的发生速率也各不相同，从很快的（河川径流）到很慢的（土壤水的分子输送），并且分别体现了各种过程的最终结果。全部水量通过蒸发、蒸腾、消耗于地下水或流域口的直接排泄而终究形成流域输水量。这种系统内的水情动态可以用数学方法加以描述。我们知道，在一定的时期内，流域的来水量与输水量总要保持平衡，否则就会逐渐泛滥或者干涸。这里会有一个函数，其各个元素分别描述不同过程的结果：渗流、明渠径流等。而所有这些元素又都能够以径流率来表示，并给出一个一元微分方程。微分方程的解在本书最后一章讨论。当然，流域概念还需要空间变化分析。通过图象描述空间变化是一个简单的数学问题。如果把图象坐标（第一章）扩展到矩阵（第四章），再到动态空间（运动），那么，向量知识（第二章）就成了自然地理工作者的数学食粮中的另一重要部分。

诚然，数学并不是自然地理科学工作的唯一的重要支柱。科

学方法和物理化学定律的运用也同样重要。数学还是物理和化学以及所有其他相关学科的一个重要部分。读者在本书中到处可以找到对本书姐妹篇——D. A. 戴维森(Davidson)著“*Science for Physical Geographers*”一书的援引。这两部教科书都运用了给地理系各年级学生讲授各级自然地理学的经验。地理系学生主要具备文科基础知识，并且其中有许多学生往往以为理科和数学似乎难学，其实这只不过是一种心理作用，并不是先天无能学好这方面的内容。数学跟语言一样，并不难懂。正如讲一口流利的德语或威尔士语是做得到的，说一口流利的数学语言也是做得到的！不过，跟学习语言情况一样，学习数学也要按部就班，循序渐进，从基础到初等，再到高等。

本书并不希求成为一部高等数学教科书。本书从确立数学最基本原则开始，直到介绍一些比较复杂的微积分问题：积分法和微分方程的解为止。最后这两章可以认为是自然地理工作者应当力求达到的水平，而前七章所讲述的数学知识则是大多数大学现代地理学教程的实用基础知识。第一章打下了算术基础，这通常是小学讲授的内容！这里无需为编入基础知识这一章作辩解，因为根据作者的经验，有很多大学生对这种基础知识掌握的很少。每一章均以上一章为根据，并且列举了一些自然地理学的例子，以说明各种方法的应用，尽管全书主要关心的是如何获得数学技术知识。本书是供有意攻读自然地理学专业的地理系一、二年级生之用。这并不是说有志的人文地理系学生就可以忽视本书，因为人文地理系学生对数学的需要量往往也很大，而且他们所需要的数学知识与自然地理系学生所需要的相同。本书书名是根据作者的兴趣和专供自然地理学用的这类教科书之需要而确定的。决定书名的是地理内容，而远不是数学内容。

每一章均附有推荐参考书目和习题，大多数习题的答案附于

书后。在挑选推荐读物时已经注意到，所选读物都是些阐述特别明确的非数学专业用书，即包含有大量习题可供读者试解，以便提高技能。经验乃是数学技巧的秘诀所在。因此，读者一定要把主要重点放在试解所有习题上，并且每一道题都要特别认真地演习一遍。如果所得答案不对，那么就要找出错误的原因，正如俗语所说：“从错误中学习”。

可以期望，本书将会满足对基础数学教科书的需求。本书并不要求读者预先具备数学知识，甚至也不要求学过中专（中等普通专业教育）数学，尽管大多数地理系学生都具有这样的水平！对于需要学习（或者复习）基础数学作为地理研究辅助手段的一些读者说来，本书可以用作教科书而加以系统阅读。对于即使最近学过大专（高等普通专业教育）数学的另一些读者说来，如果为最基本的方法作辩解的话，那他们把本书作为参考书之用仍然可望会从中获益的。上述两类读者只要完全掌握了本书所包含的数学内容，他们就能看懂自然地理学绝大多数的研究刊物，同时首先大概会了解到，刊物所含的数学公式和函数的表达方式，远比文章中的文字本身证明的论点要更为简明得多。

目 录

译者前言

序言.....	(1)
---------	-----

第一章 数学惯例.....	(1)
---------------	-----

第一节 运算	(2)
--------------	-----

第二节 运算顺序	(3)
----------------	-----

第三节 量与数	(5)
---------------	-----

第四节 有理数和无理数	(8)
-------------------	-----

第五节 近似值和精度	(9)
------------------	-----

第六节 根和对数	(9)
----------------	-----

第七节 初等函数	(15)
----------------	------

第八节 坐标和图象	(18)
-----------------	------

第二章 三角和向量.....	(22)
----------------	------

第一节 角的度量单位 度数和弧度	(23)
------------------------	------

第二节 三角比	(23)
---------------	------

第三节 向量和数量	(29)
-----------------	------

第四节 向量代数	(30)
----------------	------

第五节 向量的分量	(32)
-----------------	------

第六节 直线	(35)
--------------	------

第七节 数量积	(36)
---------------	------

第八节 向量积	(37)
---------------	------

第九节 数量积和向量积的运算	(38)
----------------------	------

第三章 线性函数	(41)
----------------	------

第一节 基本线性函数	(41)
------------------	------

第二节 联立方程	(44)
----------------	------

第三节 坐标轴的旋转	(52)
------------------	------

第四节	数学函数和统计关系	(53)
第五节	直线拟合	(55)
第六节	计算结果的显著性	(62)
第七节	多变量关系	(65)
第八节	连续方程	(68)
第四章	矩阵	(70)
第一节	基本矩阵	(70)
第二节	矩阵的相等	(72)
第三节	矩阵运算	(73)
第四节	矩阵代数定律	(77)
第五节	转置矩阵	(77)
第六节	逆矩阵	(78)
第七节	行列式	(81)
第八节	伴随矩阵	(83)
第九节	同坐标几何图形的比较和联立方程的解	(84)
第十节	特征向量和特征值	(87)
第十一节	矩阵和网络	(93)
第五章	非线性函数	(96)
第一节	微分学基础	(96)
第二节	标准函数的特征	(103)
一、	幂函数	(103)
二、	对数函数和指数函数	(108)
三、	三角函数和反三角函数	(111)
第三节	函数组合及其导数	(113)
第四节	驻点的确定	(115)
第五节	积和商的导数	(119)
第六节	曲线拟合	(122)
第七节	非线性关系的其它例子	(129)
第六章	级数和数列	(134)

第一节	算术数列和几何数列	(134)
第二节	级数	(138)
第三节	算术级数的和	(139)
第四节	几何级数的和	(141)
第五节	二项式定理	(144)
第六节	级数的其它例子	(149)
第七章	概率论	(154)
第一节	概率空间	(155)
第二节	链概率	(159)
第三节	马尔科夫概率的矩阵解法	(165)
第四节	频率分布	(166)
第五节	理论分布	(169)
一、	二项分布	(169)
二、	泊松分布	(172)
三、	正态分布	(173)
四、	伽马分布	(177)
第六节	其它类型的分布	(179)
一、	皮尔逊分布 I 型	(180)
二、	皮尔逊分布 II 型	(180)
三、	皮尔逊分布 III 型	(180)
四、	其它的皮尔逊判别准则和转移型	(181)
五、	对数正态分布	(182)
六、	极值分布	(183)
第七节	累积频率分布的应用	(184)
第八章	积分	(188)
第一节	极限和连续函数	(188)
第二节	原函数	(189)
第三节	不定积分	(193)
第四节	标准积分	(194)

• 第五节	比较复杂的函数的积分	(196)
第六节	分部积分法	(197)
第七节	置换积分法	(200)
第八节	三角函数的积分	(203)
第九节	部分分式积分法	(204)
第十节	积分法一览表	(207)
第十一节	数值积分	(208)
第十二节	梯形法则	(210)
第十三节	辛卜生法则	(212)
第十四节	积分的应用	(214)
第十五节	旋转体的体积	(214)
第十六节	转动惯量	(216)
第十七节	傅里叶级数	(217)

第九章 基本微分方程 (223)

第一节	基本方程	(223)
第二节	阶与次	(225)
第三节	常微分方程和偏微分方程	(226)
第四节	一阶常微分方程的解	(228)
第五节	含有函数 y 的方程	(229)
第六节	可分离变量的方程	(230)
第七节	齐次方程	(232)
第八节	“恰当”微分方程的解	(235)
第九节	积分因子	(239)
第十节	积分因子 $e^{\int A dx}$	(241)
第十一节	微分方程解法一览表	(242)
第十二节	高阶微分方程(常系数方程)的解	(243)
第十三节	特别积分	(246)
第十四节	D 算子	(249)
第十五节	应用	(252)

第十六节 大气边界层中的风场	(254)
第十七节 大气运动方程	(254)
后记	(259)
习题答案	(261)
附录	(269)
附录一 希腊字母表和一些字母的通常用法	(269)
附录二 国际单位制 (SI)	(270)
第一节 标准单位	(270)
第二节 十进倍数和约数	(272)
第三节 非标准单位	(272)
附录三 四位常用对数表	(273)
附录四 正弦、余弦和正切表	(276)
附录五 统计学附录	(283)
第一节 标准差, 平均数, 众数和中位数	(283)
第二节 相关系数	(284)
第三节 回归方程	(286)
第四节 正态分布曲线	(287)
第五节 y 估算值的标准误差	(288)
第六节 学生氏 t 检验法	(289)
第七节 复相关系数	(289)
推荐文献	(291)
参考文献	(296)
英汉地理数学名词对照	(300)

第一章 数 学 惯 例

一般说来，初等数学的三门传统科目：算术、代数和几何仍然是构成数学实践的基础。然而，数学各个科目的范围，其中包括微积分(本书第五章和第八章)和向量(第二章)在函数求解(第三章和第五章)上的应用在内，都在日益扩大，从纯数学的单一领域深入到其它专门学科，目前已形成自然地理学科研与教学结构中重要部分。例如，对于一个问题往往有好多种数学解法。然而，所有的数学解法却都起源于算术、代数或几何基本运算的一些简单指导法则。算术使用的数字或代数使用的英文和希腊文字母符号(参见附录一)，以及几何使用的空间量度(第二章第八节)，均为数学的基本结构单元。因此，正如用数和量表示什么要有严格规定一样，也要有使用这些基本结构单元的方法。基本结构单元的使用方法都是以各种符号表示的；必须精心确定和掌握以符号表示的运算模式，以便获得严密的单值运算结构。

一般说来，数学与音乐、文学有许多共同之处，即这两方面的工作都是用经过严格确定其意义的符号表示的。交响乐曲主旋律是用表示音拍和音高的音符直接表述纸上的，音高按音符所在谱线位置而定，这与图表轴线的用法(第一章第八节)类似。一部小说中的单词和组成单词的字母也起着同样的作用，而语法则与音阶和声有类似之处。数学中规定的习惯用法同样也很严格，以便提供严密而适用的运算结构。数的基本概念(第一章第三节)与音符、字母和单词类似。数的用途和用法都是以数学所有学科通用的符号表示的。数的用法习惯虽然简单，但仍然可以表达非常复杂而往往又很抽象的概念。例如，第九章微分方程的比较困难的解法就类似于本章列出的惯例，正如肖斯塔科维奇第十交响乐曲

类似于该乐曲所用的主调音阶——E 小调一样。

第一节 运 算

用以表示数学运算模式的符号一般可以分为两大类：一类是信息符号，例如表示两项等值的符号“=”，等等；另一类是指令符号，例如符号“+”和“-”，等等，均为操作码。第一类包括各种各样的通用符号：

= 等于

≠ 不等于

≡ 恒等于，相当于

∞ 与……成比例

< 小于 (≤ 小于或等于)

> 大于 (≥ 大于或等于)

≮ 不小于

≯ 不大于

≈ 或 ≃ 或 ≐ 近似等于

第二类符号大多为读者所熟悉：符号 +, -, ×, ÷ 分别表示加, 减, 乘, 除, 不过也有些容易混淆的变化, 如 a 与 b 二值的相乘或相除运算可分别表示为：

a 乘以 b $a \times b$ 或 $a \cdot b$ 或 ab

a 除以 b $a \div b$ 或 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 或 $a \cdot b^{-1}$ 。

根据 SI (国际单位制) 惯例 (国家物理实验室, 1970), 最好选用 ab 和 a/b 或 ab^{-1} 。正如在第二章将会看到的, 以点表示乘号实际上仅限于向量乘法。其他符号将分别在随后各章相继引用。不过有两个省略符号很实用, 虽不属于以上两类中的任何一类, 但在数

学中却常用，即：符号 $\therefore$ 表示“所以”，符号 $\because$ 表示“因为”，后者很少用到。

第二节 运算顺序

在一项计算中施行好几次运算时，连续运算的顺序对计算结果会有影响。在诸如 $a + bc/d$ 的一切混合计算中，要先乘除后加减。例如在上式中应当首先计算 bc/d ，然后将得数加 a ，而不能 a 加 bc ，再将得数除以 d 。本法则的例外情形是，带括号的运算要先作。例如，若写出 $(a + b)c/d$ ，则应将 a 加上 b ，然后将得数乘以 c/d 。两种场合的计算结果不同。例如若 $a = 2$ ， $b = 6$ ， $c = 1$ 和 $d = 4$ ，则

$$a + bc/d = 2 + 6/4 = 3.5$$

$$(a + b)c/d = (2 + 6)1/4 = 2.0$$

当用计算器施行上述运算时，记住这些法则是重要的。

括号还可以在乘法分配律中使用。例如，表示式

$$ac + ad + bc + bd$$

用括号重新组合诸值后可以表示成下列更为简便的形式：

$$(a + b)(c + d)$$

这里注意到原式的所有四项中不含 a 就含 b ，不含 c 就含 d ，将该式作因式分解，在两个括号里进行不同的成对组合，就可以得出 $(a + b)(c + d)$ 的解答。首先乘出 $a(c + d)$ ，然后乘出 $b(c + d)$ ，就得出原式 $ac + ad + bc + bd$ 。

在自然地理计算中，正值和负值都会经常用到；它们常常表明各种对立的概念，或者表示从 $-n$ 经零至 $+n$ 的区间值。因此，如果在一个表达式中设 f 表示加速度，那么 $+f$ 就表示某一方向上的加速度，而 $-f$ 则表示相反方向上的加速度。 $-f$ 和 $+f$ 都

有一个绝对值 f ，可以记作 $|f|$ ，即“模数 f ”。表示方向的符号在向量用法中获得广泛应用（第二章），并且萨姆纳 (Sumner, 1977 a) 曾经应用向量研究过海风的发育。如果将一切向岸坡降风规定为正向，而一切离岸坡降风规定为负向，并且还假设具备了晴空和合成浅对流这样的必要条件，那么就可以着手估计坡降风的风向对海风发育的影响（参见戴维森 Davidson, 1978, for a treatment of the processes involved）。正交向岸风或正交离岸风，即吹向与海岸线恰好成直角相交的向岸风和离岸风，显然是极其罕见的。风速为 v 米/秒的向岸风的冲击作用在正交向岸时显然最大，而在其吹向与海岸线近乎平行时则最小。向岸风的作用随着它与海岸线的夹角的减小而减弱（参见图 1.1）。实际上，如果运用第二章将要确定的三角比中的一个，则坡降风的向岸分量等于 $v \sin\alpha$ 或 $v \sin\beta$ ，如图 1.1 所示，并且 $\sin\alpha$ 为正，而 $\sin\beta$ 为负（参见表 2.1）。第二章中将对此法作进一步讨论。

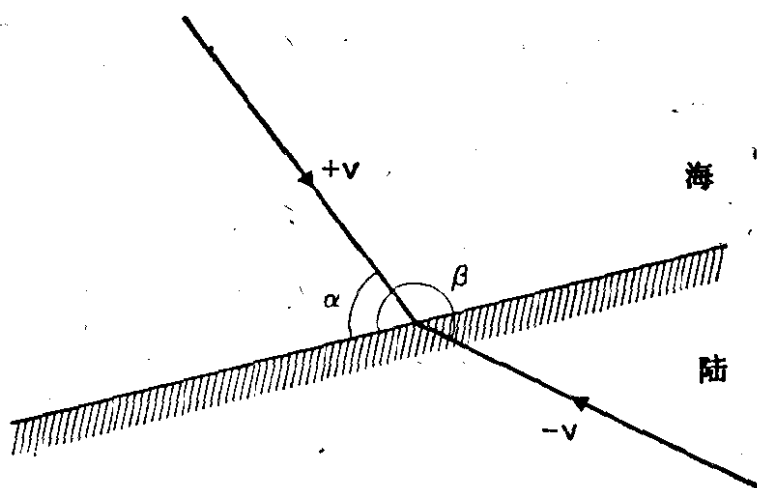


图 1.1 向岸风和离岸风的分量

在计算含有正负值的表示式时，会涉及加法法则。除用来表示加法和阐明如上述海风一例中那样的对立现象以外，+号通常是省略不写的。在加法或减法运算中，正、负值总是相互“抵销”，所以 $+a$ 减 $+b$ 得 $a-b$ ，