中等银行学校
试用教材

# 线性代数基础

中国金融出版社

中等银行学校试用教材

# 线性代数基础

《线性代数基础》编写组

责任编辑：李祥玉


# 线性代数基础

《线性代数基础》编写组

*

中国金融出版社　出　版

（北京西交民巷17号）

新华书店北京发行所发行

天津新华印刷三厂　印刷

*

787×1092毫米　1/32　4.75印张　99千字

1989年3月第一版　1989年3月第一次印刷

印数：1—10500

ISBN 7—5049—0420—1/F·018　定价：~~1.05元~~ 1.10元

# 编 审 说 明

本书是按照银行中等专业学校教学计划和《数学》教学大纲的要求，为教学需要而编写的教材，亦可供金融系统各类中等专业教育或干部培训使用。

这套《数学》教材，分为三册：第一册《微积分初步》；第二册《线性代数基础》；第三册《概率论与数理统计初步》。

本册《线性代数基础》，介绍了线性代数的基本概念和基本运算方法；并在此基础上结合经济应用，着重介绍了线性规划的表上作业法和单纯形法，对投入产出数学模型也作了简要介绍，全书配备有适量的例题和习题。

本书是由中国人民银行教育司组织有关教师编写的。

编写组长：王树深；副组长：高元恕。

编写人员：王树深（第1章）；刘桂荣（第2章）；高元恕（第3章）；陈明贵（第4章）；蔡聪（第5章）。由王树深和高元恕总纂。

审稿：单立波。

全套书均由马骏同志最后总纂。

现经我们审定，可以作为银行中等专业学校试用教材出版。各单位在使用过程中有何修改意见和建议，请函寄中国人民银行教育司教材编审室。

中国人民银行教材编审委员会

1988年8月24日

# 目　　录





试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook.com

# 第一章　行列式

在生产实践、科学研究和经济活动中，一些变量之间的关系可以直接或近似地表示为线性函数，因此研究线性函数是非常重要的问题。而线性函数就是线性代数的主要研究对象。在线性代数中，线性方程组是一个基础部分，也是一个重要部分。研究线性方程组首先要讨论行列式，本章主要讨论行列式的概念、性质及其应用。

## 第一节　n阶行列式

### 一、二、三阶行列式

在介绍n阶行列式的定义之前，先复习一下二、三阶行列式，以及利用行列式解一次方程组的有关知识。

任何一个二元一次方程组均可化为一般形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \qquad (1-1)$$

根据加减消元法，如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则这个方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

为了便于记忆上述表达式，我们引进二阶行列式的概念，我们称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

为二阶行列式．它含有两行、两列．横排为行，竖排为列．行列式中的数称为行列式的元素，记为$a_{ij}$．i表示该元素所在的行序、j表示该元素所在的列序．我们把从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线，从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线．

显然，二阶行列式含有四个元素．我们把$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为行列式D的展开式，其运算结果必然是一个数或解析式．不难看出，D的展开式共计两项，每一项都是不同行不同列的元素之积；主对角线上二元素之积取正号，次对角线上二元素之积取负号．

在引入二阶行列式的概念之后，方程组（1－1）的解可以写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

并把$x_1$、$x_2$的分子分别记为：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

$D_1$是将D中第一列元素$a_{11}$、$a_{21}$分别换成方程组(1—1)的常数项$b_1$、$b_2$得到的；$D_2$是将D中第二列元素$a_{12}$、$a_{22}$分别换成方程组（1－1）的常数项$b_1$、$b_2$得到的．

类似地，对于一般的三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad (1-2)$$

为了简单地写出它的解，我们引入三阶行列式的概念。

定义三阶行列式为：

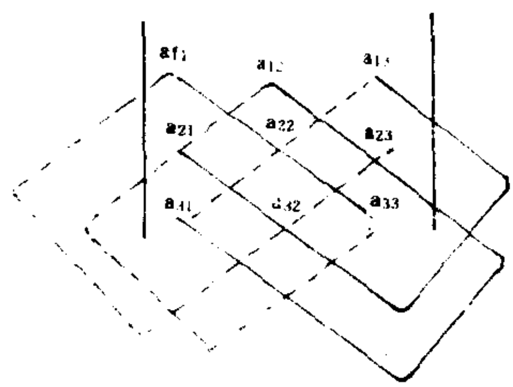
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (1-3)$$

显然，一个三阶行列式是由不同行不同列的三个元素相乘而得到的六项的代数和。这些项前面所带的正负号如图1—1所示：

图1—1




实线上三个元素之积取正号；虚线上三个元素之积取负号。这种展开行列式的方法称为对角线法则。

例如：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\times(-1)\times(-1)+3\times2\times2+2\times0\times1$$

$$-2\times(-1)\times2-3\times0\times(-1)-1\times2\times1$$

$= 1 + 12 + 0 - (-4) - 0 - 2$

$= 15.$

利用三阶行列式可以解三元一次方程组．我们把以方程组（1－2）的未知量的系数为元素的三阶行列式称为方程组（1－2）的系数行列式．如果该系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组（1－2）有唯一解：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}.$$

并分别记$x_1$，$x_2$，$x_3$的分子为$D_1$、$D_2$、$D_3$，这样，方程组（1－2）的解可写为$x_1 = \frac{D_1}{D}$，$x_2 = \frac{D_2}{D}$，$x_3 = \frac{D_3}{D}$，而$D_1$、$D_2$、$D_3$是把$D$中的一、二、三列分别换成常数项$b_1$、$b_2$、$b_3$而得到的．

例1　解下列线性方程组：

$$\begin{cases} x + y - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\2&3&-1\end{vmatrix}=9\neq 0,D_1=\begin{vmatrix}6&1&1\\0&-2&1\\5&3&-1\end{vmatrix}=9,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&6&1\\1&0&1\\2&5&-1\end{vmatrix}=18,\ D_3=\begin{vmatrix}1&1&6\\1&-2&0\\2&3&5\end{vmatrix}=27,$$

所以 $x=\frac{9}{9}=1$，$y=\frac{18}{9}=2$，$z=\frac{27}{9}=3$。

不难看出，用二、三阶行列式来解系数行列式不为零的二、三元线性方程组很方便.可否将这个方法推广到解 n 个未知量的线性方程组呢？为此，给出 n 阶行列式的概念.

## 二、n 阶行列式的定义

从二、三阶行列式的定义看出：行列式的展开式中有三个因素，其一是“项”；其二是每项前面所带的正负号；其三是项数.现在就三阶行列式(1－3)研究它的展开式的结构：

1.我们看到（1－3）式中每项都是三个元素的乘积，这三个元素来自不同的行，不同的列，即行列式中每行有一个，每列有一个．于是（1－3）式的任意项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，这里 $p_1$，$p_2$，$p_3$ 是 1，2，3 的一个排列，而第一个下标按1，2，3 顺序排列.

2.为说明（1－3）式中各项带符号的规律先介绍几个概念：

**定义 1.1** 由1，2，…，n组成的一个有序数组称为一个 n 元排列，简称排列，记为 $p_1p_2\cdots p_n$.



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

例如，2131是一个四元排列；45321 是一个五元排列．显然，n元排列总数为n!．

**定义 1．2** 在一个排列中，如果一个大数排在一个小数之前，就称这两个数组成一个逆序．一个排列中，逆序的总数称为这个排列的逆序数．

例如，2431中，21，43，41，31是逆序，2431的逆序数是4．而45321的逆序数是9．

**定义 1．3** 逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列．

在三阶行列式（1－3）中，一般项为$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，$p_1$，$p_2$，$p_3$ 是1，2，3的一个排列．可以看出，当$p_1p_2p_3$ 是偶排列时，对应项在（1－3）式中带有正号，当$p_1p_2p_3$是奇排列时，对应项在（1－3）式中带有负号．

3．因为1，2，3共有3!＝6个不同排列，所以（1－3）式是6个项的代数和．

上面这些规律对二阶行列式也成立．若把这些规律作为定义，则二、三阶行列式就统一了．

现在我们就根据这些规律定义n 阶行列式

**定义 1．4** 假设有$n^2$个数$a_{ij}$，i，j＝1，2，…，n，把它们排列成n行、n列，记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} . \qquad (1-4)$$

我们称（1－4）式为n阶行列式．$a_{ij}$ 叫做第i行、第j列上的数或元．n阶行列式是所有这些项的代数和：

1. 每项是 n 个元的乘积，这 n 个元来自（1－4）式的不同行、不同列。于是（1－4）式的任意项可以写为$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，其中第一个下标，即行标按 1，2，…，n 的顺序排列，第二个下标，即列标$p_1$，$p_2$，…，$p_n$是 1，2，…，n 的一个排列。

2. 每项的符号这样确定：当$p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时，对应项带有正号；当$p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列时，对应项带有负号。

3. 因为 n 个数字的所有排列有 n！个，所以这样的项共有 n！个。

这一定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{[p_1p_2\cdots p_n]} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \qquad (1-5)$$

其中$[p_1p_2\cdots p_n]$表示$p_1p_2\cdots p_n$排列的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$表示对1, 2, …, n 的所有可能的排列取和。我们把（1—5）式称为 n 阶行列式的展开式。行

例 2　用 n 阶行列式的定义计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

解　由定义得

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{p_1 p_2 p_3 p_4} (-1)^{p_1 p_2 p_3 p_4} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4}$$

因为该行列式只有 4 个非零元素，其它元素均为零，所以只要求出不为零的项就可以了．显然，只有当$p_1 = 2$，$p_2 = 4$，$p_3 = 1$，$p_4 = 3$时，即$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ 这项不为零，而排列**2413**的逆序数是奇数，所以该项应取负号，于是

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -3 \times 2 \times 5 \times 4 = -120$$

不难看出：利用 n 阶行列式的定义来计算行列式是很麻烦的．对角线法则只适于二、三阶行列式．为简化行列式的计算，下面讨论行列式的性质．

## 第二节　行列式的性质

**性质 1．1**　行列互换，行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

（行列式所有性质的证明均从略）．

例如，

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3$$
$$-2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times3\times1$$
$$=10,$$

$$A'=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=10=A,$$

**性质1.2** 把行列式的任意两行（列）互换，行列式的值只改变符号.

例如，把A的第二行与第三行互换，就得到

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-10=-A.$$

**推论1** 如果在行列式中有两行（列）的对应元素相同，则这行列式的值为零.

事实上，设某行列式D有两行（列）的对应元素完全相同，若将这两行（列）互换，由性质1.2得 $-D$．所以$D=-D$，即$2D=0$，因此$D=0$.

**性质1.3** 把行列式的某一行（列）的所有元素同乘以某个数k，等于用数k乘原行列式.

例如，用2乘A的第一行得

$$\begin{vmatrix} 2\times2 & 2\times1 & 2\times2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=20=2A.$$

**推论1** 如果行列式某行（列）的元素均为零，则行列式的值等于零.

**推论 2** 如果行列式的某两行（列）的对应元素成比例，则行列式的值等于零.

**性质 1.4** 如果行列式的某一行（列）的元素都是二项式，则这个行列式等于把这些二项式各取一项做为相应行（列），而其余行（列）不变的两个行列式的和.

例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1+1 & 1+2 & 2+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 + 5 = 10 = A.$$

**性质 1.5** 把行列式某一行（列）的所有元素同乘以一数 k，加到另一行（列）的对应元素上，行列式的值不变.

例如，用 2 乘 A 的第一行加到第二行上，得

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4+4 & 3+2 & 1+4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 = A.$$

## 第三节 行列式的计算

**将较高阶行列式化成较低阶的行列式，一般说来，可以简化行列式的计算. 为此，我们引入以下概念.**

## 一、余子式、代数余子式的定义

把行列式中某一元素$a_{ij}$所在的行与列划去后，剩下的元素按其原来相对位置组成的行列式称为对应于这个元素$a_{ij}$的余子式，记为$D_{ij}$。例如在三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中$a_{23}$ 的余子式为

$$D_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

设行列式中某一元素位于第$i$行第$j$列，把对应于这个元素的余子式乘以$(-1)^{i+j}$后，所得到的式子称为这个元素的代数余子式，记为$A_{ij}$，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}.$$

例如，三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

元素$a_{23}$ 的代数余子式为

$$A_{23}=(-1)^{2+3}D_{23}$$
$$=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

## 二、拉普拉斯定理

**定理 1.1** n阶行列式D等于它的任意一行（列）的各元素与其相应代数余子式乘积之和，即



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com