多格子方法

曹志浩 编著

DUOGEZIFANGFA

DUOGEZIFANGFA

复旦大学出版社

多格子方法

曹志浩　编著

复旦大学出版社

内 容 提 要

本书介绍了应用于大型科学计算的一类有效的、新的计算方法——多格子方法的基本思想和基础理论．内容包括多格子思想、基本多格子算法、多格子方法的各种收敛理论以及几何多格子方法和代数多格子方法的实施等问题．在深入浅出地阐明多格子方法的基本思想的同时，较全面地总结了多格子方法的算法和理论方面的成果，并且对多格子算法的有效性和收敛理论也有较详尽的论述．

本书可供高等学校计算数学和应用数学专业高年级学生及研究生参考或作为选修课教材．也可供理科其他专业师生、计算数学和应用数学工作者或其他利用电子计算机从事科学计算的科技人员参考．

多 格 子 方 法

曹志浩 编著

复旦大学出版社出版

（上海国权路579号）

新华书店上海发行所发行　江苏大丰印刷二厂印刷

开本850×1168　1/32　印张6.375　字数181,000

1989年4月第1版　1989年4月第1次印刷

印数1—3,500

ISBN7—309—00143—5/O·040

定价：1.55元

引　言

多格子思想是60年代中期由苏联数学家在用迭代法求解椭圆差分问题时提出的，但开始并未受到重视，直至70年代后期，西德、以色列和荷兰的计算数学工作者在这方面进行了重点研究，首先在椭圆边值问题和流体计算等实际应用中发现了多格子方法的巨大潜力，随后美国的数值分析学家也开始重视多格子方法的研究，特别在基础理论方面。从80年代开始，多格子方法的研究取得了大量的成果。

目前多格子思想在国际上已开始为广大科技工作者接受，认识到多格子方法是求解大型科学计算问题的非常有效的方法(理论上是最优阶的方法)，近年来由于超级计算机的迅速发展，已开始使多格子方法作为最优阶的算法从理论变为现实。

本书一方面深入浅出地阐述多格子方法的基本思想和基本算法，另一方面比较全面地总结了多格子方法的最新理论成果。着重从代数观点阐述多格子方法的算法和理论是本书的特点。

作者曾将本书的初稿用作复旦大学计算数学专业研究生的选修课教材。

阅读本书需具备矩阵计算和微分方程数值解的基本知识。

本书内容取材于近年来国外发表的大量有关论文和会议录等，有些内容是本人的工作。由于水平有限，错误不妥之处一定不少，恳请读者批评指正。

曹志浩

1987年2月于复旦

目　录

第五章 代数和变分多格子方法

第六章 多格子方法的实施

第一章　多格子思想

在连续问题(例如,微分方程的边值问题,积分方程等)的传统的数值求解过程中,首先把问题离散化:在一个有限维近似空间中选择近似的代数方程组,然后设计一个数值过程,近似地求解这离散方程组。通常在离散化和求解过程中无相互作用。这就造成了很大的浪费:离散化过程不能预测合适的解和在每个位置的适当的逼近阶;产生的网格太细,造成所得到的代数方程组的阶数不必要地大,而精度通常仍旧很低,因为解的局部光滑性未被适当地利用。另一方面,对所选择的代数方程组求解并非目的,它只是连续问题的近似,所以这个方程组可以用更简单的代数方程组逼近。

求解连续问题的适应多格子方法(详见第六章)就是根据连续解与离散解之间的后天误差估计,不断调整网格以达到既满足精度要求,又节约计算工作量的目的。

非适应的多格子方法是在给定的网格(精网格)上求解离散方程组,而在求解的过程中应用一系列粗网格和求解相应的低价方程组。这种用多格子方法求解的问题可以与连续问题无关,因而网格也失去其几何意义(参见第五章和第六章),故也称为代数多格子方法。

§1.1　记　号

考虑线性边值问题

$$\begin{aligned} L^{\Omega}u&=f^{\Omega}(x), \qquad x\in\Omega \\ L^{\Gamma}u&=f^{\Gamma}(x), \qquad x\in\Gamma:=\partial\Omega \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

这里 $x=(x_1,\cdots,x_d)$,Ω 是一个带边界 Γ 的给定区域,L^{Ω} 是 Ω 上的线性椭圆微分算子,而 L^{Γ} 表示一个或几个线性边界算子。(1.1.1)式的解记为 $u=u(x)$,(1.1.1)式也常简记为 $Lu=f$。

(1.1.1)式的离散形式为

$$L_h^\Omega u_h = f_h^\Omega(x), \qquad x\in \Omega_h \qquad (1.1.2)$$
$$L_h^\Gamma u_h = f_h^\Gamma(x), \qquad x\in \Gamma_h$$

离散解 u_h 是一个定义在 $\Omega_h\cup\Gamma_h$ 上的格子函数，L_h^Ω和 L_h^Γ 分别称为离散(或差分)算子和离散边界算子。为简单起见，我们假定离散边界方程从(1.1.2)式中消去，而简单地记为

$$L_h u_h = f_h \ (\Omega_h) \qquad (1.1.3)$$

u_h 和 f_h 是 Ω_h 上的格子函数，L_h 是线性算子

$$L_h:\ \mathrm{G}(\Omega_h)\to \mathrm{G}(\Omega_h) \qquad (1.1.4)$$

其中 $G(\Omega_h)$是在 Ω_h 上格子函数的线性空间。线性方程组(1.1.3)称为格子方程。

在许多情况下，Ω 是一个矩形区域：$\Omega=(0,a_1)\times(0,a_2)$，$\Omega_h$ 是一个同 Ω"匹配"的矩形格子，这时 h 表示网格向量：$h=(h_{x_1},h_{x_2})$，Ω_h 是

$$\Omega_h:=\Omega\cap G_h \qquad (1.1.5)$$

这里 G_h 指无穷格子：

$$G_h:=\{x=k\cdot h: k\in\mathscr{Z}^2\},\ h_{x_j}=a_j/N_j,\ N_j\in\mathscr{N}(j=1,2) \qquad (1.1.6)$$

其中 $k\cdot h=(k_1h_{x_1},k_2h_{x_2})$，$\mathscr{Z}^2$ 是二维整数集，$\mathscr{N}$ 是自然数集。在方格子的特殊情况下，可简单地写为 $h=h_{x_1}=h_{x_2}$。

对(1.1.5)式和(1.1.6)式，格子函数空间 $G(\Omega_h)$常赋以离散 l_2 内积

$$(u_h,w_h)_2:=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{x\in\Omega_h}u_h(x)\bar{w}_h(x)$$

和 Euclid 范数

$$\|u_h\|_2=\sqrt{(u_h,u_h)_2} \qquad (1.1.7)$$

对应的算子范数是谱范数 $\|\cdot\|_2$。当 L_h 对称正定时，对应的能量内积是

$$a(u_h,w_h):=(L_hu_h,w_h)_2 \qquad (1.1.8)$$

而对应的算子范数是能量范数 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$。

我们常用单位正方形上 Poisson 方程的 Dirichlet 边值问题

$$L^\Omega u:=-\triangle u=f^\Omega(x), \qquad x\in\Omega:=(0,1)\times(0,1) \qquad (1.1.9)$$

$$L^{\Gamma}u:=u=f^{\Gamma}(x), \qquad x\in\Gamma$$

来说明问题。若这问题在一个正方形 h 格子上用通常 5 点差分格式离散化,则称所得问题为模型问题(P)。特别,我们有

$$L_h^{\Omega}=-\triangle h \hat{=} \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}_h \tag{1.1.10}$$

$\Omega_h=\Omega\cap G_h, G_h=\{x=k\cdot h:k\in\mathscr{Z}^2\}, h=1/N(N\in\mathscr{N})$。

消去离散边界条件后引向格子方程(1·1·3)。

当在矩形格子上具体定义离散算子 L_h^{Ω} 时,常利用差分星术语,通常在无限格子(1.1.6)上引入它。在点 $x\in\Omega_h$,一个一般的差分格式是

$$L_h^{\Omega}w_h(x)=\sum_{k\in\mathscr{V}}s_k w_k(x+k\cdot h) \tag{1.1.11}$$

其中 $\mathscr{V}$ 指 $\mathscr{Z}^2$ 的某个有限子集,它总包含原点,$(0,0)\in\mathscr{V}$。在差分星术语下记为

$$L_h^{\Omega}w_h(x)=[s_k]_h w_h(x):=\begin{bmatrix} & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & s_{-1,1} & s_{0,1} & s_{1,1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & s_{-1,0} & s_{0,0} & s_{1,0} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & s_{-1,-1} & s_{0,-1} & s_{1,-1} & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \end{bmatrix}_h w_h(x) \tag{1.1.12}$$

即 L_h^{Ω} 等同于它的差分星

$$L_h^{\Omega}\hat{=}[s_k]_h \tag{1.1.13}$$

常用的是 5 点差分星和 9 点差分星

$$\begin{bmatrix} & s_{0,1} & \\ s_{-1,0} & s_{0,0} & s_{1,0} \\ & s_{0,-1} & \end{bmatrix}_h$$

和

$$\begin{bmatrix} s_{-1,1} & s_{0,1} & s_{1,1} \\ s_{-1,0} & s_{0,0} & s_{1,0} \\ s_{-1,-1} & s_{0,-1} & s_{1,-1} \end{bmatrix}_h \tag{1.1.14}$$

在多格子中，还需要用实现格子之间转换的限制算子和插值算子。我们用 G_h 和 G_{2h} 之间的格子转换来说明。这里

$$G_{2h}:=\{x=2k\cdot h:k\in\mathscr{Z}^2\} \tag{1.1.15}$$

一个限制算子 I_h^{2h} 映射 h 格子函数到 $2h$ 格子函数：

$$(I_h^{2h}w_h)(x)=\sum_{k\in\mathscr{V}}\hat{t}_k w_h(x+k\cdot h),\qquad x\in G_{2h} \tag{1.1.16}$$

将(1.1.16)式的 I_h^{2h} 用下式等价表示(限制星)：

$$I_h^{2h}\hat{=}[\hat{t}_k]_h^{2h}:=\begin{bmatrix} & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \hat{t}_{-1,1} & \hat{t}_{0,1} & \hat{t}_{1,1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \hat{t}_{-1,0} & \hat{t}_{0,0} & \hat{t}_{1,0} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \hat{t}_{-1,-1} & \hat{t}_{0,-1} & \hat{t}_{1,-1} & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \end{bmatrix}_h^{2h} \tag{1.1.17}$$

最常用的限制算子是完全权(FW)

$$I_h^{2h}\hat{=}\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_h^{2h} \tag{1.1.18}$$

一个插值算子(或称延拓算子)把 $2h$ 格子函数映射到 h 格子函数。引进记号(插值星)：

$$I_{2h}^{h}\hat{=}]\check{t}_k[_{2h}^{h}:=\left]\begin{matrix} & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \check{t}_{-1,1} & \check{t}_{0,1} & \check{t}_{1,1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \check{t}_{-1,0} & \check{t}_{0,0} & \check{t}_{1,0} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \check{t}_{-1,-1} & \check{t}_{0,-1} & \check{t}_{1,-1} & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \end{matrix}\right[_{2h}^{h} \tag{1.1.19}$$

(1.1.19)式表示 $2h$ 格子函数 w_{2h} 映射到 h 格子函数 w_h：

$$w_h := \sum_{y \in G_{2h}} w_{h,y} \tag{1.1.20}$$

这里 $w_{h,y}$ 是如下的 h 格子函数：

$$w_{h,y}(x) := \begin{cases} \check{t}_k w_{2h}(y), & \text{当 } x = y + k \cdot h, k \in \mathscr{V} \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x = y + k \cdot h, k \notin \mathscr{V} \text{ 时} \end{cases} \tag{1.1.21}$$

最常用的插值算子是从 G_{2h} 到 G_h 的双线性插值，对应的插值星是下列 9 点星：

$$I_{2h}^{h} \hat{=} \frac{1}{4} \left] \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix} \right[_{2h}^{h} \tag{1.1.22}$$

(1.1.22)式称为 9 点插值星的意义是：设 $\dot{w}_{2h}$ 是某个点 $x_0 \in G_{2h}$ 的一个"单位格子函数"，即

$$\dot{w}_{2h}(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

则 $(I_{2h}^{h} \dot{w}_{2h})(x)$ 对 $x \in G_h$ 只有 9 个点可能取非零值，其数值与位置如(1.1.22)式所示。

若将格子函数 $w_h(x)(x \in \Omega_h)$ 和 $w_{2h}(x)(x \in \Omega_{2h})$ 看作向量，它们的分量是格子点上的函数值，则可得算子 I_h^{2h} 和 I_{2h}^{h} 的矩阵表示。例如，对如下的 Ω_h 和 Ω_{2h}

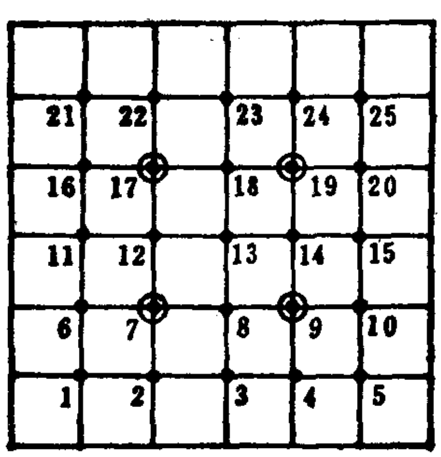


图 1.1.1 Ω_h

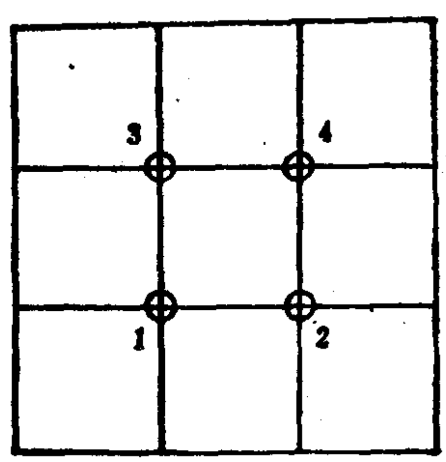


图 1.1.2 Ω_{2h}

易知，完全权的矩阵表示是

$$I_h^{2h}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1\;2\;1\;0\;0\;2\;4\;2\;0\;0\;1\;2\;1 & & & \\ & 1\;2\;1\;0\;0\;2\;4\;2\;0\;0\;1\;2\;1 & & \\ & & 1\;2\;1\;0\;0\;2\;4\;2\;0\;0\;1\;2\;1 & \\ & & & 1\;2\;1\;0\;0\;2\;4\;2\;0\;0\;1\;2\;1 \end{bmatrix}$$

而双线性插值 I_{2h}^h 的矩阵表示满足：

$$I_{2h}^h=4(I_h^{2h})^T$$

也就是说，FW 的 I_h^{2h} 和双线性插值的 I_{2h}^h 是在 l_2 内积意义下相互共轭的。

对于矩形网格，所允许的 h 的范围用 $\mathscr{H}^*$ 表示：

$$\mathscr{H}^*:=\{h:h\leqslant h^*,\ h_{x_2}/h_{x_1}=q^*\} \tag{1.1.23}$$

其中 q^* 指固定的网格比，h^* 指最大网格的大小。在模型问题 (P) 中 $\mathscr{H}^*$ 定义为

$$\mathscr{H}^*:=\{h:h\leqslant h^*,\ h=1/N(N\ 是偶数)\},\ h^*:=1/4 \tag{1.1.24}$$

§1.2 多格子思想，多格子分量

考虑离散线性椭圆边值问题

$$L_hu_h=f_h \qquad (\Omega_h) \tag{1.2.1}$$

其中 L_h 是线性算子

$$L_h:\ G(\Omega_h)\to G(\Omega_h) \tag{1.2.2}$$

设 Ω_h 包含对应于未知的格子函数 u_h 的格子值的 $N=N_h$ 个格子点，故 $G(\Omega_h)$ 是 N 维的。我们假定 L_h^{-1} 存在。

令 u_h^j 是(1.2.1)式的任一近似解。用

$$v_h^j:=u_h-u_h^j \tag{1.2.3}$$

表示 u_h^j 的误差(也可看作 u_h^j 的校正)，用

$$d_h^j:=f_h-L_hu_h^j \tag{1.2.4}$$

表示 u_h^j 的残量。残量方程

$$L_hv_h^j=d_h^j \tag{1.2.5}$$

与原始方程(1.2.1)是等价的，因为由它的解 v_h^j 和近似解 u_h^j 就可得到方程(1.2.1)的解：

$$u_h = u_h^j + v_h^j$$

残量方程和它的近似方程在多格子思想的描述中起着重要的作用。

大多数求解方程(1.2.1)的传统迭代法也能解释为对方程(1.2.5)的近似;在方程(1.2.5)中将 L_h 换为"更简单"的可逆算子 $\tau_j \hat{L}_h$(τ_j 是非零纯量)得到近似残量方程

$$\tau_j \hat{L}_h \hat{v}_h^j = d_h^j \tag{1.2.6}$$

它的解(校正)$\hat{v}_h^j$ 给出一个新的近似

$$u_h^{j+1} = u_h^j + \hat{v}_h^j$$

或写为

$$u_h^{j+1} = u_h^j + \tau_j^{-1} \hat{L}_h^{-1}(f_h - L_h u_h^j) \tag{1.2.7}$$

从某个 u_h^0 出发,逐次应用上式,定义了一个迭代过程。对于定常迭代,不妨取 $\tau_j \equiv 1 (j = 0, 1, \cdots)$,它的迭代算子是

$$I_h - \hat{L}_h^{-1} L_h: \ G(\Omega_h) \to G(\Omega_h) \tag{1.2.8}$$

对误差有

$$v_h^{j+1} = (I_h - \hat{L}_h^{-1} L_h) v_h^j, \ j = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.2.9}$$

对残量成立

$$d_h^{j+1} = (I_h - L_h \hat{L}_h^{-1}) d_h^j, j = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.2.10}$$

迭代算子(1.2.8)的谱半径(渐近收敛因子)是

$$\rho(I_h - \hat{L}_h^{-1} L_h) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ 是 } I_h - \hat{L}_h^{-1} L_h \text{ 的特征值}\} \tag{1.2.11}$$

若在 $G(\Omega_h)$ 中引入范数 $\|\cdot\|$,则对应的算子范数

$$\|I_h - \hat{L}_h^{-1} L_h\| \ \text{ 和 } \ \|I_h - L_h \hat{L}_h^{-1}\| \tag{1.2.12}$$

分别给出每步迭代的误差约化因子和残量约化因子。

对于定常迭代(1.2.7)($\tau_j \equiv 1$),由 $\hat{L}_h$ 的选取可以得到许多熟知的迭代法:令 L_h 的矩阵表示 A_h 分裂为

$$A_h = D_h - D_h \tilde{L}_h - D_h \tilde{U}_h$$

其中 D_h 是对角阵,$\tilde{L}_h$ 和 $\tilde{U}_h$ 分别是严格下三角阵和严格上三角阵,则

当 $\hat{L}_h$ 分别取

(1) $\hat{L}_h=D_h$;

(2) $\hat{L}_h=D_h(I_h-\tilde{L}_h)$;

(3) $\hat{L}_h=\frac{1}{w}D_h(I_h-w\tilde{L}_h)$ $(0<\omega<2)$

时，我们就分别得到 Jacobi 迭代、Gauss-Seidel 迭代和逐次超松驰(SOR)迭代。

对非定常迭代(1.2.7)式、取种种 $\hat{L}_h$ 和 $\{\tau_j\}$ 就可以得到许多半迭代方法(包括预条件方法)，特别当 L_h 对称正定时，非适应地选取$\{\tau_j\}$可得到 Чебышев 半迭代法(包括预条件)，而适应地选取 $\{\tau_j\}$ 可得共轭梯度(CG)法和共轭残量(CR)法(包括预条件)，$\hat{L}_h$就是这类方法的预条件矩阵。

上面这种类型的迭代法我们以后称之为松弛法(定常的或不定常的)。

现在我们考虑 $\hat{L}_h$ 的另一种类型的选择。用粗格子 Ω_H 上的 $\hat{L}_H$ 作为 L_h 的近似，即残量方程(1.2.5)换为

$$L_H\hat{v}_H^j=d_H^j \tag{1.2.13}$$

这里假定

$$L_H:G(\Omega_H)\to G(\Omega_H),\ \dim G(\Omega_H)\ll\dim G(\Omega_h) \tag{1.2.14}$$

和 L_H^{-1} 存在，同时假定给出了两个线性转换算子：

$$I_h^H:G(\Omega_k)\to G(\Omega_H) \text{ 和 } I_H^h:G(\Omega_H)\to G(\Omega_h) \tag{1.2.15}$$

(1.2.13)式中的 d_H^j 是 d_h^j 在 Ω_H 中的限制：

$$d_H^j:=I_h^H d_h^j \tag{1.2.16}$$

而 I_H^h 用来将(1.2.13)式的解(校正) $\hat{v}_H^j$ 插值到 Ω_h 上：

$$\hat{v}_h^j:=I_H^h\hat{v}_H^j \tag{1.2.17}$$

由这样选取的 $\hat{L}_H$ 和相应的 I_h^H, I_H^h 也可构造一个迭代过程。按这个过程，由 u_h^j 计算 u_h^{j+1} 的一个迭代步如下：

计算残量：　　　　　　　　$d_h^j := f_h - L_h u_h^j$

限制残量(细到粗变换)：　$d_H^j := I_h^H d_h^j$

在 Ω_H 上精确求解 $\hat{v}_H^j$：　$L_H \hat{v}_H^j = d_H^j$

插值校正(粗到细变换)：　$\hat{v}_h^j := I_H^h \hat{v}_H^j$

计算新近似：　　　　　　$u_h^{j+1} := u_h^j + \hat{v}_h^j$

我们称这类迭代过程为粗格子校正 (CGC) 过程，它所联系的迭代算子是

$$I_h - \hat{K}_h L_h \tag{1.2.18}$$

其中 $\hat{K}_h = I_H^h L_H^{-1} I_h^H$。

若把松弛法和粗格子校正过程单独地作为迭代法，它们的收敛性质是不能令人满意的，但这两类迭代法的收敛性态是很不相同的。若适当地组合使用这两类方法，则会产生非常好的收敛性质，这种组合就形成了所谓 2 格子方法，它是多格子方法的基础。

我们知道，松弛法应用于 h- 离散椭圆型方程 (1.2.1)，当 $h \to 0$ 时，收敛性变得很差。例如，对模型问题(P)，通常的 Jacobi 松弛和 Gauss-Seidel 松弛的谱半径是 $1-O(h^2)$，而最优 SOR 方法的谱半径是 $1-O(h)$。这些松弛法的误差约化性质可以通过将误差 v_h^j 展开成离散 Fourier 级数进行分析。在这展开式中，可粗糙地区分光滑的(低频)和振荡的(高频)误差分量。容易看到，松弛法所以收敛得慢是由于光滑误差分量，对高频误差分量，松弛法的"光顺作用"是很好的。

从下述引理可以知道，粗格子校正过程单独作迭代法时，可能不收敛。

引理 1.2.1　对 CGC 迭代的谱半径成立 $\rho(I_h - I_H^h L_H^{-1} I_h^H L_h) \geq 1$。

证　作 $w_h \in G(\Omega_h)$，$w_h \neq 0$，使 $L_h w_h$ 属于 I_h^H 的零空间，则

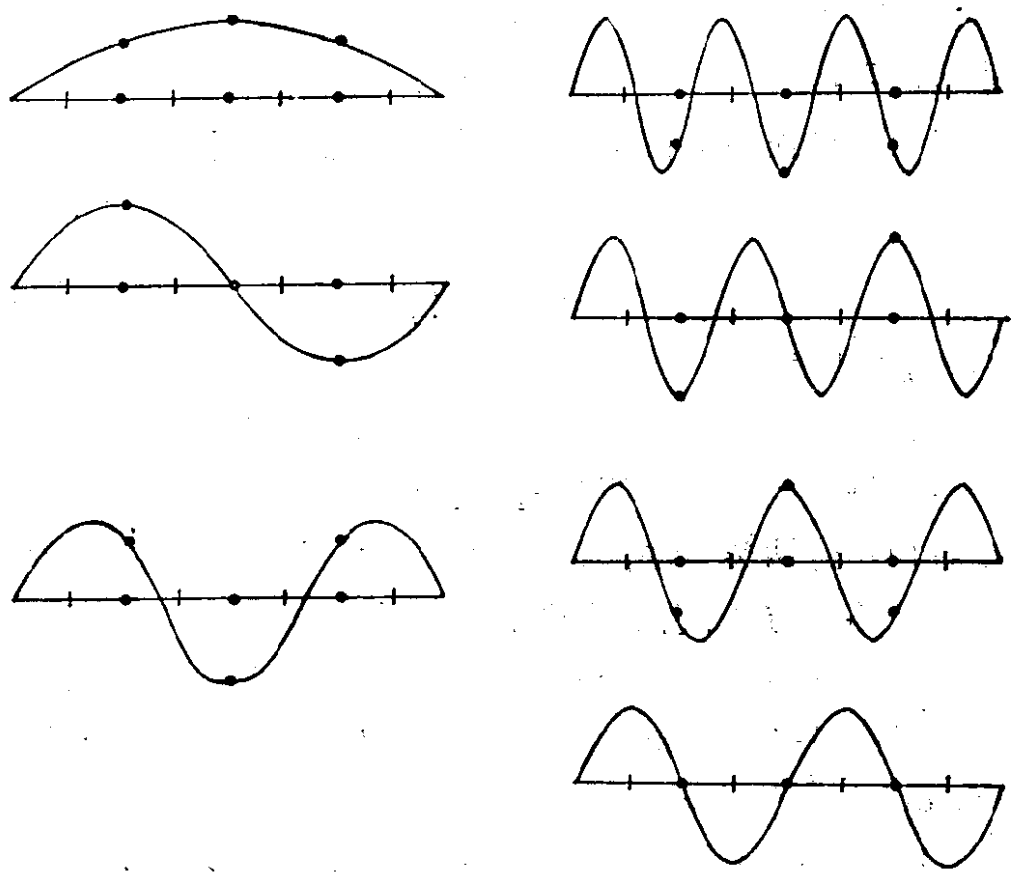
$$(I_h - I_H^h L_H^{-1} I_h^H L_h) w_h = w_h$$

由此即知

$$\rho(I_h - I_H^h L_H^{-1} I_h^H L_h) \geq 1 \qquad \text{证毕。}$$

这说明粗格子残量方程(1.2.13)一般并非是原始残量方程

(1.2.5)的一个合适近似，特别，v_h^i 的那些不能在粗格子 Ω_H 上表示的分量(即在 H 格子上不可见的分量)自然不可能用 Ω_H 校正约化。我们用图 1.2.1 来说明这种现象(当 $h=\frac{1}{2}H$ 时)



在 Ω_H 上可见的分量(波长$>4h$)　　　在 Ω_H 上不可见的分量(波长$\leqslant 4h$)

图 1.2.1　$\sin n\pi x$，当 $h=1/8, H=1/4$ 时的低频分量(见左图，$n=1,2,3$)和高频分量(见右图，$n=4,5,6,7$)

从上面的讨论可知，由原始残量方程(1.2.5)确定的误差，只有当它是"光滑"时才能用 H 格子逼近，而这恰恰是用适当的松弛过程作用后所能达到的。因此把松弛过程和粗格子校正过程组合起来是合适的。这样就得到一个(h,H) 2 格子方法，每个迭代步包含光顺部分和粗格子校正部分。为方便起见，引进记号：

$$\tilde{w}_h=S^\nu(w_h,L_h,f_h) \tag{1.2.19}$$

表示对(1.2.11)式从 w_h 开始应用 ν 次松弛后得到 $\tilde{w}_h$。

从 u_h^i开始，通过(h,H) 2 格子方法一个迭代步的计算，得到 u_h^{i+1}

的过程如下：

（1）光顺部分Ⅰ

对 u_h^j 用给定松弛法的 ν_1（$\geqslant 0$）次迭代计算 $\tilde{u}_h^j$：

$$\tilde{u}_h^j := S^{\nu_1}(u_h^j, L_h, f_h)$$

（2）粗格子校正部分

$$\begin{aligned}
&\text{计算残量：} && \tilde{d}_h^j := f_h - L_h\tilde{u}_h^j \\
&\text{限制残量(由细到粗转换)：} && \tilde{d}_H^j := I_h^H\tilde{d}_h^j \\
&\text{在 } \Omega_H \text{ 上精确求解 } \hat{v}_H^j\text{：} && L_H\hat{v}_H^j = \tilde{d}_H^j \\
&\text{插值校正(由粗到细转换)：} && \tilde{v}_h^j := I_H^h\hat{v}_H^j \\
&\text{计算校正近似：} && \tilde{\tilde{u}}_h^j := \tilde{u}_h^j + \hat{v}_h^j
\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

（3）光顺部分Ⅱ

对 $\tilde{\tilde{v}}_h^j$ 应用给定松弛法的 ν_2（$\geqslant 0$）次迭代计算 u_h^{j+1}：

$$u_h^{j+1} := S^{\nu_2}(\tilde{\tilde{u}}_h^j, L_h, f_h)。$$

由这个过程立即可导出 (h,H) 2 格子方法的迭代矩阵 M_h^H：

引理 1.2.2 $M_h^H = S_h^{\nu_2}K_h^HS_h^{\nu_1}$，其中 S_h 是松弛法 $S(w_h, L_h, f_h)$ 的迭代矩阵，而 $K_h^H := I_h - I_H^hL_H^{-1}I_h^HL_h$ 是 CGC 矩阵。

(h,H) 2 格子方法的分量包括：由 S_h 表征的松弛过程；松弛步数 ν_1 和 ν_2；粗格子 Ω_H；限制算子 I_h^H；粗格子算子 L_H；插值算子 I_H^h。这些分量的选择对所得到的算法影响很大。但对这些分量的选择缺乏一般的准则。我们以后将要讨论的模型问题分析和局部模态分析的主要目的就是确定渐近收敛因子 $\rho(M_h^H)$ 或适当范数下的收缩数 $\|M_h^H\|$，并研究上面提及的一些分量的选择对 $\rho(M_h^H)$ 或 $\|M_h^H\|$ 的影响。

粗格子的选择除了标准加宽 $H=2h$ 外，常用的还有半加宽 $H=(2h_{x_1}, h_{x_2})$，或 $H=(h_{x_1}, 2h_{x_2})$，或奇偶加宽等。对正方形网格的奇偶加宽，Ω_H 等同于网格大小为 $\sqrt{2}h$ 的旋转（$\frac{\pi}{4}$ 弧度的）格子（参见 §3.2）。

粗格子差分算子 L_H 的选取，原则上可以是在某种意义下逼近 L_h