高等学校教材

专科适用

水土保持动态规划

南昌水利水电专科学校 陶鸿钧 编

高 等 学 校 教 材

专 科 适 用

水土保持动态规划

南昌水利水电专科学校 陶鸿钧 编

水利电力出版社

（京）新登字115号

内容提要

本教材旨在介绍动态规划最优化原理在优化水土保持规划方案中的应用，阐述动态规划法的基本思路、结构模型及多阶段决策的优化过程。对于运用计算机递解动态规划问题的方法，亦作了简略介绍。对运用期望数学处理随机性动态规划，以及运用马尔可夫链状态转移概率矩阵进行预测，也以水土保持规划方案的优选为例，作了较详细的介绍。

本教材除适用于水土保持专业，亦可作为成人教育的培训教材和水土保持、水利科技人员的自学用书。

高等学校教材

专科适用

水土保持动态规划

南昌水利水电专科学校 陶鸿钧 编

*

水利电力出版社出版

（北京三里河路6号）

新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店经售

红门印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 7印张 155千字

1992年6月第一版 1992年6月北京第一次印刷

印数 001— 890 册

ISBN 7-120-01523-0/TV·548

定价[illegible].95元

前　言

水土保持是一门涉及了生态科学、环境科学和社会经济学的综合性学科，由于涉及的学科门类众多，给历来的研究工作带来了较大的难度。对于规划所要求的生态环境的改善，社会经济的发展，以及群众生活水平的提高，一般很难准确地提出量化标准。动态规划是一门从总体功能最优出发，充分利用资源，以获得最大效益的近代数学规划方法。用于处理具有序列结构的确定型或随机型的决策问题，具有很高的综合和分析能力。因考虑了大量的水土保持规划问题可运用动态系统理论进行研究和设计，故编写本教材，以期能有助于水土保持科学的发展和系统工程知识在水保领域的普及。

高等工程专科人才培养的基本规格要求学生对本专业的新知识和新技术有所掌握，故开设水土保持动态规划课程有利于拓宽学生的知识面，培养学生吸收和运用新技术的能力，这是适应我国经济建设发展所需要的。早在1984年原水利电力部农田水利水土保持司便给我校提出了举办系统工程培训班的任务，并要求在学生班中开设必修课程，故本教材也是为满足教学需要而编写的。

动态规划虽然是一门近代数学规划课程，但为了与专业紧密相结合，也是一门应用性较强的实践性课程，当用于水土保持领域，便涉及了制约水土保持工作的自然环境和社会经济条件，故本课程应在学生具有一定生产知识的基础上开设，以有利于培养学生分析和综合实际问题的能力；同时也借以增强课程的针对性和应用性，并为后继课程——水土保持规划奠定数学分析基础，这是编写本教材的基本思路。另一方面，为了有助于科技工作者自学，除内容侧重于应用外，对于问题的阐述，采取了深入浅出的表达方法，力求通俗易懂，使科技工作者通过自学，能运用动态规划最优化原理从事水土保持规划和管理运行工作。

为编写本教材，参阅了较多的文献资料，借此谨向有关文献资料的编者、著者、译者致以深切谢意。本教材谨承武汉水利电力学院徐正凡教授审阅，借此一并谨致谢意。

但深感限于水平，无论是内容的取舍或阐述，均未能较全面地反映出动态规划原理和方法在水土保持领域中的应用，且还可能存在谬误，敬希读者给予批评和指正。

编者

1991年7月

目　　录

第一章 动态规划原理

第一节 水土保持动态规划问题的提出

动态规划是最优化技术中应用较广泛的一种近代数学规划方法，是运筹学的一个独立的分支，通常用于处理经济管理和生产管理中具有多变量的时序性问题。把一个多变量的问题按照时序划分为若干个阶段，变换为只具有单一变量的多阶段决策问题来处理。亦即将问题分解为若干个子问题，然后逐阶段对子问题求解。这在计算程序上常比运用线性规划方法，或非线性规划方法便捷，工作量亦较简省。

在水土保持规划中，常会遇到需要从时间上划分阶段处理的问题。例如，水土流失治理的投资规划，便需要依据治理效益制定，而治理效益是随着时间而变化的，如果将投资视为状态，则这个状态便会随着时间而变化，因而投资过程便是一个随时间而变化的动态过程，每一时段的投资便是分时段作出的决策。显然，随着动态过程分时段作出的决策是要保证治理效益总体最优的，从而在决策过程中便存在投资方案的优选问题，用于对投资方案进行优选的方法便是动态规划法。由于动态规划法处理问题是分时段作出决策，如果将时段视为阶段，则决策便是分阶段作出的，因而动态规划法也称为分阶段决策法，处理的问题便是个多阶段决策的动态问题。

在水土保持规划中，还会遇到另外两类多变量问题：其中一类的性质虽与时间有关，亦即状态不随时间过程而变化，但随资源的分配过程而变化。例如在枯水季节，需要将有限的灌溉流量分配给若干个缺水地区，便应依据全地区灌溉总效益最优，而不是某个别地区效益最优的原则来选择配水方案；同时对于任一地区而言，其灌溉效益与用水量也不一定呈线性关系。从而便存在配水方案的优选问题，优选过程是对若干个地区的用水量逐个地作出决策。如果将配水量视为状态，则此状态便随着决策过程而变化，这个状态变化过程亦即为动态过程。由于这类问题的决策是依据对若干地区配水的先后顺序依次作出的，则阶段的划分便以地区为对象。如果将地区的分配过程模拟为时序过程，也便成为了多阶段决策的动态问题了。

另一类多变量问题的性质是：其状态既不随时间过程而变化，也不随资源分配过程而变化，而是随着空间位置的转移过程而变化。例如渠道路线的选择：从甲地至乙地，中途须经过若干个灌溉点，而且每两个灌溉点之间均有若干条渠道路线可供选择，要求选择一条从甲地至乙地投资最省的渠线。显然，如果用各灌溉点之间的渠线进行组合，供选择的方案便不止 1 个，而是有若干个，因而同样存在方案的优选问题。过去常采用枚举法选择，即将全体渠线方案计算出来，从中选择投资最省的方案，计算工作量是很繁琐的。如果运用动态规划法把从甲地至乙地经过的灌溉点划分为若干个阶段，逐阶段对路线的选择作出决策，亦即逐阶段决定投资，则投资作为状态便会随着渠线空间位置的转移过程而变

化，因而这类问题也具有动态过程，只不过阶段是按照渠段划分的。如果把渠段的转移过程模拟为时序过程，也便同样成为多阶段决策的动态问题了。

综合上述，不论是问题自身具有时序性，还是借助模拟使其具有时序性，均可按照时序划分阶段处理。进而如果将问题视为由若干个相互联系和相互制约的因素所构成的具有特定功能的有机体，亦即将问题视为系统，则说明系统所处的状态是随阶段转移而变化的，故称状态随阶段转移而变化的过程为动态过程。从而不难理解：动态过程是从时序的概念给予定义的，故又称这种具有时序性的系统为动态系统。

将问题按照时序划分为若干个阶段，也就是将问题分解为若干个子问题，如果能有一种方法对各个阶段的子问题依次作出决策，并且逐阶段集合最优决策，形成最优方案，最终集合所有子问题的最优决策，形成全系统的最优方案，问题的优化便获得了解决，这便是运用动态规划法优化具有多变量时序性问题的途径。

水土流失综合治理规划的时序性是很明显的，既要追溯过去，也要考虑当前，还要照顾将来。而且水土保持规划实际是一项经济措施，明显地存在经济效益的优化问题，它要求以最节省的人力、物力和财力在最短期限内，最大限度地取得生态效益和经济效益，故运用动态规划法进行方案优选将有助于提高水土保持规划的合理性和可行性。

第二节　动态规划法的基本思路

一个多变量的动态规划问题，按照时序过程划分为若干个阶段，每一阶段便只对应于一个固定时段，如果全时序过程无其他制约状态的因素输入，则相应于每一固定时段的状态便只服从其自身的变化规律，而不受外来因素的影响。从而，依照时序而划分的子问题便是个静态问题，每一个子问题只含有一个状态变量，故动态规划法的基本思路便是把一个多变量的动态规划问题划分为若干个阶段，使其转化为只含有单一变量的静态问题。处理方法便是依照时序逐阶段进行决策，形成方案，从决策集合中选择出最优方案，直到对最终阶段的状态作出决策，便形成了全系统的最优决策序列，从而也就确定了总体最优方案。下面举例具体说明动态规划法的基本思路。

【例 1】 某地区的排水河道，因上游水土流失严重，导致淤塞，汛期洪水漫溢河槽，大面积的破坏基本农田，为解决此矛盾，除在上游修建拦沙工程，下游则计划新开河道。规划的河道路线方案如图1-1所示。各条路线的投资列如表1-1。试决策出投资最省的路线。

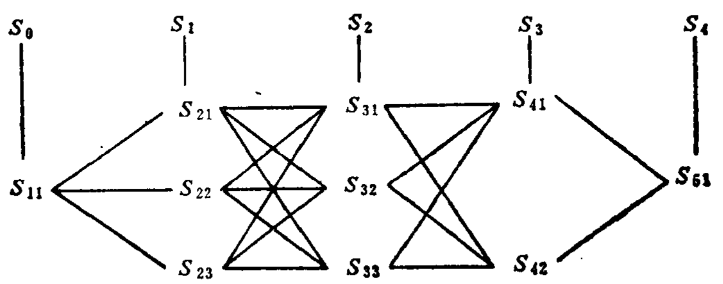

图 1-1　河道路线方案图

表 1-1　　　　　　　　　　河道路线投资表

$S_0—S_1$				$S_1—S_2$				$S_2—S_3$			$S_3—S_4$	
起　点	终　点			起　点	终　点			起　点	终　点		起　点	终　点
	S_{21}	S_{22}	S_{23}		S_{31}	S_{32}	S_{33}		S_{41}	S_{42}		S_{41}
S_{11}	3	5	3	S_{21}	7	5	7	S_{31}	2	5	S_{41}	4
				S_{22}	4	3	5	S_{32}	7	4	S_{42}	5
				S_{23}	6	2	6	S_{33}	4	4		

【解】 如果将路线的结点视为状态，则如起始点S_0便只有 1 种状态S_{11}，转折点S_1和S_2便各有 3 种状态，即S_{21}、S_{22}、S_{23}和S_{31}、S_{32}、S_{33}，转折点S_3只有 2 种状态S_{41}、S_{42}，终点也只有 1 种状态S_{51}。所有的状态不仅位置不相同，由它所决定的路线投资也不相同，因而本算例是个状态随空间位置转移而变化的动态问题。动态过程是由S_0到S_1，再依次经过S_2、S_3到达S_4，是一个由18条路线所组成的动态系统。运用动态规划法优选路线方案，首先须将河道依照流程划分为 4 个阶段，将一个具有 4 个变量的动态问题转化为只具有单一变量的多阶段决策问题处理，故阶段划分为

第 1 阶段$S_0—S_1$　　第 3 阶段$S_2—S_3$

第 2 阶段$S_1—S_2$　　第 4 阶段$S_3—S_4$

然后逐阶段进行决策，即从阶段的状态中，选取投资最省路线所通过的状态。因而任一阶段的决策是依据本阶段初的状态作出的，本阶段初的状态也就是前阶段末的状态，因为当前阶段的路线一旦确定，它的到达点也就被确定，此到达点即为前阶段末的状态。本阶段路线选择的起点，亦即本阶段初的状态也就是前阶段所选择的路线到达点。例如第 3 阶段初的状态也是第 2 阶段末的状态，有

$$S_2=\{S_{31},\ S_{32},\ S_{33}\}$$

3 种状态，它与本阶段末的 2 种状态：

$$S_3=\{S_{41},\ S_{42}\}$$

组成了 6 条供选择的路线，但只能选择其中的 2 条作为最优路线供第 4 阶段决策：一条到达S_{41}，一条到达S_{42}。对于到达S_{41}的路线而言，决策的对象有 3 条。即

$$d_3=\{S_{31}S_{41},\ S_{32}S_{41},\ S_{33}S_{41}\}$$

d_3表示第 3 阶段的决策，但只能选择其中的 1 条，作为到达S_{41}的最优决策。对于到达S_{42}的路线而言，决策的对象也有 3 条。即

$$d_3=\{S_{31}S_{42},\ S_{32}S_{42},\ S_{33}S_{42}\}$$

同样只能从中选择一条作为到达S_{42}的最优决策。本阶段的决策既然是从前阶段末的状态中选择的，而决策的目的是要确定本阶段末的状态，当本阶段末的状态一旦被决策，则投资也就被相应地确定了下来。故本阶段末的状态是由前阶段末的状态提供选择条件，然后由本阶段的决策所确定。其函数关系可用通式表达为

$$S_i=T_i(S_{i-1},\ d_i) \tag{1-1}$$

式中下角 i 为决策过程中任一阶段的编号。本算例有 4 个阶段，便有

$$i=(1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

因为当阶段末的状态一旦被确定，路线也就被确定，从而路线投资便被相应地确定了下来，故路线投资同样是前阶段末的状态与本阶段决策的函数。其通式写为

$$r_i=r_i(S_{i-1},\ d_i) \tag{1-2}$$

如果确定的路线投资为最省，则采用星号作上角，表示为

$$r_i^*=r_i(S_{i-1},\ d_i^*) \tag{1-3}$$

d_i^*表示最优决策. 式(1-1)称为动态规划状态转移方程，也称为系统方程，它表达了由前阶段末状态转移为本阶段末状态的函数关系。式(1-2)称为动态规划的阶段目标或阶段效益. 决策既然是从前阶段末的状态集合中选择的，那末前阶段末状态便为本阶段决策提供了选择范围，但也仅仅是提供选择范围，并不决定本阶段的决策，因本阶段的决策是依据路线全程投资最省作出的. 故当决策一旦作出，则本阶段后部各阶段的投资决策也就与前阶段末，以及前阶段以前的状态无关了，这是动态规划系统的一个很重要的性质，由于这个性质便使动态规划问题的计算过程，既可从前往后顺阶段次序进行，也可从后往前逆阶段次序进行. 一般常采用后一种，因解算动态规划问题最重要的依据是初始条件，而最末阶段的初始条件一般是较容易确定的。下面试采用从后往前的步骤递解例1，亦即计算从第4阶段开始，逆着路线顺序推算，直到推算至第1阶段得出最优路线方案，计算便告结束。

第4阶段计算

因第4阶段的路线投资是由第3阶段末的状态提供选择范围，由本阶段的决策所确定，其阶段目标的表达式便为

$$r_4=r_4(S_3,\ d_4)$$

第3阶段末的状态也是第4阶段初的状态，此处有2种情况. 即

$$S_3=\{S_{41},\ S_{42}\}$$

其与第4阶段末的状态

$$S_4=\{S_{51}\}$$

构成2条路线方案$S_{41}S_{51}$和$S_{42}S_{51}$。因2条路线共一个终点，故选择阶段末状态的决策是唯一的，只有S_{51}. 从而便需要将路线$S_{41}S_{51}$和$S_{42}S_{51}$均作为决策路线转移至第3阶段，才可决定取舍。2条路线的阶段目标分别写为

$$r_4(S_{41})=r_4(S_3,\ d_4)=r_4(S_{41},\ S_{41}S_{51})=4$$

和

$$r_4(S_{42})=r_4(S_3,\ d_4)=r_4(S_{42},\ S_{42}S_{51})=5$$

因一旦作出的决策是最优决策，相应于最优决策的阶段目标也是最优阶段目标，故第4阶段2条路线的阶段目标应表示为

$$r_4^*(S_{41})=r_4(S_3,\ d_4^*)=r_4^*(S_{41},\ S_{41}S_{51})=4$$

$$r_4^*(S_{42})=r_4(S_3,\ d_4^*)=r_4^*(S_{42},\ S_{42}S_{51})=5$$

第3阶段计算

第3阶段初与阶段末的状态分别为

$$S_2=\{S_{31},\ S_{32},\ S_{33}\}\text{和}S_3=\{S_{41},\ S_{42}\}$$

用状态S_2与S_3进行组合便有 6 条可供选择的路线，其投资分别为

$$r_3(S_{31},\ S_{31}S_{41})=2 \quad r_3(S_{32},\ S_{32}S_{41})=7 \quad r_3(S_{33},\ S_{33}S_{41})=4$$

$$r_3(S_{31},\ S_{31}S_{42})=5 \quad r_3(S_{32},\ S_{32}S_{42})=4 \quad r_3(S_{33},\ S_{33}S_{42})=4$$

因动态规划法所寻求的目标是全动态系统的最优状态，故用于处理[例1]，便是寻求路线全程总投资最省的方案，而不是满足于某一阶段的路线投资最省。因为某一阶段所选取投资最省的路线并不一定能够保证总投资最省。从而说明用于确定阶段目标的决策必须服从全系统最优的原则，而不应从本阶段的效益出发选取投资最省的路线，应从逐阶段决策集合的投资方案中选取投资最省的方案。第 3 阶段的投资方案便是本阶段各条路线的投资与第 4 阶段的投资之和。表达式写为

$$R_3(S_2)=r_3(S_2,\ d_3)+r_4(S_3,\ d_4) \tag{1-4}$$

式（1-4）称为第 3 阶段的子系统策略，或简称第 3 阶段子策略。第 4 阶段是本算例的最末阶段，其后部各阶段的投资为零，故第 4 阶段的子策略便是本阶段的阶段目标，写为

$$R_4(S_3)=r_4(S_3,\ d_4)$$

动态规划法是逐阶段进行决策的，故在进行第 3 阶段决策时，第 4 阶段便已作出了最优决策，由最优决策形成的子策略是最优子策略。故第 4 阶段的子策略便写为

$$R_4^*(S_3)=r_4(S_3,\ d_4^*)$$

上式说明最末阶段的最优子策略便是本阶段的最优阶段目标。从而第 3 阶段的子策略便可写为

$$R_3(S_2)=r_3(S_2,\ d_3)+R_4^*(S_3)$$

由于第 3 阶段初与阶段末的状态共构成了 6 条可供选择的路线，故子策略便有 6 个。对第 3 阶段进行决策实际便是从 6 个子策略中选择最优子策略。为此不难理解：最优决策总是相应于最优子策略的，第 3 阶段最优子策略的选择过程列如表1-2。当对第 3 阶段决策时，是从阶段初 3 个决策集合$D_3(S_{31})$、$D_3(S_{32})$、$D_3(S_{33})$中各选择一条路线，其阶段目标能与后部子系统的策略形成第 3 阶段的最优子策略。对$D_3(S_{31})$而言：供决策的路线有$S_{31}S_{41}$和$S_{31}S_{42}$，选择$S_{31}S_{41}$作为最优决策。对$D_3(S_{32})$而言：供决策的路线有$S_{32}S_{41}$和$S_{32}S_{42}$，选择$S_{32}S_{42}$作为最优决策。对$D_3(S_{33})$而言：供决策的路线有$S_{33}S_{41}$和$S_{33}S_{42}$，选择$S_{33}S_{41}$作为最优决策。显然，这些决策都是依据本阶段子策略最优进行选择的，亦即依据第 3 、第 4 二个阶段的投资之和为最省选择的，其计算式分别为

表 1-2　**第3阶段最优子策略决策过程表**

S_3	$R_3(S_3)=r_3(S_3,\ d_3)+R_4^*(S_3)$		$R_3^*(S_2)$	d_3^*
	S_{41}	S_{42}		
S_{31}	2 + 4 = 6	5 + 5 = 10	6	$S_{31}S_{41}$
S_{32}	7 + 4 = 11	4 + 5 = 9	9	$S_{32}S_{42}$
S_{33}	4 + 4 = 8	4 + 5 = 9	8	$S_{33}S_{41}$

$$R_3^*(S_{31})=r_3(S_{31},\ S_{31}S_{41})+R_4^*(S_{41})=2+4=6$$
$$R_3^*(S_{32})=r_3(S_{32},\ S_{32}S_{42})+R_4^*(S_{42})=4+5=9$$
$$R_3^*(S_{33})=r_3(S_{33},\ S_{33}S_{41})+R_4^*(S_{41})=4+4=8$$

第 3 、第 4 二个阶段可供选择的路线共 6 条，经过形成子策略，并对第 3 阶段作出决策，优选出 3 条路线，即

$$S_{31}-S_{41}-S_{51}\quad S_{32}-S_{42}-S_{51}\quad S_{33}-S_{41}-S_{51}$$

第 2 阶段计算

第 2 阶段的子策略是本阶段的路线投资与其后部子系统所含第 3 、 4 二个阶段的最优投资之和，亦即为第 2 阶段的阶段目标与其后部子系统最优策略之和。表达式写为

$$R_2(S_1)=r_2(S_1,\ d_2)+R_3^*(S_2)$$

第 2 阶段初与阶段末的状态各有 3 种情况，即

$$S_1=\{S_{21},\ S_{22},\ S_{23}\}\text{和}S_2=\{S_{31},\ S_{32},\ S_{33}\}$$

共构成了 9 条可供选择的路线，亦即本阶段的阶段目标与其后部子系统构成了 9 个子策略，需要分别从决策集合$D_2(S_{21})$、$D_2(S_{22})$、$D_2(S_{23})$中各决策出一个最优子策略。决策过程列如表 1-3。表 1-3 表明：通过S_{21}投资最省的路线是$S_{21}—S_{31}—S_{41}—S_{51}$，最优子策略为

表 1-3　　第2阶段最优子策略决策过程表

S_1	$R_2(S_1)=r_2^*(S_1,\ d_2)+R_3^*(S_2)$			$R_2^*(S_1)$	d_2^*
	S_{31}	S_{32}	S_{33}		
S_{21}	7 + 6 = 13	5 + 9 = 14	7 + 8 = 15	13	$S_{21}S_{31}$
S_{22}	4 + 6 = 10	3 + 9 = 12	5 + 8 = 13	10	$S_{22}S_{31}$
S_{23}	6 + 6 = 12	2 + 9 = 11	6 + 8 = 14	11	$S_{23}S_{32}$

$$R_2^*(S_1)=r_2^*(S_{21},\ S_{21}S_{31})+R_3^*(S_{31})=7+2+4=13$$

通过S_{22}投资最省的路线是$S_{22}—S_{31}—S_{41}—S_{51}$。最优子策略为

$$R_2^*(S_{22})=r_2^*(S_{22},\ S_{22}S_{31})+R_3^*(S_{31})=4+2+4=10$$

通过S_{23}投资最省的路线是$S_{23}—S_{32}—S_{42}—S_{51}$，最优子策略为

$$R_2^*(S_{23})=r_2^*(S_{23},\ S_{23}S_{32})+R_3^*(S_{32})=2+4+5=11$$

第 1 阶段计算

第 1 阶段策略是本阶段的阶段目标与其后部子系统所含第 2 、 3 、 4 三个阶段的阶段目标之和，亦即第 1 阶段的阶段目标与其后部子系统最优策略之和。因本系统只有 4 个阶段，故第 1 阶段策略称为全策略。表达式写为

$$R_1(S_0)=r_1(S_0,\ d_1)+R_2^*(S_1)$$

第 1 阶段初的状态只有 1 种情况S_{11}，阶段末的状态有 3 种情况，共构成 3 个全策略。表 1-4列出了第 1 阶段全策略的优选过程。优选结果为：由第 1 阶段最优决策$S_{11}S_{23}$形成的最优全策略为

表 1-4　　第1阶段最优全策略决策过程表

S_0	$R_1(S_0)=r_1(S_0,\ d_1)+R_2^*(S_1)$			$R_1^*(S_0)$	d_1^*
	S_{21}	S_{22}	S_{23}		
S_{11}	3 +13=16	5 +10=15	3 +11=14	14	$S_{11}S_{23}$

$$R_1^*(S_0)=r_1^*(S_0,\ S_{11}S_{23})+R_2^*(S_1)=3+2+4+5=14$$

此全策略代表的路线为S_{11}—S_{23}—S_{32}—S_{42}—S_{51}，此即例 1 所寻求的投资最省的路线。各阶段的最优决策分别为

$$d_1^*=S_{11}S_{23}\quad d_2^*=S_{23}S_{32}\quad d_3^*=S_{32}S_{42}\quad d_4^*=S_{42}S_{51}$$

第三节　动态规划最优化原理

一、动态规划目标函数

通过对例 1 的分析，可知任一阶段的子策略可用通式表述为

$$R_i(S_{i-1})=r_i(S_{i-1},\ d_i)+R_{i+1}^*(S_i) \qquad (1\text{-}5)$$

当经过对子策略的优选，亦即对本阶段初的状态作出了最优决策，而形成的子策略便为最优子策略，其表达式便写为

$$R_i^*(S_{i-1})=r_i(S_{i-1},\ d_i^*)+R_{i+1}^*(S_i)$$

或写为

$$R_i^*(S_{i-1})=\underset{d_i}{\mathrm{Opt}}\{r_i(S_{i-1},\ d_i)+R_{i+1}^*(S_i)\} \qquad (1\text{-}6)$$

Opt是英文Optimization的缩写，意为最优化，可表示极大或极小，依据动态规划问题所提出的优化目标而定，当目标以收益为衡量标准，便取极大化；当以成本或资源的消耗为衡量标准，便取极小化。

策略是本阶段的阶段目标与其后部子系统所含各阶段的阶段目标之和，如果将动态过程划分为 n 个阶段，则用阶段目标之和表达的任一阶段的子策略与最优子策略便可写为

$$R_i(S_{i-1})=\sum_i^n r_i(S_{i-1},\ d_i)$$

和

$$R_i^*(S_{i-1})=\mathrm{Opt}\sum_i^n r_i(S_{i-1},\ d_i)$$

则系统的最优全策略便写为

$$R_1^*(S_0)=\mathrm{Opt}\sum_{i=1}^n r_i(S_{i-1},\ d_i)$$

阶段目标是由前阶段末的状态提供选择范围，由本阶段的决策所确定，因而策略实际是决策的集合。故表达式亦可写为

$$R_i(S_{i-1})=R(S_{i-1},\ S_n,\ d_i,\ d_{i+1},\ \cdots,\ d_n)$$

同理，最优策略便是各阶段最优决策的集合。故有

$$R_i^*(S_{i-1})=R(S_{i-1}, S_n, d_i^*, d_{i+1}^*, \cdots, d_n^*)$$

或写为
$$R_i^*(S_{i-1})=\underset{d_i}{\mathrm{Opt}}R(S_{i-1}, S_n, d_i, d_{i+1}^*, \cdots, d_n^*)$$

因而不难得出结论：动态规划法的实质是把一个具有序列结构的多变量的动态系统划分为若干个首尾相连接，并存在联系关系的阶段，使转化为只具有单一变量的静态问题来处理，亦即将问题按照阶段划分为若干个子问题，逐阶段对子问题作出决策，形成最优子策略，当取$i=1$便形成了最优全策略，这便是式（1-6）所表达的优化过程。由于式（1-6）所寻求的是最优化目标，故称为动态规划目标函数，或称为动态规划函数基本方程。

二、动态规划最优化原理

从式（1-6）可知：动态规划目标函数由两部份组成。第一部份是本阶段的阶段目标，本阶段也称面临阶段。不难看出，面临阶段的阶段目标只与由前一阶段的决策d_{i-1}所决定的阶段末的状态S_{i-1}有关，而与前一阶段以前的状态与决策无关。而且前一阶段末的状态S_{i-1}也只是为面临阶段的决策d_i提供了选择范围，并不决定面临阶段的最优决策d_i^*。因为最优决策是从前阶末的状态所提供的决策集合中选取的。如例1第2阶段的最优决策所分别从属的决策集合便为

$$d^*(S_{21}S_{31})\in D_2(S_{21})$$

$$d^*(S_{22}S_{31})\in D_2(S_{22})$$

$$d^*(S_{23}S_{32})\in D_2(S_{23})$$

组成动态规划目标函数的第二部份是面临阶段后部子系统的最优策略，即

$$R_{i+1}^*(S_i)=\underset{d_{i+1}}{\mathrm{Opt}}\{r_{i+1}(S_i,d_{i+1})+R_{i+2}^*(S_{i+1})\}$$

显然，$i+1$阶段的阶段目标也只与由前一阶段的决策d_i所决定的状态S_i有关，而与前一阶段以前的状态和决策无关。由此推及，由$i+1$阶段至最末阶段的最优决策系列$d_{i+1}^*, d_{i+2}^*\cdots$，$d_n^*$所构成的最优子策略也只与这个子系统前一阶段末的状态S_i有关，而与前一阶段以前的状态和决策无关。从而得出动态规划的一个十分重要的性质：不论过去的状态与决策如何，对于由前阶段的决策所形成的状态而言，其后部各阶段的决策必须构成最优策略。此即动态规划的最优化原理。因为这个原理是由美国的R.贝尔曼（R.Bellmax）首先提出的，故通常又称为贝尔曼原理。

三、最优化原理的基本思想

（一）无后效性

动态规划最优化原理亦可解释为：由前一阶段末的状态S_{i-1}提供选择范围，由面临阶段的决策d_i所确定的状态S_i，对于其后部子策略$R_{i+1}(S_i)$而言，只不过是一个起始条件；对于最优子策略$R_{i+1}^*(S_i)$的形成并不产生影响。如例1第1阶段末的状态S_{23}只不过是第2阶段子策略的一个起始条件，约束第2阶段的决策只能在$S_{23}S_{31}$、$S_{23}S_{32}$、$S_{23}S_{33}$等3条路线中选择，对于最优路线S_{23}—S_{32}—S_{42}—S_{51}的形成不起决定作用，起决定作用的是整个

路线的投资最省，这便是动态规划具有的无后效性。无后效性说明动态过程的过去状态只能通过面临阶段对将来的动态过程产生影响，并不与将来的动态过程发生直接关系。正因为动态规划问题具有无后效性，才可作为多阶段决策问题处理，并可以从后往前逐阶段形成最优子策略，最终形成全过程的最优策略。

（二）递推求解

依据最优化原理的性质，可知动态规划目标函数式实际是一个用于递推求解的方程，即逆着阶段划分的顺序，从后往前逐阶段作出决策，或者顺着阶段划分的顺序，从前往后逐阶段作出决策，然后集合最优决策形成最优子策略，最终形成全系统的最优策略。[例1]的最优全策略的形成过程如图1-2所示，图中的双线表示最优路线。由图1-2不难归纳出动态规划问题的解算思路：

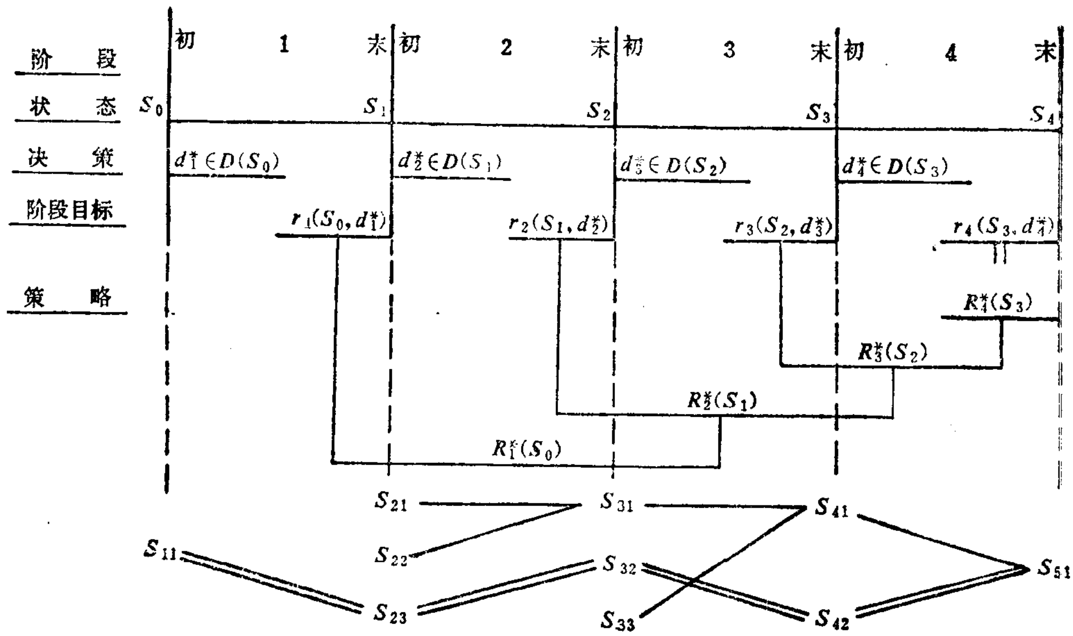

图 1-2　例 1 最优全策略递解过程图

（1）因无后效性，计算既可从前往后逐阶段递解，也可从后往前逐阶段递解。

（2）最优决策是从前阶段末的状态中选择的，但前阶段末的状态只是为面临阶段的决策提供了选择范围，并不决定最优决策。

（3）由最优决策决定的面临阶段的阶段目标与其后部子系统各阶段的阶段目标共同形成最优子策略，最优子策略是逐阶段递推求解形成的。

（4）当递解至第1阶段，便形成了系统的最优全策略。

（三）决策服从最优策略

对于任一阶段决策的作出，不能单纯从本阶段的效益出发，而是需要依据策略最优。因为动态规划所寻求的目标是全系统的效益最优，故要求阶段的局部效益服从全系统的整体效益。正因为动态规划的决策必须服从最优策略，故才保证了最优策略的形成。如例1

第 3 阶段提供的决策有 3 个. 即

$$d_3^*(S_{31}S_{41}) \qquad d_3^*(S_{32}S_{42}) \qquad d_3^*(S_{33}S_{41})$$

其相应的子策略为

$$R_3(S_{31})=6 \qquad R_3(S_{32})=9 \qquad R_3(S_{33})=8$$

如果单纯考虑本阶段投资最省，便应选取阶段目标为$r_3(S_{31}, S_{31}S_{41})=2$和子策略为$R_3(S_{31})=6$的路线。然而为了保证整个路线的总投资最省，却选取了阶段目标为$r_3(S_{32}, S_{32}S_{42})=4$和子策略为$R_3(S_{32})=9$的路线。因为选择通过$S_{31}$的总投资为17，而选择通过$S_{32}$的总投资只有14. 因而动态规划法是一种既将本阶段与后部子系统分开来，但又把本阶段的阶段目标与其后部子系统的策略结合运筹的一种最优化方法。

思考题和习题一

思考题

1.水土保持规划具有序列结构，试举1～2例，并说明其实施过程的动态性质。

2.为什么将一个具有序列结构的多变量问题，划分为若干个子问题后，一般可作为多阶段决策问题处理，并且简化了计算工作量。

3.通过对例 1 的递推求解，试思考阶段、决策、状态三者之间的关系及最优全策略的形成过程。

4.试归纳动态规划函数基本方程

$$R_i^*(S_{i-1})=\underset{d_i}{\mathrm{Opt}}\{r_i(S_{i-1},d_i)+R_{i+1}^*(S_i)\}$$

应遵循的最优化约束条件。

5.为什么由于动态规划无后效性，便可以从后往前逆阶段顺序递解，而不会影响计算成果？

6.任一阶段最优子策略的形成取决于什么因素？该因素与前一阶段的决策和状态存在什么关系？

7.为何最优策略便是最优决策的集合？任一阶段子系统最优决策集合是在什么边界条件的约束下始形成该子系统最优策略的？

8.从最优化目的而言，贝尔曼原理提供了什么理论依据？

习题

1.E地需要用电，计划从A地架设线路，中途经过 3 个站，第 1 站S_1只有B 1 个点，

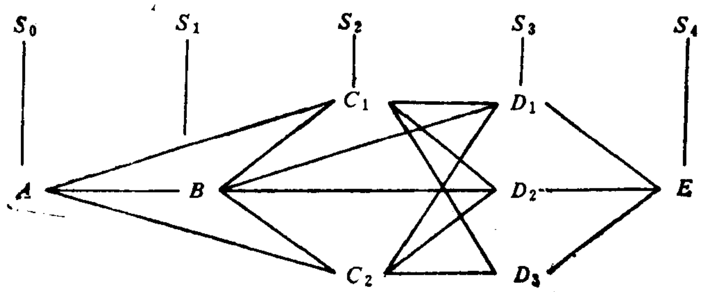

图 1-3 线路相关位置图

第 2 站S_2有C_1和C_2 2 个点，可任选一个点，第 3 站S_3有D_1、D_2、D_3 3 个点，亦可任选一个点，试决策出 1 条从A地至E地投资最省的路线。路线的相关位置如图1-3 所示。二点之间连线的投资列如表1-5。

表 1-5　　　　　　　　　　　　　线 路 投 资 表

$S_0—S_1$				$S_1—S_2$					$S_2—S_3$				$S_3—S_4$	
起点	终点			起点	终点				起点	终点			起点	终点
	B	C_1	C_2		C_1	C_2	D_1	D_2		D_1	D_2	D_3		E
A	4	6	3	B	3	8	6	7	C_1	5	7	3	D_1	4
									C_2	8	2	4	D_2	9
													D_3	3

2.某水土保持试验场购进5t化肥，计划分配给三片试验地，分配数和效益列如表 1-6，问分配方案应如何选择？可获最高效益。

表 1-6　　　　　　　　　　　　　化 肥 投 入 效 益 表

化肥 (t)	试验地 甲	试验地 乙	试验地 丙	化肥 (t)	试验地 甲	试验地 乙	试验地 丙
0	0	0	0	3	9	11	11
1	3	5	4	4	12	11	12
2	7	10	6	5	13	11	12

第二章　确定型动态规划

第一节　确定型动态规划的类型

运用动态规划法寻求最优化目标，是逐阶段进行决策的，决策目的在于确定本阶段末的状态，决策范围则由前阶段末的状态所提供。每当作出一个阶段的最优决策，便相应地完成了一个阶段的状态转移，这种为形成最优子策略而进行的由前阶段末状态转移为后阶段末状态的函数关系便是式（1-1）所表示的系统方程：

$$S_i = T_i(S_{i-1},\ d_i)$$

因而动态规划阶段转移的特征便是用状态转移来描述的，转移效果则取决于本阶段的决策。如果在阶段转移过程中，没有随机因素的输入，亦即状态不受随机因素的影响，可用确定的数值来表示，则这类动态规划便是属于确定型的。

确定型动态规划一般可分为二类：一类具有时序性，另一类不具有时序性。对于具有时序性的确定型动态规划，由于时间是连续的，其状态转移关系有时可用函数表达，故一般也可用线性规划或非线性规划等方法求解。但对于非时序性的确定型动态规划，其状态转移关系一般不具有函数关系，只能用离散数值表达，从而运用线性规划或非线性规划求解是有困难的。故通常依据问题给出的条件，将决策对象的分配过程或空间位置变化过程模拟为时序过程，亦即引入时序概念，将问题转化为多阶段决策问题处理。

第二节　构成确定型动态规划的结构单元

依据最优化原理而建立的动态规划目标函数：

$$R_i^*(S_{i-1}) = \underset{d_i}{\mathrm{Opt}}\{r_i(S_{i-1},\ d_i) + R_{i+1}^*(S_i)\}$$

因具有无后效性，故可以从后往前逐阶段形成最优子策略，这是递解动态规划问题的必要条件。但对于形成最优子策略的状态转移关系的运筹却既无一定的公式可借，也无一定的方法可循，而是需要依据题意给出的计算条件而定。但不论给出的计算条件如何，对于确定型动态规划的构成，均必须具有三个结构单元。即

①有可用系统方程表达的多阶段的状态转移关系：

$$S_i = T_i(S_{i-1},\ d_i)$$

②有限制决策范围的约束条件：

$$d_i \in D(S_{i-1})$$

③有可用函数关系或离散数值表达的最优化目标：

$$R_i^*(S_{i-1}) = \underset{d_i}{\mathrm{Opt}} R(S_{i-1},\ S_n,\ d_i,\ d_{i+1}^*,\ \cdots,\ d_n^*)$$