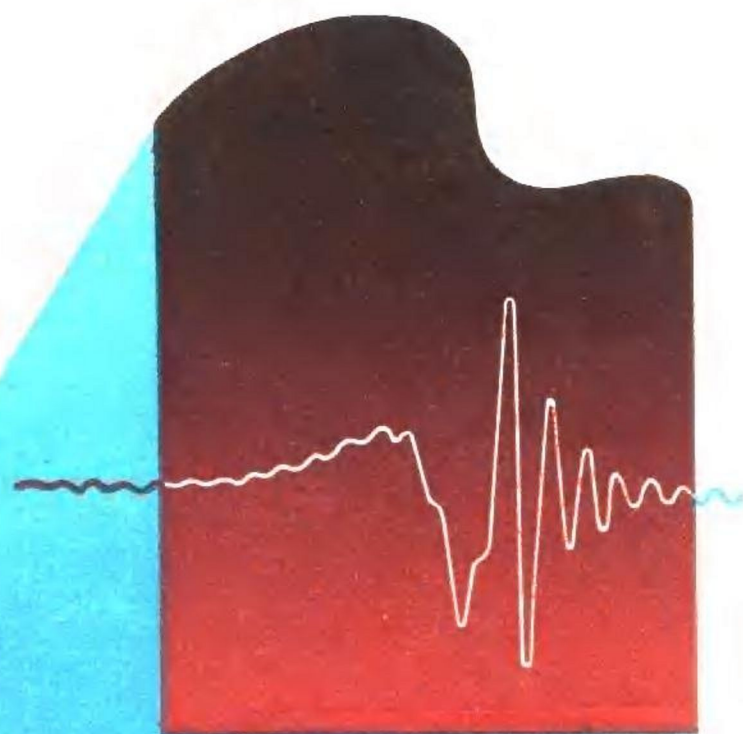




构造电法 ZHONGGUO WUHAN YUJIASHAN 勘探

陈乐寿 王光镔 编

● 中国地质大学出版社



构造电法勘探

陈乐寿 王光镔 编

P631.3 / 012



中国地质大学出版社

内 容 提 要

本书介绍了几种主要的构造电法勘探方法：直流电阻率测深法、大地电磁测深法、地磁测深法、频率测深法、瞬变电磁测深法的基本原理。本书可供勘查地球物理专业的大学生和研究生作教学用书，也可供相近专业的大学生和从事物探工作的生产、科技人员参考。

高等学校教材

构造电法勘探

陈乐寿 王光镔 编

责任编辑 徐乃和 陈绪诚

责任校对 杨 霖

中国地质大学出版社出版

(武汉市 喻家山)

中国地质大学出版社印刷厂印刷 湖北省新华书店经销

开本 787×1092 1/16 印张 13.25 字数 339 千字

1991年8月第1版 1991年8月第1次印刷

印数1—1000册

ISBN 7-5625-0574-8/P·193

定价：3.56元

前 言

构造电法是地质院校勘查地球物理专业的主要专业课程之一。近二十年来，以勘探石油、煤田、地热资源和深部地质构造为主要目的的构造电法有了很大的发展，传统的电测深法由于应用了新技术得到改进，同时，又出现了一些新方法。构造电法的地质效果十分显著，如在地震条件不利的逆掩断层带寻找油气田方面、在浅部或深部地热资源调查方面取得的成绩令人鼓舞。以电磁感应理论为基础的测深方法为地球深部构造的研究开拓了新领域，成为一种不可缺少的资料。因此，向物探专业大学生介绍这方面的知识是十分必要的。

本书主要介绍直流电测深法、大地电磁测深法、地磁测深法、频率测深法和瞬态电磁法。考虑到本书的读者多数已学习过勘查地球物理专业的基础课程，并具有基本的电法勘探知识，所以书中对电法勘探的某些基本概念，如岩石电性、视电阻率等不再作专门阐述。本书力求对各种方法的原理作详细的表述，而对仪器、野外工作方法等未作深入讨论。

本书第二章、第三章和第四章第六节由王光镔执笔，其余部分由陈乐寿执笔。

由于作者水平有限，书中可能存在许多错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

目 录

前 言	(1)
第一章 电阻率法测深	(2)
第一节 基本理论	(3)
一、水平层状介质表面上的电位分布	(3)
二、核函数及其与地下介质参数之间的关系	(7)
三、视电阻率函数	(10)
四、确定电阻率法滤波器的方法	(15)
1. 直接积分方法	(15)
2. 傅氏变换方法	(17)
3. 最小二乘方法	(18)
五、视电阻率理论曲线的计算及不同视电阻率曲线之间的转换	(23)
1. 数值积分方法	(23)
2. 镜像点法	(24)
3. 分解成部分分式的方法	(24)
4. 线性滤波方法	(24)
第二节 电测深观测资料的解释	(30)
一、近似解释方法	(30)
1. 联合使用辅助量板与二层量板的方法	(30)
2. 联合使用辅助量板与三层量板的方法	(33)
3. 利用电阻率变换函数二层曲线的方法	(34)
二、迭代解释方法	(38)
1. 一般介绍	(38)
2. 非自动迭代解释方法	(41)
3. 自动迭代解释方法	(41)
三、直接解释方法	(52)
1. 非自动的直接解释方法	(52)
2. Kunetz—Rocroi自动直接解释方法	(52)
3. Koefoed自动直接解释方法	(55)
4. Szaraniec自动直接解释方法	(56)
第三节 其他问题	(58)
一、各向异性的影响	(58)
二、电阻率连续变化的影响	(61)
三、倾斜边界面的影响	(63)
四、垂直接触面的影响	(66)
五、水上电阻率测深——水层对电阻率测深测量的影响	(67)

六、二维正演与反演问题	(69)
第二章 大地电磁测深法	(73)
第一节 无限均匀半空间介质中的大地电磁场	(73)
第二节 水平均匀层状介质中的大地电磁场	(77)
第三节 大地电磁测深视电阻率曲线	(79)
一、二层视电阻率曲线的性质	(80)
二、三层视电阻率曲线的性质	(85)
三、阻抗的相位特性	(88)
第四节 水平非均匀介质中的大地电磁场	(89)
一、二维介质中的大地电磁场	(89)
二、三维介质中的大地电磁场	(93)
三、倾子和倾子极化图	(96)
第五节 大地电磁测深资料的处理与解释	(96)
一、数据处理	(98)
二、大地电磁测深数据的反演	(107)
三、二维介质模型的正演	(112)
第六节 大地电磁测深应用实例	(122)
第三章 地磁测深法	(123)
第一节 内场和外场的分离	(123)
一、高斯球谐分析法	(123)
二、面积分法	(126)
第二节 地球的电磁感应	(127)
一、球体上的电磁感应	(127)
二、平面地球的电磁感应	(129)
第三节 感应矢量	(131)
第四章 人工源频率测深方法原理	(137)
第一节 位和场的基本方程式	(137)
一、电磁场的矢量位和波动方程式	(137)
二、赫芝矢量	(139)
三、谐变时变场	(140)
四、Fitzgerald矢量位	(141)
五、标量拉普拉斯算子和矢量拉普拉斯算子	(141)
第二节 一次场	(142)
一、振荡偶极子的矢量位	(142)
二、电偶极子的场	(145)
三、磁偶极子的场	(146)
第三节 各向同性层状介质中的电磁场	(147)
一、边界条件	(147)
二、层状大地上的垂直磁偶极子	(147)
三、层状地球模型上的水平电偶极子的场	(152)

第四节 电磁场的计算方法.....	(156)
一、数值积分方法.....	(156)
二、数字滤波方法.....	(157)
第五节 电磁测深曲线的解释.....	(162)
第六节 可控源声频大地电磁法.....	(166)
第五章 瞬态(变)电磁测深方法原理.....	(171)
第一节 一次激发的谱.....	(171)
一、傅氏级数方法.....	(171)
二、傅氏积分(或傅氏变换)方法.....	(172)
三、一种求傅氏积分的简单方法.....	(173)
四、拉普拉斯变换方法.....	(174)
第二节 求瞬态解的方法.....	(175)
一、频率域方法.....	(175)
二、时间域方法.....	(178)
第三节 层状大地上的瞬态电磁测深.....	(181)
一、均匀和层状大地的瞬态响应.....	(182)
二、瞬态电磁测深资料的解释.....	(189)
1. 视电阻率的概念	(189)
2. 远区和近区视电阻率的概念	(192)
3. 薄层问题	(195)
4. 等值性问题	(197)
参考文献.....	(200)
附录: 有关贝塞耳函数的一些基本公式.....	(201)

绪 言

在应用地球物理学中, 电法勘探的变种或分支方法最多。就其物理基础而言, 可以利用岩石在导电率、导磁率、激发极化特性以及介电常数等方面的差异。就场的性质而言, 可以利用人工场(主动源)也可利用天然场(被动源), 可以利用直流电, 也可利用不同频率的交流电。此外, 在建场装置和接收装置方面也可采用各种不同的方式。因而形成了多种勘探方法。对于不同的地质条件、不同的勘探目的, 可以合理地选择不同的方法, 以求达到预期的目的。无论是找矿或是解决地质构造问题, 电法勘探都得到广泛的应用。

构造电法勘探是为研究石油、煤田等的地质构造问题而建立和发展起来的。主要解决沉积盆地的形态, 基岩(主要是高电阻基底)的埋藏深度, 岩系分层以及查明断裂等构造问题。勘探深度一般从几十米到几公里。50年代广泛使用的是电阻率法, 特别是电阻率测深法。它在我国石油勘探中取得了显著的地质效果。

近20年来石油勘探地区不断扩大。在火山岩覆盖区、碳酸盐岩区、大型逆掩断层带等地质构造比较复杂的条件下寻找油气藏, 单一的物探方法已无法奏效, 综合物探方法日益受到人们的重视。近代地质学的发展又使人们要求加快对深部地质研究的进程。这就从生产实践和理论研究两方面提出了新的课题。以研究不同深度的地质构造为目的的构造电法勘探以其本身的多样性适应了这个客观需要, 因而获得了重大进展。除原有的电阻率测深法外, 以电磁感应为基础的电磁测深法, 如大地电磁测深法、频率测深法, 进展尤为显著。不同频率的电磁波穿透深度不同, 而且可以不受高电阻层屏蔽的影响, 获得不同深度的地电信息, 直至研究地壳和上地幔的地电结构。岩石的电性和温度、物理化学状态有密切关系, 电测深资料和岩石矿物的实验室研究相结合也将有助于揭示地球内部的奥秘。

构造电法勘探取得重大进展的另一个条件则是近20年来电子技术、计算技术的巨大成就。高精度仪器的研制和高速计算机的应用使许多理论研究成果得以迅速付诸实现, 也使一些老方法得到改造取得新进展。

电阻率测深法和大地电磁法是构造电法勘探的两种基本方法。前者属人工直流电法勘探, 通过改变供电电极距来改变电流分布深度以研究电阻率随深度的变化。后者属天然交变电磁法, 通过对不同频率电磁场的观测来实现研究目的。地磁测深法虽然只观测地磁场的变异, 然而它也和地球的导电性密切相关, 它可以提供地球导电性随深度的变化及其横向分布的不均匀性。研究深度可达几百甚至上千公里, 往往用来和大地电磁测深结果作联合解释。频率测深法属人工交变电磁法, 它在一定程度上综合了电阻率测深和大地电磁法的工作方法。瞬变电磁测深法是时间域电磁感应法。当向地下供入某种形状的电磁信号以后, 在地面接收瞬变电磁信号, 其早期和晚期能反映浅部和深部的地电特征, 同样可以达到测深的目的。

这些方法都以岩石电阻率的差异为物理基础, 在具体运用上各有特点和局限性。针对不同的地质条件, 正确合理地选择使用这些方法, 可以达到不同的地质目的。目前, 这些方法在我国都不同程度地得到应用, 有些方法发展迅速, 带来了明显的地质效果和经济效益。我们相信, 构造电法勘探必将在地质、地球物理勘探和经济建设中发挥愈来愈大的作用。

第一章 电阻率法测深

电阻率法测深是经过供电电极向地下供入直流电流，建立起电场，通过改变供电、测量装置的排列、大小和相对位置来改变电流在地下的分布状况，在地面测量电场的变化，就可以推断出地层电阻率随深度的变化，达到测深的目的。

电阻率法测深的基本理论和解释方法是根据这样的地质模型建立的：地下介质是由具有不同厚度和不同电阻率的地层组成的，每一层都是均匀和各向同性的，层间界面是水平的平面。

电阻率法测深中常用的供电、测量电极排列形式有两大类。第一大类是点电极直线排列，即所有点电极对称地排列在一条直线上，供电电极在外侧，测量电极在内侧。通过改变供电电极间的距离来改变供电电流分布的深度，达到研究电阻率随深度变化的目的。这一类中最常用的有两种排列形式。一种称为 **Schlumberger**（施隆贝尔热）电极排列，特点是在测深过程中供电电极距加大，而测量电极的间距和位置一般不变（只有当待测电位差太小时，才加大测量电极距），供电电极距与测量电极距之比一般在 3~50 的范围内。另一种称为 **Wenner**（温纳）电极排列，特点是在测深过程中四个电极保持等距，同时向外移动（作为排列中心的测深点位置不变）。温纳排列的优点是在供电电极距相同的情况下，待测电位差要大得多。但这远远补偿不了它的缺点：四个电极同时移动，给野外工作带来不便；尤其是由于测量电极位置经常改变，所以地表局部不均匀体对测深曲线上每个数据的影响都不同，致使这种畸变因素无法研究和消除。

第二大类是偶极排列，特点是电极不一定排列在一条直线上，且供电电极距和测量电极距相对于供电电极对中心点到测量电极对中心点之间的距离来说都很小，因而可以看成是两对偶极子。各种不同的排列形式见图 1-1-1。

偶极排列装置是通过加大两对偶极子中点间的距离来加大探测深度的，优点是野外工作

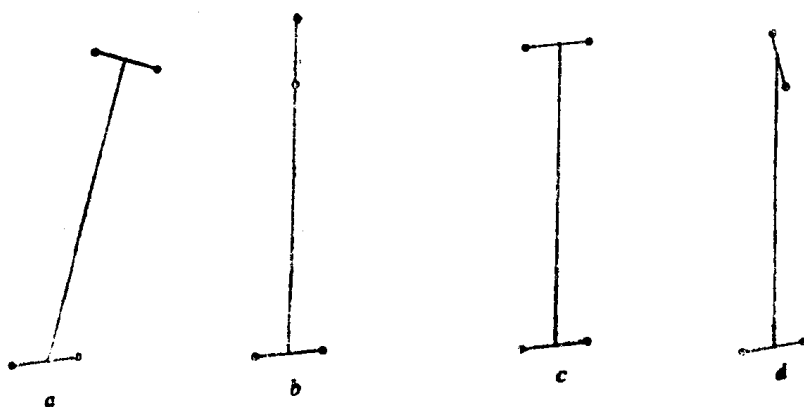


图 1-1-1 偶极电极排列形式

a 方位的, b 径向的, c 平行的, d 垂直的

方便, 缺点是在偶极子中心距离与点电极直线排列装置的供电电极距相等时, 前者待测电位差比后者的要小很多, 因为偶极子周围的场随距离的立方而衰减, 而点电极的场则与距离平方成反比。

第一节 基本理论

一、水平层状介质表面上的电位分布

我们首先推导位于水平层状模型表面上的直流点电流源的位。

在直流情况下, 电位的分布满足拉普拉斯偏微分方程

$$\Delta V = \nabla^2 V = 0 \quad (1.1.1)$$

式中 V 为电位, ∇ 为微分算符, Δ 为拉普拉斯算符。

考虑到介质模型和电流源的特点, 位的分布必成轴对称, 对称轴是通过点电流源的铅垂线。因此, 我们采用以其为 z 轴的圆柱坐标系。在圆柱坐标系中, 拉普拉斯方程可写成:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1.1.2)$$

由于存在轴对称, 故电位相对坐标 φ 的偏导数为零, 于是式 (1.1.2) 简化成:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1.2')$$

用分离变量法解上述方程。假设解具有如下形式:

$$V(r, z) = R(r)Z(z) \quad (1.1.3)$$

将式 (1.1.3) 代入式 (1.1.2'), 两边都除以 $R \cdot Z$, 得到:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{R \cdot r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

它只有当如下两个方程式都成立时, 才能满足, 即:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R \cdot r} \frac{dR}{dr} = -\lambda^2 \quad (1.1.4)$$

和

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda^2 \quad (1.1.5)$$

其中 λ 是任意常数。

式 (1.1.5) 的解是

$$Z(z) = ce^{\pm \lambda z} \quad (1.1.6)$$

式 (1.1.4) 两边都乘以 $\frac{R}{\lambda^2}$, 得到:

$$\frac{d^2 R}{d(\lambda r)^2} + \frac{1}{\lambda r} \frac{dR}{d(\lambda r)} + R = 0 \quad (1.1.4')$$

将上式与附录中的式 (A.1) 进行比较, 可以看出, 它的解应是零阶贝塞耳函数, 即

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r) \quad (1.1.7)$$

由于电位是有限的量, 而当 $r \rightarrow 0$ 时, $Y_0(r) \rightarrow -\infty$, 故解的这一部分是不合理的, 应舍去, C_2 为零。

根据式 (1.1.3), 电位的一种特解应为:

$$V(r, z) = Ce^{\lambda z} J_0(\lambda r) \quad (1.1.8)$$

故位的一般解为:

$$V = \int_0^\infty [\Phi(\lambda)e^{-\lambda z} + \Psi(\lambda)e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1.1.9)$$

式中 $\Phi(\lambda)$ 和 $\Psi(\lambda)$ 是 λ 的任意函数, 需根据具体问题的边界条件来确定。

实践中发现, 把一次场, 即位于均匀半无限介质表面上的点电流源的位作为单独一项写出比较方便。已知一次场的位应为:

$$V_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (1.1.10)$$

式中 ρ_1 为层状介质中第一层介质的电阻率, I 为点电流源的电流强度, $\sqrt{r^2 + z^2}$ 为点电流源到观测点之间的距离。

利用韦伯-李普希兹公式(见附录式A.16), 式(1.1.10)可写作:

$$V_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1.1.10')$$

这样, 微分方程式(1.1.2')的一般解可写作

$$V = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty [e^{-\lambda z} + \Theta(\lambda)e^{-\lambda z} + X(\lambda)e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1.1.11)$$

在其它各层中, 电位均如上式, 只是函数 $\Theta(\lambda)$ 和 $X(\lambda)$ 不同而已。这样, 在第 i 层内, 电位可写作:

$$V_i = \frac{\rho_i I}{2\pi} \int_0^\infty [e^{-\lambda z} + \Theta_i(\lambda)e^{-\lambda z} + X_i(\lambda)e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1.1.11')$$

函数 $\Theta_i(\lambda)$ 和 $X_i(\lambda)$ 需通过边界条件确定。这些边界条件是:

1. 在层间界面上电位是连续的;
2. 在界面上电流密度的垂直分量是连续的;
3. 在地面上电流密度的垂直分量应为零;
4. 在无限深处, 电位趋于零。

根据边界条件1, 在第 i 与第 $i+1$ 层之间的界面上有:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty [e^{-\lambda h_i} + \Theta_i(\lambda)e^{-\lambda h_i} + X_i(\lambda)e^{\lambda h_i}] J_0(\lambda r) d\lambda \\ &= \int_0^\infty [e^{-\lambda h_i} + \Theta_{i+1}(\lambda)e^{-\lambda h_i} + X_{i+1}(\lambda)e^{\lambda h_i}] J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned}$$

式中 h_i 是地下第 i 个界面(即第 i 层底面)的深度。由于对所有的 r 值上式均应成立, 故应有:

$$\Theta_i(\lambda)e^{-\lambda h_i} + X_i(\lambda)e^{\lambda h_i} = \Theta_{i+1}(\lambda)e^{-\lambda h_i} + X_{i+1}(\lambda)e^{\lambda h_i} \quad (1.1.12)$$

为了满足边界条件2, 应有:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_i} \int_0^\infty [\{1 + \Theta_i(\lambda)\}e^{-\lambda h_i} - X_i(\lambda)e^{\lambda h_i}] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \\ &= \frac{1}{\rho_{i+1}} \int_0^\infty [\{1 + \Theta_{i+1}(\lambda)\}e^{-\lambda h_i} - X_{i+1}(\lambda)e^{\lambda h_i}] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (1.1.13) \end{aligned}$$

上式是利用微分形式的欧姆定律

$$j_z = \frac{E_z}{\rho} \quad (1.1.14)$$

并通过对 (1.1.11') 式求相对 z 的偏导数而导出的。式中 j_z 是电流密度的垂直分量。同样，可由式 (1.1.13) 导出：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_i} \{ [1 + \Theta_i(\lambda)] e^{-\lambda h_i} - X_i(\lambda) e^{\lambda h_i} \} \\ &= \frac{1}{\rho_{i+1}} \{ [1 + \Theta_{i+1}(\lambda)] e^{-\lambda h_i} - X_{i+1}(\lambda) e^{\lambda h_i} \} \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

为了满足边界条件3，利用式 (1.1.11')，求出第一层内电位相对 z 的偏导数，并令其在 $z=0$ 处为零，即得：

$$\int_0^\infty \{ -1 - \Theta_1(\lambda) + X_1(\lambda) \} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = 0 \quad (1.1.16)$$

由附录中式 (A.17) 可知，对应上式括号中第一项的积分为零，故可导出：

$$\Theta_1(\lambda) = X_1(\lambda) \quad (1.1.17)$$

考虑到边界条件4，在第 n 层中 $e^{\lambda z}$ 形式的解是不合理的，故要求：

$$X_n(\lambda) = 0 \quad (1.1.18)$$

式 (1.1.12)，(1.1.15)，(1.1.17) 和 (1.1.18) 构成一组含有 $2(n-1)$ 个未知函数 $\Theta_i(\lambda)$ 和 $X_i(\lambda)$ 的 $2(n-1)$ 个方程式。如引入如下符号：

$$u_i = e^{-\lambda h_i}, \quad v_i = \frac{1}{u_i} = e^{\lambda h_i}, \quad p_i = \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} \quad (1.1.19)$$

则上述方程式组可写成：

$$\begin{aligned} (u_1 + v_1)\Theta_1 - u_1\Theta_2 - v_1X_2 &= 0 \\ (v_1 - u_1)\Theta_1 + p_1u_1\Theta_2 - p_1v_1X_2 &= (1 - p_1)u_1 \\ u_2\Theta_2 + v_2X_2 - u_2\Theta_3 - v_2X_3 &= 0 \\ -u_2\Theta_2 + v_2X_2 + p_2u_2\Theta_3 - p_2v_2X_3 &= (1 - p_2)u_2 \\ &\dots\dots\dots \\ u_{n-1}\Theta_{n-1} + v_{n-1}X_{n-1} - u_{n-1}\Theta_n &= 0 \\ -u_{n-1}\Theta_{n-1} + v_{n-1}X_{n-1} + p_{n-1}u_{n-1}\Theta_n &= (1 - p_{n-1})u_{n-1} \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

在实际工作中，我们所关心的主要是第一层地面上的电位分布，

$$V = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty [1 + 2\Theta_1(\lambda)] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1.1.11'')$$

即主要是要求出 $\Theta_1(\lambda)$ 。我们把 $\Theta_1(\lambda)$ 称为 Stefanescu 核函数。利用克莱姆 (Cramer) 法则解方程式组 (1.1.20)，求出 $\Theta_1(\lambda)$ 为：

$$\Theta_1(\lambda) = \frac{\tilde{P}}{\tilde{D}} \quad (1.1.21)$$

其中 $\tilde{P}$ 和 $\tilde{D}$ 分别为如下二个行列式：

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} (u_1+v_1) & -u_1 & -v_1 & & & \\ (v_1-u_1) & p_1 u_1 & -p_1 v_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & -u_2 & -v_2 & \\ & -u_2 & v_2 & p_2 u_2 & -p_2 v_2 & \\ & & & \dots & & \\ & & & & u_{n-1} & v_{n-1} & -u_{n-1} \\ & & & & -u_{n-1} & v_{n-1} & p_{n-1} u_{n-1} \end{vmatrix} \quad (1.1.22)$$

$$\tilde{P} = \begin{vmatrix} 0 & -u_1 & -v_1 & & & \\ (1-p_1)u_1 & p_1 u_1 & -p_1 v_1 & & & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & -u_2 & -v_2 & \\ (1-p_2)u_2 & -u_2 & v_2 & p_2 u_2 & -p_2 v_2 & \\ & & & \dots & & \\ 0 & & & & 0 & u_{n-1} & v_{n-1} & -u_{n-1} \\ (1-p_{n-1})u_{n-1} & & & & -u_{n-1} & v_{n-1} & p_{n-1} u_{n-1} \end{vmatrix} \quad (1.1.23)$$

将所有的偶数列加到第一列上（这不改变行列式的值），行列式 $\tilde{P}$ 可简化为：

$$\tilde{P} = \begin{vmatrix} -u_1 & -u_1 & -v_1 & & & \\ u_1 & p_1 u_1 & -p_1 v_1 & & & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & -u_2 & -v_2 & \\ 0 & -u_2 & v_2 & p_2 u_2 & -p_2 v_2 & \\ & & & \dots & & \\ & & & & 0 & u_{n-1} & v_{n-1} & -u_{n-1} \\ & & & & -u_{n-1} & v_{n-1} & p_{n-1} u_{n-1} \end{vmatrix} \quad (1.1.23')$$

作为特例，我们给出二层和三层介质时的解。二层介质时，式(1.1.22)和(1.1.23')中的行列式仅保留左上角处的 2×2 个元素，即有：

$$\tilde{D} = (1+p_1) - (1-p_1)u_1^2$$

$$\tilde{P} = (1-p_1)u_1^2$$

于是

$$\Theta_1^{(2)}(\lambda) = \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1}} \quad (1.1.24)$$

式中 $k_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ ，是反射系数。

三层介质时，式(1.1.22)和(1.1.23')中仅保留左上角处的 4×4 个元素。将行列式展开后，分子分母均除以 $(1+p_1)(1+p_2)$ ，即得到：

$$\Theta_1^{(3)}(\lambda) = \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_2 e^{-2\lambda h_2}}{1 + k_1 k_2 e^{-2\lambda(h_2 - h_1)} - k_1 e^{-2\lambda h_1} - k_2 e^{-2\lambda h_2}} \quad (1.1.25)$$

式中 $k_2 = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 + \rho_2}$ ， h_2 为第二个界面（即第二层底面）的深度， $h_2 - h_1 = t_2$ 为第二层的厚度。

二、核函数及其与地下介质参数之间的关系

$$\text{取 } 1+2\Theta_1(\lambda)=K(\lambda) \quad (1.1.26)$$

则式(1.1.11'')可写成:

$$V = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty K(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1.1.27)$$

$K(\lambda)$ 称为Slichter核函数。

由式(1.1.26)和(1.1.21)有:

$$K(\lambda) = 1 + \frac{2\tilde{P}}{\tilde{D}} = \frac{\tilde{D} + 2\tilde{P}}{\tilde{D}} = \frac{\tilde{N}}{\tilde{D}} \quad (1.1.26')$$

如果 $2\tilde{P}$ 的因子2是乘在 $\tilde{P}$ 矩阵的第一列元素上,对比 $\tilde{D}$ 和 $2\tilde{P}$ 可以看出,除第一列外,其他的对应元素皆相同。因此二行列式相加可通过第一列上对应元素相加来完成,即有:

$$\tilde{N} = \begin{vmatrix} (v_1 - u_1) & -u_1 & & & \\ (u_1 + v_1) & p_1 u_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & -u_2 & -v_2 & 0 \\ & -u_2 & v_2 & p_2 u_2 & -p_2 v_2 & \\ & & \dots\dots\dots & & & \\ & 0 & & u_{n-1} & v_{n-1} & -u_{n-1} \\ & & & -u_{n-1} & v_{n-1} & p_{n-1} u_{n-1} \end{vmatrix} \quad (1.1.28)$$

由式(1.1.27), (1.1.22), (1.1.28)及式(1.1.19)可以看出,核函数给出了电位表达式中与地下介质参数有关的部分。为便于计算,Flathe和Pekeris分别给出了计算核函数的循环公式,它们在视电阻率曲线的计算和解释中具有重要意义。详细介绍如下:

首先,给出Flathe循环公式的导出过程。

以 $\tilde{D}_n$ 表示 n 层介质时Slichter核函数的分母。当在地层序列底部加上一个新的地层时,它变为 $\tilde{D}_{n+1}$ 。 $\tilde{D}_{n+1}$ 可由 $\tilde{D}_n$ 及在右下角加一些新的元素组成,即:

$$\tilde{D}_{n+1} = \begin{vmatrix} \tilde{D}_n & & & \\ & \vdots & & \\ & & -v_{n-1} & 0 \\ \dots\dots\dots & & -p_{n-1} v_{n-1} & 0 \\ 0 & u_n & v_n & -u_n \\ 0 & -u_n & v_n & p_n u_n \end{vmatrix} \quad (1.1.29)$$

进行如下不改变行列式数值和左上角 $\tilde{D}_n$ 排列的运算:

- (1) 将最后一列的每个元素加到从右数第三列的相应元素上;
- (2) 将最后一列的元素都乘以 $v_n^2 = \frac{1}{u_n^2}$,然后加到从右数第二列的相应元素上;
- (3) 将从下数第二行的每个元素都乘以 p_n ,然后把它们加到最后一行的相应元素上;式(1.1.29)就可以简化成:

$$\tilde{D}_{n+1} = \begin{vmatrix} & \tilde{D}_n & & & \\ & \vdots & & & \\ & & -v_{n-1} & & 0 \\ \cdots & & -p_{n-1}v_{n-1} & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -u_n \\ 0 & -(1-p_n)u_n & (1+p_n)v_n & & 0 \end{vmatrix} \quad (1.1.29')$$

将上述行列式按最后一行的元素展开，可得到：

$$\tilde{D}_{n+1} = (1+p_n)\tilde{D}_n + (1-p_n)u_n^2 D_n^* \quad (1.1.30)$$

D_n^* 是通过将 $\tilde{D}_n$ 中最后一列元素换成 $\tilde{D}_{n+1}$ 中从右数第二列的元素而构成的，即：

$$D_n^* = \begin{vmatrix} (u_1+v_1) & -u_1 & -v_1 & & \\ (v_1-u_1) & p_1u_1 & -p_1v_1 & & \\ & u_2 & v_2 & -u_2 & -v_2 \\ & -u_2 & v_2 & p_2u_2 & -p_2v_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & u_{n-1} & v_{n-1} & -v_{n-1} \\ & & & -u_{n-1} & v_{n-1} & -p_{n-1}v_{n-1} \end{vmatrix} \quad (1.1.31)$$

将 D_n^* 中所有的偶数列（最后一列除外）与其右边的奇数列交换，然后改变所有偶数行的符号。上述每一次运算都改变行列式的符号（数值不变）。由于一共有奇数次运算，故最后行列式变号。经过上述变换后的 D_n^* 与 $\tilde{D}_n$ 相似（见式1.1.22），只是 u 与 v 的作用相互交换了。于是我们有：

$$D_n^*(u) = -\tilde{D}_n(1/u) \quad (1.1.32)$$

其中 u 表示 $e^{-\lambda}$ 。代入式 (1.1.30)，得到：

$$\tilde{D}_{n+1}(u) = (1+p_n)\tilde{D}_n(u) - (1-p_n)u_n^2 \tilde{D}_n(1/u) \quad (1.1.33)$$

用同样的过程，可导出 $N_n^*(u)$ 与 $\tilde{N}_n(\frac{1}{u})$ 之间的对应关系，只是需多加一次变换，即改变 $N_n^*(u)$ 中第一列元素的符号。最后得到：

$$\tilde{N}_{n+1}(u) = (1+p_n)\tilde{N}_n(u) + (1-p_n)u_n^2 \tilde{N}_n(\frac{1}{u}) \quad (1.1.34)$$

为了方便，引入新的函数 $D_n(u)$ 和 $N_n(u)$ ，它们与 $\tilde{N}_n(u)$ 和 $\tilde{D}_n(u)$ 之间的关系如下：

$$\tilde{D}_n(u) = D_n(u) \prod_{i=1}^{n-1} (1+p_i) \quad (1.1.35)$$

$$\tilde{N}_n(u) = N_n(u) \prod_{i=1}^{n-1} (1+p_i)$$

这样，Slichter核函数可表示为 $N_n(u)$ 与 $D_n(u)$ 之比。将式 (1.1.35) 代入 (1.1.33) 和 (1.1.34) 后，Flathe循环公式变为：

$$\begin{aligned} D_{n+1}(u) &= D_n(u) - k_n u_n^2 D_n(1/u) \\ N_{n+1}(u) &= N_n(u) + k_n u_n^2 N_n(1/u) \end{aligned} \quad (1.1.36)$$

$$\text{其中 } k_n = (1 - p_n)/(1 + p_n) = (\rho_{n+1} - \rho_n)/(\rho_{n+1} + \rho_n) \quad (1.1.37)$$

Flathe循环公式在文献中还常以另一种形式出现, 定义为

$$\begin{aligned} P(u) &= \frac{N(u) - D(u)}{2} \\ H(u) &= \frac{N(u) + D(u)}{2} \end{aligned} \quad (1.1.38)$$

通过类似的推导, 可得到如下循环公式:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(u) &= P_n(u) + k_n u_n^2 H_n(1/u) \\ H_{n+1}(u) &= H_n(u) + k_n u_n^2 P_n(1/u) \end{aligned} \quad (1.1.39)$$

为应用循环公式, 必须知道对应于均匀介质的 $D_1(u)$ 和 $N_1(u)$ 。为此, 我们针对二层情况, 将式 (1.1.22) 和 (1.1.28) 中的行列式按左上角处 2×2 个元素展开, 并利用式 (1.1.35), 得到:

$$D_2 = 1 - k_1 u_1^2, \quad N_2 = 1 + k_1 u_1^2,$$

对比循环公式 (1.1.36), 可看出:

$$D_1 = N_1 = 1 \quad (1.1.40)$$

由式 (1.1.38) 可得:

$$P_1 = 0, \quad H_1 = 1 \quad (1.1.40')$$

接着, 我们再给出Pekeris循环公式的推导。

在式 (1.1.12) 两边加上一项 $e^{-\lambda h_i}$, 然后除以式 (1.1.15), 得到:

$$\rho_i \frac{1 + \Theta_i(\lambda) + X_i(\lambda)e^{2\lambda h_i}}{1 + \Theta_i(\lambda) - X_i(\lambda)e^{2\lambda h_i}} = \rho_{i+1} \frac{1 + \Theta_{i+1}(\lambda) + X_{i+1}(\lambda)e^{2\lambda h_{i+1}}}{1 + \Theta_{i+1}(\lambda) - X_{i+1}(\lambda)e^{2\lambda h_{i+1}}} \quad (1.1.41)$$

对每一层引入一个新的函数

$$K_i(\lambda) = \frac{1 + \Theta_i(\lambda) + X_i(\lambda)e^{2\lambda h_{i-1}}}{1 + \Theta_i(\lambda) - X_i(\lambda)e^{2\lambda h_{i-1}}} \quad (1.1.42)$$

可以看出, 在第一层中, 即当 $i=1$ 时, $h_0=0$, $\Theta_1(\lambda)=X_1(\lambda)$, 于是有:

$$K_1(\lambda) = 1 + 2\Theta_1(\lambda)$$

即为Slichter核函数。

将式 (1.1.42) 右边的分子和分母都除以 $X_i(\lambda)$, 解出 $[1 + \Theta_i(\lambda)]/X_i(\lambda)$, 得到:

$$\frac{1 + \Theta_i(\lambda)}{X_i(\lambda)} = e^{2\lambda h_{i-1}} (K_i + 1)/(K_i - 1) \quad (1.1.43)$$

将式 (1.1.41) 左边的分子和分母都除以 $X_i(\lambda)$, 然后将式 (1.1.43) 及 (1.1.42) 代入, 于是式 (1.1.41) 变成:

$$\rho_i \frac{(K_i + 1)e^{2\lambda h_{i-1}} + (K_i - 1)e^{2\lambda h_i}}{(K_i + 1)e^{2\lambda h_{i-1}} - (K_i - 1)e^{2\lambda h_i}} = \rho_{i+1} K_{i+1}$$

将上式左边的分子分母都除以 $e^{2\lambda h_{i-1}}$, 并代入 $t_i = h_i - h_{i-1}$, $p_i = \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}}$, 得到:

$$K_{i+1} = p_i \frac{K_i(e^{2\lambda t_i} + 1) - (e^{2\lambda t_i} - 1)}{(e^{2\lambda t_i} + 1) - K_i(e^{2\lambda t_i} - 1)} \quad (1.1.44)$$

根据双曲正切的定义有:

$$\text{th}(\lambda t_i) = (e^{2\lambda t_i} - 1)/(e^{2\lambda t_i} + 1)$$

因此式 (1.1.44) 可写成:

$$K_{i+1} = p_i \frac{K_i - \text{th}(\lambda t_i)}{1 - K_i \text{th}(\lambda t_i)} \quad (1.1.44')$$

解出 K_i 得到:

$$K_i = \{K_{i+1} + \rho_i \operatorname{th}(\lambda t_i)\} / \{\rho_i + K_{i+1} \operatorname{th}(\lambda t_i)\} \quad (1.1.45)$$

当已知地下地层参数时,可利用式(1.1.45)逐步计算出地面一层中的Slichter核函数 $K_1(\lambda)$ 。但为此必须知道最下面一层中的函数 K_n 。由式(1.1.18)知, $X_n=0$ 。故由式(1.1.42)可得:

$$K_n = 1 \quad (1.1.42')$$

比较Flathe循环公式(1.1.36)与Pekeris循环公式,二者不同处在于:Flathe公式相当于每一次循环在最下面增加一层,而Pekeris公式是在顶部增加一层,并把测量装置移至新增加的一层的顶面上。

另一不同处是Flathe公式由两个公式(分子的和分母的)组成,而Pekeris公式则只有一个,应用起来更方便一些。它的另一个优点是可写成(1.1.44')的形式。在已测得地面处的 $K_1(\lambda)$ 时,可利用这一公式逐层向下推,进行反演解释。

Koefoed(1970)引入了电阻率变换函数:

$$T_i = \rho_i K_i(\lambda) \quad (1.1.46)$$

用 T_i 时,Pekeris循环公式可写成如下形式:

$$T_i = \{T_{i+1} + \rho_i \operatorname{th}(\lambda t_i)\} / \{1 + T_{i+1} \operatorname{th}(\lambda t_i) / \rho_i\} \quad (1.1.47)$$

$$\text{和} \quad T_{i+1} = \{T_i - \rho_i \operatorname{th}(\lambda t_i)\} / \{1 - T_i \operatorname{th}(\lambda t_i) / \rho_i\} \quad (1.1.48)$$

电阻率变换函数具有电阻率的物理量纲,是地层参数和 λ 的函数。 λ 的量纲是长度的倒数。电阻率变换函数作为 $\frac{1}{\lambda}$ 的函数与视电阻率作为电极距的函数,二者之间十分相似。例如当 $\frac{1}{\lambda} \rightarrow \infty$ 时,式(1.1.47)和(1.1.48)中的双曲正切趋于零,故 $T_i \rightarrow T_{i+1}$ 。由于对所有的 i 都成立,故有 $T_1 \rightarrow T_n$ 。而根据式(1.1.46)和(1.1.42'),可知

$$T_n = \rho_n$$

所以这时 $T_1 \rightarrow \rho_n$

在另一种极限情况下,当 $\frac{1}{\lambda} \rightarrow 0$ 时,上述双曲正切趋于1,于是式(1.1.47)可写成

$$T_i \rightarrow \rho_i$$

在地面一层中,则有

$$T_1 \rightarrow \rho_1$$

电阻率变换曲线与视电阻率曲线之间的不同之处是:在双对数坐标中,前者上升、下降的陡度不会大于 45° ,而后者下降支的陡度可能大于 45° 。

三、视电阻率函数

已知均匀地球(电阻率为 ρ)表面上一电流源 I 在相距为 r 的一点上产生的位为:

$$V_\rho = \frac{\rho I}{2\pi r} \quad (1.1.49)$$

在均匀地球条件下,利用图1-1-2中的对称四极直线排列时,两测量电极之间的电位差为:

$$\Delta V = \frac{2\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b} \right) \quad (1.1.50)$$

s 为供电电极距的一半, b 为测量电极距的一半。