1982

卫星多普勒定位

陈俊勇 著

测绘出版社

卫星多普勒定位

陈俊勇 著

1982

测绘出版社

内 容 提 要

对卫星多普勒定位从出发原理到实际公式作了严格推导。对各种误差源特别是气象参数误差作了深入研究。对中国目前使用的广播星历及其相应方法（单点定位、联测定位、短弧法）作了全面研究，提出在实际使用中应注意的原则。

对多普勒网平差和它与地面网联合平差的方法作了探讨，对它所涉及的现代平差方法和有关具体问题作了介绍。

最后在中国条件下如何应用重力资料来检验多普勒定位结果作了研究。

卫星多普勒定位

陈俊勇 著

•

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

•

开本 787×1092 1/16 · 印张 $10\frac{3}{4}$ · 字数 248千字

1983 年12月第一版 · 1983 年12月第一次印刷

印数 1—2,500 册 · 定价 1.70 元

统一书号：15039 · 新 289

前　言

随着现代科学技术、经济建设和国防建设的发展，对如何快速而又精确地测定地面点坐标提出了更高的要求。目前有两种测定地面点坐标的方法。一种是利用地面大地测量的各种手段，其中包括惯性测量；另一种途径则是利用空间大地测量的各种手段。就后者而论，美国海军导航卫星系统（以下简称卫星多普勒定位系统）无疑是目前最方便和最有效率的定位系统。卫星多普勒定位系统的测定速度较快，数据采集的密集度较高，相对来说费用比较低廉，并且适合于全天候的、可移动的野外观测条件。

卫星多普勒定位系统的原理和一般情况，已经在作者与其他同志合作编译的[56]中作了详细的介绍。因此，有关这方面的内容本书就不再赘述了。本书主要针对卫星多普勒定位中的某些主要技术问题，联系我国实际情况作些研究和探讨，并提出一些看法和建议。本书重点阐述了有关卫星多普勒定位系统的严密公式和各种定位方法，研究了卫星多普勒网的平差和它与地面网拼接的问题，最后对如何利用重力资料检测卫星多普勒定位结果进行了讨论。

第一章主要讨论卫星多普勒定位原理方面的问题。导出了在理想情况下和在实际情况下严密的积分多普勒计数公式。分别给出了在卫星时间系统和在接收机时间系统中，这些计数公式的不同表达形式。

此外，从理论方面和实验方面研究了气象参数测定误差与卫星多普勒定位的关系。并据此提出了在卫星多普勒定位中，应采用什么精度来测定各气象参数。

第二章重点探讨在应用广播星历时，如何评定和提高各种卫星多普勒定位方法的精度。

对如何在广播星历单点定位解算中减少系统误差和偶然误差，及其精度评定等问题提出了建议。同时讨论了卫星多普勒联测定位的方法。引入在该方法中的多普勒计数的对称重叠度（DSO）概念。讨论了对称重叠度与联测定位精度和测站布设的关系。

最后，提出了简化短弧法定位方法，并推导了相应的误差方程式。

第三章的主要内容涉及卫星多普勒网的平差问题。该章讨论了在应用短弧法定位时，卫星多普勒网的严格的和简化的平差方法。

用短弧法定位的卫星多普勒网的平差分为两个步骤。第一个步骤是网中各子区的平差；第二个步骤是通过公共点将各子区拼接起来。

第四章讨论卫星多普勒网与地面网的联合平差问题。提出了卫星多普勒网与地面网的联合平差方案，其中包括三维的和二维的平差方案。在这个平差方案中，关键是将卫星多普勒网中得到的各种平差结果看成是地面网相应元素的带权的虚拟相关观测值，从而可应用分段平差方法获得严格的平差结果。

此外，该章还探讨了当卫星多普勒网与地面网联合平差时，多普勒测站之间的最优间

隔问题。文中应用实测资料从理论上证明了决定最优间隔的原则是：多普勒测站间的最优间隔长度的相对精度应等于地面网中具有同样长度的边长的相对精度。

第五章阐述了利用重力数据来独立检测卫星多普勒定位精度的方法和可能性。本章采用莫洛金斯基早年提出的、综合使用积分公式和级数公式的方法来计算垂线偏差和高程异常。由于在这方面很多大地测量学者都已进行了较细致的研究，所以本书仅对该计算方法中的个别问题进行专门的研究和数值计算。例如莫氏公式中系数 $K_n(S_m)$ 的计算问题；逼近函数 S_m 和 V_m 的收敛问题等等。

在本章最后一节对这种计算方法作了推广和一般性概括，并从数值上对各种类型的计算方法进行了比较。

为了对上述各章中有关内容易于理解和便于查阅，书末附有附录和参考文献。

本书中的内容摘译自作者于 1981 年初在奥地利格拉茨技术大学呈交的博士论文 [96] 中的部分内容。作者水平有限，错误疏漏之处在所难免，敬希读者不吝指正。

作者　1982.8.1

目　录

第一章　积分多普勒计数的严密公式及其改正项

§1.1　引言和符号

早在1957至1958年间，美国科学家范奋巴赫（G.C.Weiffenbach）和高逸（W.H.Guier）两人在测定和研究了当时第一颗卫星（Sputnik 1）所发射的无线电信号的多普勒频移后，首次提出，根据多普勒频移可以测定卫星轨道[57]。

随后，麦克雷（F.T.Meclure）设想了一个“反方案”，即子午（Transit）卫星系统，或本书中所称的卫星多普勒定位系统。并于1958年获得军事发明专利，于1965年列入公开专利编号[58]。美国的霍浦金斯大学应用物理实验室在发展和实施该系统方面起了核心作用。该系统原是作为北极星潜艇发射导弹和潜航时定位之用。1967年解密以来，由于该系统具有全天候、全自动、全球覆盖性，并且精度较高、定位速度较快、经济和人力比较节约等一系列优点，因此它迅速被世界各国（包括我国）所采用，并应用于国民经济建设的各个部门中去。如大地测量、船舶导航、石油和地质勘探等。

卫星多普勒定位系统的原理和基本情况已在[56]中作了系统而详尽的介绍，因此，本书不再赘述。

本书中所采用的符号尽可能与大地测量教科书中惯用的符号一致，例如大地纬度（B），大地经度（L），大地高（H），大地方位角（A），空间直角坐标（x，y，z）等等。这里就不再一一详细介绍其意义了。现仅就涉及卫星多普勒定位所使用的一些符号，给出它们的如下意义。

t——卫星发射某一个无线电信号的时刻；

τ——在接收机中多普勒计数开始的时刻；

Δt——从发射时刻（t）到接收机接收时刻（$t+\Delta t$）之间的卫星无线电信号的传播时间；

δ——由于接收机设备系统的原因，在$t+\Delta t$时刻的接收机时间延迟；

f_s——在卫星时间系统内的卫星的射频；

f_g——在接收机内的本机振荡器的频率（或称参考频率）；

f_r——在接收机内所收到的卫星所发射的无线电波的频率；

c——惯性系统内的真空光速；

$s(t)$和$S(t+\Delta t)$——在发射时刻（t）的卫星位置，和在接收机时刻（$t+\Delta t$）的接收机天线位置，两者之间的斜距（直线距离）；

$\dot{s}(t)$——斜距对于时间t的导数；

N——理想的、无误差的真空多普勒计数；

N_s——地面接收机中实际所量测到的多普勒计数；

ΔN_T——对 N_o 的对流层折射改正项；
ΔN_I——对 N_o 的电离层折射改正项；
ΔN_R——对 N_o 的相对论效应改正项；
ΔN_E——对 N_o 的地球自转改正项；
h、h_m——卫星在某次通过中对于接收机天线的高度角和最大高度角；
A——卫星轨道椭圆的长半轴；
ω——卫星轨道椭圆的近地点角距；
i——卫星轨道平面的倾角；
Ω——卫星轨道椭圆的升交点赤经；
e——卫星轨道椭圆的偏心率；
θ——卫星过近地点时刻；
β——卫星轨道椭圆升交点（格林尼治）经度；
E——卫星的偏近点角；
M——卫星的平近点角；
n——卫星的平均角速度。

§1.2 积分多普勒计数的基本公式

本节将叙述有关积分多普勒计数的基本公式。首先，我们假定这些基本公式均是在理想情况下（即既无接收机时间延迟等误差，又无任何外界影响）导得的。我们称之为理论公式。然后，在理论公式的基础上顾及各项误差和外界影响，导出实用公式[43]和有关的改正项。

§1.2.1 时间系统

多普勒卫星连续发射具有时间标记（简称时标）的无线电信号。这一系列连续的信号构成了一个时间系统，我们称它为卫星时间系统（STF）。

在地面测站上的接收机接收这些由卫星所发射的时标和信号，并在接收机电路中把它们加以复原。这些复原后的一系列连续的时标和信号也构成了一个时间系统，这就称为复原的卫星时间系统（RSTF）。

假如在地面接收站上有一个非常精确的钟，这个钟产生一系列连续的、等间隔的、均匀的时标。这一由地面站上的钟所产生的一系列时标所构成的时间系统，我们称它为接收机时间系统（RTF）。

在理想情况下，在接收机中，接收到卫星信号的时刻、恢复卫星信号的时刻、对信号进行积分计数的时刻，这三者应在同一瞬间 τ 内发生。因此，时间 τ 与 t 应有如下关系式：

$$\tau = t + \Delta t, \tag{1-1}$$

式中

$$\Delta t = s(t)/c = S(\tau)/c. \tag{1-2}$$

对于目前的卫星多普勒定位系统来说，Δt 的数值一般在 3～13ms 范围以内。

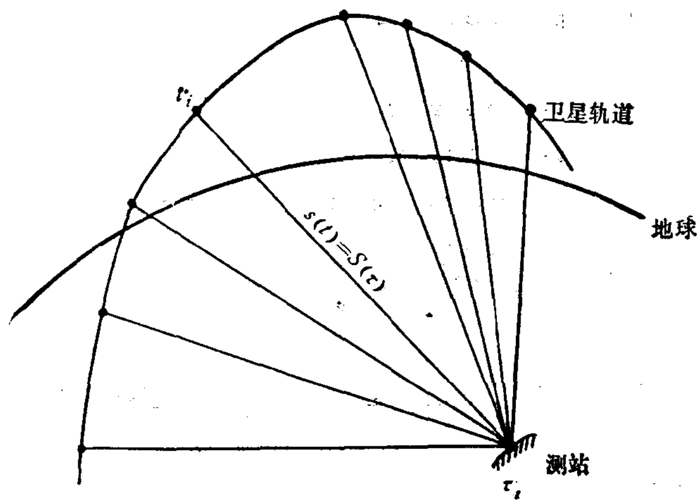

图 1.1　多普勒卫星通过测站上空的示意图

由方程式（1-1）和（1-2）可导得下列微分关系式[2]，[3]：

$$d\tau = dt + ds(t)/c, \tag{1-3}$$

和

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{1}{c}\frac{ds(t)}{dt}, \tag{1-4}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = 1 - \frac{1}{c}\frac{dS(\tau)}{d\tau}. \tag{1-5}$$

根据上述微分关系式，我们可以导出时间 τ 与时间 t 之间的一个重要的微分关系式

$$1 - \frac{1}{c}\frac{dS(\tau)}{d\tau} = \left(1 + \frac{1}{c}\frac{ds(t)}{dt}\right)^{-1} \tag{1-6}$$

在广泛应用的参考书[52]中，由于没有能导出式（1-6）的严格关系式。因此，在积分多普勒计数公式的推导中，采用把 $d\tau$ 近似的等于 dt（参见该书中译本第 29 页），从而不能导得如本章以后将要给出的积分多普勒计数的严密公式[43]。

假设 t 在卫星时间系统（STF）中是一系列已知而又等时间间隔的时标，那么，在复原的卫星时间系统（RSTF）中的 τ 则可由式（1-1）来求定。由于该式中 Δt 是个变化的值，所以，这时的 τ 就一定是一系列不均匀的。不等间隔的时标。这是一种以复原的卫星时间系统为基础的积分多普勒计数的情况。另一种情况则恰恰相反，即积分多普勒计数的时间是取决于接收机时间系统（RTF），而不是取决于复原的卫星时间系统。假设这时在接收机时间系统中的 τ 是一系列已知的，且具有等时间间隔的均匀时标。那么，这时相应于 τ 的 t [由式（1-1）求定]必定是一系列非均匀的，不等时间间隔的“时标”（注意：这里指的已不是卫星发射的真时标）。由此看来，在复原的卫星时间系统和接收机时间系

统中的两个 τ 似乎是不同的，但事实上，它们的本质却是完全一样的。

从式（1-1）和式（1-2）我们可以导得时间 τ 与 t 之间几种不同形式的关系式：

$$\tau = t + s(t)/c, \tag{1-7}$$

$$\tau = t + S(\tau)/c, \tag{1-8}$$

和

$$t = \tau - S(\tau)/c, \tag{1-9}$$

$$t = \tau - s(t)/c, \tag{1-10}$$

$$t = \tau - s(\tau)/c + \dot{s}(\tau)s(\tau)/c^2 + \cdots. \tag{1-11}$$

式中

$$\dot{s}(\tau) = \left(\frac{ds(t)}{dt}\right)_{t=\tau}, \tag{1-12}$$

和

$$\frac{s(t)}{c} = \frac{s(\tau)}{c} + \frac{\dot{s}(\tau)}{c}(t-\tau) + \cdots = \frac{s(\tau)}{c} - \frac{\dot{s}(\tau)s(\tau)}{c^2} + \cdots. \tag{1-13}$$

§1.2.2 多普勒频移的积分公式

在卫星时间系统（STF）中，f_r 和 f_s 的关系是众所周知的：

$$f_r = f_s(1 + \dot{s}(t)/c)^{-1}. \tag{1-14}$$

在时刻 τ_1 至 τ_2 这一时间段内，接收机的积分多普勒频移计数显然可以表达为下述积分形式：

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f_r d\tau, \tag{1-15}$$

将式（1-14）和式（1-4）依次代入上式。则式（1-15）中的变量 τ 就变为 t。我们就得到了下面这一重要关系式。

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f_r d\tau = \int_{t_1}^{t_2} f_s(1 + \dot{s}(t)/c)^{-1}(d\tau/dt)dt = \int_{t_1}^{t_2} f_s(d\tau/dt)^{-1}(d\tau/dt)dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f_s dt. \tag{1-16}$$

假若卫星的射频是一个常数，那么，我们就能将上式（1-16）改写成为下列形式

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f_r d\tau = f_s(t_2 - t_1). \tag{1-17}$$

在有关卫星多普勒定位的很多文献和报告中都常常引用这一公式，并把它作为一个不加证明的一般性原理。即"在时刻 τ_1 和 τ_2 之间，接收机所接收到的卫星电波的周数必定等于卫星在时刻 t_1 和 t_2 之间所发射的电波的周数"。现在，我们在这里给出了完全严格的数学证明。但我们还要强调指出，对式（1-17）中的符号意义必须有一个明确的概念：

（一）对式（1-17）中的积分上下限必须有正确的理解。也就是说，τ_1 和 τ_2 是在接收机中进行多普勒计数真正开始与结束的瞬间时刻，而 t_1 和 t_2 则是完全相应于（或取决于）τ_1 和 τ_2 的卫星电波的发射时刻。因此，方程式（1-17）成立的必要与充分条件是式（1-17）中的时间 τ 与 t 必须满足关系式（1-1）。

（二）卫星的射频 f_s 在接收时间段内（$\tau_1 \sim \tau_2$）必须假定非常稳定。也就是说，在这一时间段内，在所要求的精度范围内，f_s 可以视为不依赖于时间而变化的常数。只有在这种条件下，式（1-16）才能导致式（1-17），使后一式成立，否则只成立关系式（1-16）。

顾及式（1-2），式（1-17）又可写为：

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f_r d\tau = f_s[(t_2 - t_1) + (\Delta t_2 - \Delta t_1)] - \frac{f_s}{c}[s(t_2) - s(t_1)]. \qquad (1\text{-}18)$$

上面是式（1-15）在卫星时间系统（STF）内进行积分的公式。同样，式（1-15）也能在接收机时间系统（RTF）内进行积分。将式（1-14）和（1-6）代入式（1-15）后，则得下式：

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f_r d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f_s\left(1 - \frac{1}{c} \frac{dS(\tau)}{d\tau}\right)d\tau = f_s(\tau_2 - \tau_1) - \frac{f_s}{c}[S(\tau_2) - S(\tau_1)], \qquad (1\text{-}19)$$

上式若顾及式（1-2）和（1-13），可改写为：

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f_r d\tau = f_s(\tau_2 - \tau_1) - \frac{f_s}{c}\{s(\tau_2) - s(\tau_1)\} + \frac{f_s}{c^2}\{\dot{s}(\tau_2)s(\tau_2) - \dot{s}(\tau_1)s(\tau_1)\}. \qquad (1\text{-}20)$$

式（1-17），（1-18），（1-19），和（1-20）是多普勒频移的积分公式（1-15）的四种不同形式的表达式。

§1.2.3 积分多普勒计数的理论公式

大地测量型的卫星多普勒接收机都能产生一个稳定的参考频率 f_g，其标称值为 400 MHz。

所谓卫星的积分多普勒计数N是指在理想情况下，时间 τ_1 至 τ_2 间隔内拍频$(f_g - f_r)$的积分值。

$$N = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (f_g - f_r)d\tau, \qquad (1\text{-}21)$$

当卫星射频为常数时，应用式（1-17），我们由上面积分方程（1-21）求得多普勒计数N的基本表达式为：

$$N = f_g(\tau_2 - \tau_1) - f_s(t_2 - t_1). \qquad (1\text{-}22)$$

将式（1-7）代入上式，则可求得在卫星时间系统（STF）内的积分多普勒计数的表达式：

$$N = (f_g - f_s)(t_2 - t_1) + \frac{f_g}{c}[s(t_2) - s(t_1)]. \qquad (1\text{-}23)$$

同样，式（1-21）也可以在接收机时间系统（RTF）内进行积分。顾及式（1-19）和式（1-20），得：

$$N = (f_g - f_s)(\tau_2 - \tau_1) + \frac{f_s}{c}[S(\tau_2) - S(\tau_1)], \qquad (1\text{-}24)$$

和

$$N=(f_g-f_s)(\tau_2-\tau_1)+\frac{f_s}{c}[s(\tau_2)-s(\tau_1)]-\frac{f_s}{c^2}[\dot{s}(\tau_2)s(\tau_2)-\dot{s}(\tau_1)s(\tau_1)].\tag{1-25}$$

为了以后叙述的方便，这里顺便给出下式：

$$N=(f_g-f_s)(\tau_2-\tau_1)+\frac{f_s}{c}[s(t_2)-s(t_1)].\tag{1-26}$$

上式是由式（1-24）顾及式（1-2）后导得的。

§1.2.4 积分多普勒计数的实用公式

1. 在卫星时间系统（STF）中的实用公式

在卫星时间系统内推导积分多普勒计数公式时，卫星时间 t 是已知值，并且作为时间的标准。在接收机中，对拍频（f_g-f_r）进行积分计数的真实时间是 τ。但事实上，由于接收系统本身的时间延迟，它们之间的关系式是下式（1-27），而不再满足式（1-1）。

$$\tau=t+\Delta t+\delta.\tag{1-27}$$

在式（1-27）中，δ 是地面接收系统的内部时间延迟，称为接收机时间延迟。它主要是由叁个部分构成的。第一部分是拍频信号过第一个计数零点时的等待时间；第二部分是卫星电文的内容，由接收机逻辑线路辨认所需要的时间；第三部分是无线电信号由天线经前置放大器等传递至多普勒计数线路所需要的时间。

由于存在接收机时间延迟 δ，因此，接收机计数器开始计数的时刻 τ 是对应于在时刻 t' 的卫星位置，而不再是在时刻 t 的卫星位置。它相应的传播时间是 $\Delta t'$，而不再是 Δt。所以，我们有下列两个方程式

$$\tau=t'+\Delta t'\tag{1-28}$$

和

$$\Delta t'=s(t')/c.\tag{1-29}$$

顾及式（1-27），（1-2），（1-28）和（1-29），则 t' 可表示为 t 和 δ 的函数。

$$t'=\tau-\Delta t'=t+\Delta t+\delta-\Delta t'.\tag{1-30}$$

将上式代入式（1-29）中，并展为泰勒级数。级数展至 c^{-2} 项和一阶导数项。从而可解得式（1-30）中的 $\Delta t'$ 项：

$$\begin{aligned}\Delta t'&=\frac{s(t')}{c}=\frac{s(t)}{c}+\frac{\dot{s}(t)}{c}(t'-t)=\Delta t+\frac{\dot{s}(t)}{c}(\Delta t+\delta-\Delta t')\\&=\frac{s(t)}{c}+\frac{\dot{s}(t)}{c}\delta-\left(\frac{\dot{s}(t)}{c}\right)^2\delta.\end{aligned}\tag{1-31}$$

再将式（1-31）代入式（1-30），最终求得用 t 和 δ 来表示 t' 的关系式

$$t'=t+\delta-\frac{\dot{s}(t)}{c}\delta+\left(\frac{\dot{s}(t)}{c}\right)^2\delta.\tag{1-32}$$

存在有接收机时间延迟的实际情况下，t 不再满足式（1-1），而 t' 仍是满足式（1-1）的，即式（1-28）表示的关系式。所以，在引用积分多普勒计数的理论公式，如

式（1-22）和（1-23）时，其中的符号 t 应改变为 t'，即得

$$N=\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}(f_g-f_r)d\tau=f_g(\tau_{j+1}-\tau_j)-f_s(t'_{j+1}-t'_j) \tag{1-33}$$

和

$$N=(f_g-f_s)(t'_{j+1}-t'_j)+\frac{f_g}{c}[s(t'_{j+1})-s(t'_j)]=f_g\left\{(t'_{j+1}-t'_j)+\left[\frac{s(t'_{j+1})}{c}-\frac{s(t'_j)}{c}\right]\right\}-f_s(t'_{j+1}-t'_j). \tag{1-34}$$

假如将式（1-31）和（1-32）代入式（1-34）中，我们就可以导得用参数 t 和 δ 来表示多普勒计数 N 的公式：

$$N=f_g\left\{t_{j+1}-t_j)+\left[\frac{s(t_{j+1})}{c}-\frac{s(t_j)}{c}\right]+(\delta_{j+1}-\delta_j)\right\}-f_s\left\{(t_{j+1}-t_j)+(\delta_{j+1}-\delta_j)-\left[\frac{\dot{s}(t_{j+1})}{c}\delta_{j+1}-\frac{\dot{s}(t_j)}{c}\delta_j\right]+\left[\left(\frac{\dot{s}(t_{j+1})}{c}\right)^2\delta_{j+1}-\left(\frac{\dot{s}(t_j)}{c}\right)^2\delta_j\right]\right\}. \tag{1-35}$$

式（1-35）是卫星时间系统（STF）中积分多普勒计数的一个严格的实用公式。该式中顾及了一阶导数和 c^{-2} 次项精度。因此，凡在这种时间系统中的卫星多普勒定位计算都应该把式（1-35）作为出发公式。当然，可以根据不同的精度要求而作一些取舍。例如美国国防制图局所使用的，在卫星时间系统中多普勒单点定位计算程序 DOPPLR[4]，这一程序的基本公式就是式（1-35），但其中没有顾及式（1-35）右方的最后一个微小项

$$\frac{f_s}{c^2}[\dot{s}^2_{j+1}(t_{j+1})\delta_{j+1}-\dot{s}^2_j(t_j)\delta_j].$$

此外，我们又可以从式（1-35）中看到，接收机时间延迟 δ 影响积分多普勒计数的正确性主要有二个方面：

（一）是由接收机时间延迟 δ 的本身所引起的。通过 δ 与斜距变率的乘积对多普勒计数产生影响。接收机时间延迟值 δ 作为卫星多普勒接收机的质量标志之一，当然应当尽量的小。但是，实际上它既不可能等于零，又无法在每次卫星通过中予以测定，所以，在卫星时间系统内的多普勒定位计算中，若精度要求比较高的话，其相应的误差方程式中，都设有一个接收机的平均时间延迟值 $\bar{\delta}$ 作为未知参数，它和测站坐标一起在定位计算中进行解算。

（二）是由接收机时间延迟值 δ 的变化所引起的。即通过延迟值的变化（$\delta_{j+1}-\delta_j$）和拍频（f_g-f_r）的乘积来影响多普勒计数的正确性。因此，对接收机时间延迟的要求不仅仅是上面所说的，δ 本身的数值要小，而且，还要求这一数值保持稳定，以减少这第二方面的影响。在美国使用的 Geoceiver 型接收机中，有一个特殊的设备，可以通过它来测定多普勒计数的真正时间间隔，从而可以计算出这第二方面影响的数值（在该程序中称作 PC 项）。但在其它一般商用接收机中，由于没有这项设备，若要在卫星时间系统（STF）中应用式（1-35）进行定位计算时，这第二方面的影响一般只能作为多普勒计数 N 的误差

项来处理，因此精度就比较差。

2. 在接收机时间系统（RTF）中的实用公式

在有接收机时间延迟的情况下，式（1-21）也能在接收机时间系统（RTF）中进行积分。此时 τ 就应该是积分的时间标准。τ 的时间是由每次卫星通过中与卫星的某一起始时刻 t_0 的同步来确定它本身的起始时刻的。但在每次卫星通过中，一旦确定了接收机时间系统（RTF）τ 的起始时刻以后，τ 就由接收机中振荡器的参考频率独立地来控制多普勒计数的积分时间，而与卫星时标无关。因此，在接收机时间系统中，显然仍然还有一个起始时刻的同步误差 $d\tau_0$ 的问题和一个参考频率的偏离误差 K 的问题。

$$\tau_j = t_j + d\tau_0 + (t_j - t_0)K, \qquad (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots n), \tag{1-36}$$

式中，同步误差 $d\tau_0$ 是由两部分构成：第一部分是接收机在 τ_0 时刻锁住卫星信号时的卫星无线电波的传播时间，即相当于 Δt_0；第二部分是在 τ_0 时刻接收机的时间延迟，既相当于 δ_0。因此，$d\tau_0$ 在每一次卫星通过中都是一个常数。而在式（1-36）中的 K_j 为：

$$K_j = \frac{f_g^0 - f_{gj}}{f_g^0} \tag{1-37}$$

和

$$f_{gj} = f_g^0 + df + df'(t_j - t_0). \tag{1-38}$$

式（1-37）中的 f_g^0 是参考频率的标称值，400MHz。而 f_{gj} 是参考频率在时刻 t_j 的实际数值。df 和 df' 分别是参考频率的偏差和漂移，或简称频偏和频漂。

类同于由式（1-28）推导至式（1-35）的过程，我们可以导得下列公式：

$$t_j' = \tau_j - \Delta t_j' = t_j + d\tau_0 + (t_j - t_0)K_j - \Delta t_j', \tag{1-39}$$

$$\Delta t_j' = \frac{s(t_j)}{c} + \frac{\dot{s}(t_j)}{c}d\tau_0 + \frac{\dot{s}(t_j)}{c}(t_j - t_0)K_j - \frac{\dot{s}(t_j)s(t_j)}{c^2} - \left(\frac{\dot{s}(t_j)}{c}\right)^2 d\tau_0$$
$$-\left(\frac{\dot{s}(t_j)}{c}\right)^2 (t_j - t_0)K_j \tag{1-40}$$

和

$$N = f_{gj}\{(t_{j+1} - t_j) + [(t_{j+1} - t_0)K_{j+1} - (t_j - t_0)K_j]\} - f_s\{(t_{j+1} - t_j) + [(t_{j+1}$$
$$- t_0)K_{j+1} - (t_j - t_0)K_j] - \frac{1}{c}[s(t_{j+1}) - s(t_j)] - \frac{d\tau_0}{c}[\dot{s}(t_{j+1}) - \dot{s}(t_j)]$$
$$-\frac{1}{c}[\dot{s}(t_{j+1})(t_{j+1} - t_0)K_{j+1} - \dot{s}(t_j)(t_j - t_0)K_j] + \frac{1}{c^2}[\dot{s}(t_{j+1})s(t_{j+1})$$
$$-\dot{s}(t_j)s(t_j)] + \frac{1}{c^2}[(\dot{s}(t_{j+1}))^2 - (\dot{s}(t_j))^2]d\tau_0 + \frac{1}{c^2}[(\dot{s}(t_{j+1}))^2(t_{j+1}$$
$$-t_0)K_{j+1} - (\dot{s}(t_j))^2(t_j - t_0)K_j]\}. \tag{1-41}$$

顾及由式（1-37）和式（1-38）导得的下列方程式

$$K_j = -\frac{1}{f_g^0}[df + df'(t_j - t_0)], \tag{1-42}$$

式（1-41）可写为

$$N=(f_g^0-f_s)(t_{j+1}-t_j)+\frac{f_s}{c}\left[s(t_{j+1})\left(1-\frac{\dot{s}(t_{j+1})}{c}\right)-s(t_j)\left(1-\frac{\dot{s}(t_j)}{c}\right)\right]$$

$$+\frac{f_s}{c}[\dot{s}(t_{j+1})-\dot{s}(t_j)]d\tau_0+\frac{f_s}{f_g^0}(t_{j+1}-t_j)[df+(t_{j+1}-t_0)df']$$

$$-\frac{f_s}{cf_g^0}\dot{s}(t_j)(t_{j+1}-t_j)[df+(t_j-t_0)df']-\frac{f_s}{c^2}[(\dot{s}(t_{j+1}))^2-(\dot{s}(t_j))^2]d\tau_0$$

$$+\frac{f_s}{c^2f_g^0}(\dot{s}(t_j))^2(t_{j+1}-t_j)[df+(t_j-t_0)df']. \qquad (1\text{-}43)$$

式（1-43）是在接收机时间系统（RTF）中积分多普勒计数的严格的实用公式。它具有与式（1-35）一样的精度。

在著名的加拿大大地测量局的GEODOP程序[59]中，它的定位计算的基本公式可由式（1-43）导得。GEODOP程序中所采用的时间系统是t^*，根据它的定义，t^*与时间t有下列关系式

$$t^*=t-\frac{s(t)}{c}, \qquad (1\text{-}44)$$

求逆得

$$t=t^*+\frac{s(t^*)}{c}+\frac{\dot{s}(t^*)s(t^*)}{c^2}. \qquad (1\text{-}45)$$

将式（1-45）代入式（1-43）得

$$N=(f_g^0-f_s)(t_{j+1}^*-t_j^*)+\frac{f_g^0}{c}[s(t_{j+1}^*)-s(t_j^*)]+\frac{f_s}{c}[\dot{s}(t_{j+1}^*)-\dot{s}(t_j^*)]d\tau_0$$

$$+\frac{f_s}{f_g^0}(t_{j+1}^*-t_j^*)df+\frac{f_s}{f_g^0}(t_{j+1}^*-t_j^*)(t_j^*-t_0^*)df'+\frac{1}{c^2}(f_g^0$$

$$-f_s)[\dot{s}(t_{j+1}^*)s(t_{j+1}^*)-\dot{s}(t_j^*)s(t_j^*)]. \qquad (1\text{-}46)$$

在GEODOP程序的基本公式中，忽略了上式右方的最后一项，即

$$\frac{f_g^0-f_s}{c^2}[\dot{s}(t_{j+1}^*)s(t_{j+1}^*)-\dot{s}(t_j^*)s(t_j^*)].$$

§1.3 积分多普勒计数量测值的改正项

在§1.2节中所导出的积分多普勒计数公式只考虑了卫星和接收机的有关情况。或者说，只是考虑了卫星多普勒定位系统的内部情况。没有涉及定位系统的外部情况。

卫星的无线电信号必须通过大气层才能到达测站的接收机天线。但是，由于大气层中的电离层和对流层对电磁波的折射效应，无线电波的真正传播路径的长度，并不等于地面天线和卫星之间的几何直线距离。此外，由于大地测量对卫星多普勒定位的精度要求比较高，因此相对论效应和地球自转对多普勒计数的影响也是必须予以考虑的。为了获得无外部干扰的多普勒计数值N，对于在接收机中所量测到的积分多普勒计数N_0（或称多普勒