

N

$\sqrt{1-12500}$

巴罗表

的

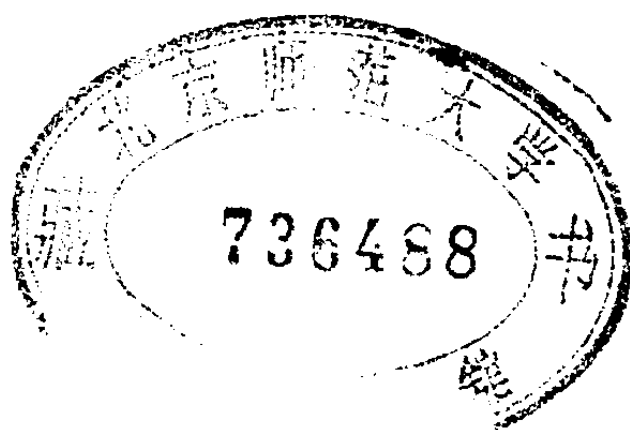
改进与高次方程的解法

陈凤翔 著

四川人民出版社

巴罗表的改进与 高次方程的解法

陈凤翔 著



四川人民出版社

一九八〇年·成都

封面设计：邱云松

巴罗表的改进与高次方程的解法 陈凤翔

四川人民出版社出版 (成都盐道街三号)
四川省新华书店发行 自贡新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 5.125 字数 97 千
1980 年 7 月第一版 1980 年 7 月第一次印刷
印数：1—4,000 册

书号：13118·36

定价：0.55 元

前 言

凡是以最少的计算工作量而获得满意结果的数值计算法和辅助工具，必然为广大的科技工作者所欢迎。为此，本书介绍一些简单易行的计算方法，其特点是方法新颖、简单易行、效率高、计算准确。

本书的内容包括两部分：（一）巴罗表的改进；（二）高次方程的解法。

第一部分：《巴罗表的改进》：介绍用计算尺求高度准确的平方根、立方根与倒数的方法。

《巴罗表》的主要内容，是从1到12500各数的平方根、立方根与倒数组成。新版的《巴罗表》，是由柯姆利把自变数从旧版的10000增加到12500，使《巴罗表》减少一些使用平方插值的计算工作。在新版《巴罗表》出版后，很多国家都翻印复制。我们现在使用的《巴罗表》，是一九五七年从英国版本翻印过来的。

多年来，我在工作之余研究得出，用计算尺求高度准确的平方根、立方根与倒数的方法，其准确度达到8个以上有效数字。决定准确度的方法很简单，并把自变数扩大到任意数，不存在中间插值问题，因而它比使用《巴罗表》作线性插值还要简便，所得结果的准确度也比《巴罗表》高些。另

外，这个方法还可用来求解高次方程的根，同样具有简捷和高度准确的效果。

第二部分《高次方程的解法》，其全名应为“高次方程的计算尺解法”。

高次方程在科学研究及工程技术上的应用，并不亚于二次方程。高次方程的解法，在应用数学上作为数值计算时是最常遇到的。虽然已有若干求解方程根的方法，而且有的方法从理论上来看，也是十分巧妙的；但对解答方程根的任务来说，仍然很麻烦。所以，我们介绍高次方程的计算尺解法。这种方法能十分简捷地求得高次方程的实根及复根，并能使所求根达到所要求的准确度，工作量也最省。

以上所述的计算方法，生产实践中有着广泛的用途，可供科技工作者、从事数值计算工作者和大专院校的师生应用。显然，使用这些方法必然涉及到计算尺的用法，我们认为大家对计算尺的使用都是熟悉的，故在使用计算尺时只作概略说明，不再赘述。

本书在编著过程中，曾得到成都水力发电学校党组织的大力支持，并由徐汲清等同志审阅，提了不少宝贵意见，在此表示衷心感谢。本书难免有错误和不足之处，请广大读者批评指正。

著 者 一九七九年十月

目 录

概 述.....	1
第一部分 巴罗表的改进.....	8
一、求倒数准确到7~8个有效数字.....	8
二、误差调整公式的推导.....	12
三、求平方根.....	23
四、求立方根.....	28
五、与巴罗表的比较.....	35
第二部分 高次方程的解法.....	40
一、预备知识.....	40
二、三次方程实根的求法.....	54
三、四次方程实根的求法.....	66
四、更准确实根的求法.....	79
五、三次方程复根的求法.....	111
六、四次方程复根的求法.....	125
附 录.....	146
一、1—999平方值表.....	146
二、1—999立方值表.....	151

概 述

本书的主要内容，是利用计算尺这一简便的计算工具，快速地计算出高度准确的平方根、立方根与倒数的值，以及迅速而准确地解出高次方程的根（实根及复根）。这些计算方法都是前所未有的，在本书中都有详细的理论推导，为了使读者能尽快地掌握这些求根的方法，在概述中用一些具体的例子来说明，只要掌握了计算尺的用法，就能学会这些快速求根的方法，并用于实际计算。

高度准确的倒数计算

例如：求 $\frac{1}{1.2376}$ 的值

由CI尺及C尺上得第一商 $q_1 = 0.808$

写成普通除法算式：

$$\begin{array}{r} 1.2376 \overline{) 1.0000000} \underline{0.808} \dots\dots\dots q_1 \\ 0.808 \times 1.2376 = \frac{0.9999808}{0.0000192} \underline{0.0000155} \dots\dots\dots q_2 \end{array}$$

再用除数去除余数得第二商 $q_2 = 0.0000155$ ，于是得 $q = q_1 + q_2 = 0.808 + 0.0000155 = 0.8080155$ ，准确度为 7 个有效数字。

高度准确的平方根计算

例如：求 $\sqrt{7.63564}$ 的值

从计算尺上得初始值 $x_1 = 2.76$

$$\text{设 } f(x) = x^2 - 7.63564 = 0$$

以2.76减小 $f(x) = 0$ 的根，依综合除法：

$$\begin{array}{r} 1 \quad +0 \quad -7.63564 \quad \underline{2.76} \\ \quad +2.76 \quad +7.6176 \\ \hline 1 \quad +2.76 \quad -0.01804 \\ \quad +2.76 \quad +0.00001065 \\ \hline 1 \quad +5.52 \quad -0.01802935 \end{array}$$

得变换方程：

$$\phi(y) = y^2 + 5.52y - 0.01804 = 0$$

略去 y^2 项得一次方程：

$$5.52y - 0.01804 = 0$$

$$\therefore y_1 = \frac{0.01804}{5.52} = 0.00327$$

第一次调整：

用计算尺作除法并同时读出平方值。

用运算术语表出：

置 $[C_{5.52}]$ 于 $[D_{1804}]$ 对 $[C_{右1}]$ ，读 $[D_{327}]$ 及 $[A_{1065}]$ 。

读 $[D_{327}]$ 是： $y_1 = 0.00327$

读 $[A_{1065}]$ 是： $y_1^2 = 0.00001065$ 。写在综合除法最后第一项的下面，并与之相加（参看综合除法），即得调整第一次方程：

$$5.52y - 0.01802935 = 0$$

$$\therefore y'_1 = \frac{0.01802935}{5.52} = 0.0032661$$

被除数有 6 个有效数字，用计算尺除之（在综合除法下面进行甚便），其商 y'_1 取 5 个有效数字（可以取 6 个），则得：

$x'_1 = x_1 + y'_1 = 2.76 + 0.0032661 = 2.7632661$ ，有 8 个有效数字的准确度。

注意：作综合除法计算时，3 个数字的平方值及立方值，可直接由书末的专用表查出。

高度准确的立方根计算：

例如：求 $\sqrt[3]{6466.5}$ 的值

从计算尺上得初始值 $x_1 = 18.6$

设 $f(x) = x^3 - 6466.5 = 0$

以 18.6 减小 $f(x) = 0$ 的根，依综合除法：

$$\begin{array}{r}
 1 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \quad 6466.5 \quad | \quad 18.6 \\
 \hline
 \quad + 18.6 \quad + 345.96 \quad + 6434.856 \\
 1 \quad + 18.6 \quad + 345.96 \quad - \quad 31.6440 \\
 \hline
 \quad + 18.6 \quad + 691.92 \quad + \quad 0.05 \left(\frac{20}{17} \right) \\
 \hline
 1 \quad + 37.2 \quad + 1037.88 \quad - \quad 31.59 \left(\frac{20}{23} \right) \\
 \hline
 \quad + 18.6 \\
 1 \quad + 55.8
 \end{array}$$

得变换方程：

$$\phi(y) = y^3 + 55.8y^2 + 1037.88y - 31.644 = 0$$

略去 y^3 及 y^2 项，得一次方程：

$$1037.88y - 31.644 = 0$$

$$\therefore y_1 = \frac{31.644}{1037.88} = 0.0305$$

第一次调整:

用计算尺作除法并同时作含平方的乘法。

用运算术语表出:

置 $[C_{1037...}]$ 于 $[D_{3164...}]$ 对 $[C_{左1}]$ 读 $[D_{305}]$,
对 $[B_{558}]$ 读 $[A_{520}]$ 。

读 $[D_{305}]$ 是: $y_1 = 0.0305$

读 $[A_{520}]$ 是: $55.8 \times y_1^2 = 0.052$ 。写在综合除法最后第一项的下面,并与之相加,即得第一次调整的一次方程:

$$1037.88y - 31.592 = 0$$

$$\therefore y_1' = \frac{31.592}{1037.88} = 0.03045$$

第二次调整:

置 $[C_{1037...}]$ 于 $[D_{3159...}]$ 对 $[C_{左1}]$ 读 $[D_{3045}]$,
对 $[B_{558}]$ 读 $[A_{517}]$ 。

读 $[D_{3045}]$ 是: $y_1' = 0.03045$

读 $[A_{517}]$ 是: $55.8 \times y_1'^2 = 0.0517$ 。将校正数写在括号内(参看综合除法),即得第二次调整的一次方程:

$$1037.88y - 31.5923 = 0$$

$$\therefore y_1'' = \frac{31.5923}{1037.88} = 0.030439$$

经二次调整后,被除数有 6 个有效数字,用计算尺除之,其商 y_1'' 取 5 个有效数字(可以取 6 个),则得:

$x_1'' = x_1 + y_1'' = 18.6 + 0.030439 = 18.603439$, 有 8 个有效数字的准确度。

三次方程的解法:

例如: 求方程 $f(z) = z^3 + 0.9156z - 1.91 = 0$ 的一切根, 准确到 3~4 个有效数字。

(1) 试根 因 $f(z) = 0$ 有一变号, 故 $f(z) = 0$ 必有一正根, 视察知 $f(0) = (-)$, $f(1) = (+)$, 于是知此正根必在 0 与 1 间, 并极靠近 1。

(2) 求根 求在 0 与 1 间的根。

用运算术语表出:

置 $[C_{右1}]$ 于 $[D_{0.156}]$ 对 $[C_{0.98}]$, 读 $[K_{0.94}]$ 及 $[D_{0.14}]$ 。

读 $[K_{0.94}]$ 是: $0.998^3 = 0.994$

读 $[D_{0.14}]$ 是: $0.9156 \times 0.998 = 0.914$

因 $f(0.998) = 0.994 + 0.914 - 1.91 \approx 0$, 故 $f(z) = 0$ 的正根 $z_1 = 0.998$ 。

求其它二根。据本书推导得出的公式 (参看三次方程复根的求法), 将根 z_1 反号并以 2 除, 则得:

$$x = -\frac{z_1}{2} = -0.499, \text{ 而 } x^2 = 0.249$$

又由公式 $y^2 = 3x^2 + b$, 得 (其中 $b = 0.9156$),

$$y^2 = 3 \times 0.249 + 0.9156 = 1.6626$$

$$\therefore y_{23} = \pm 1.289$$

其它二根 $z_{23} = x \pm y_{23}i$, 即:

$$z_{23} = -0.499 \pm 1.289i$$

四次方程的解法：

根据本书推导得出公式：

$$\text{设 } f(z) = z^4 + bz^2 + cz + d = 0$$

由方程 $f(z) = 0$ ，可得：

$$g(x) = x^6 + \frac{b}{2}x^4 + \frac{b^2 - 4d}{16}x^2 - \frac{c^2}{64} = 0$$

$$y^2 = x^2 + \frac{b}{2} + \frac{c}{4x}$$

用计算尺求出 $g(x) = 0$ 的 x^2 值及 $\pm x$ 值。

再由 $y^2 = x^2 + \frac{b}{2} + \frac{c}{4x}$ ，求得相应的 y 值。

从而得方程 $f(z) = 0$ 的根为：

$$z_{12} = x \pm y_{12}i, \quad z_{34} = -x \pm y_{34}i$$

例如：求方程 $f(z) = z^4 - 12z + 7 = 0$ 的一切根，准确到

3 ~ 4 个有效数字。

由方程 $f(z) = 0$ 中知 $b = 0, c = -12, d = 7$ ，于是得：

$$g(x) = x^6 + \frac{0 - 4 \times 7}{16}x^2 - \frac{(-12)^2}{64} = 0$$

设 $x^2 = u$ ，则得：

$$g(u) = u^3 - \frac{28}{16}u - \frac{144}{64} = 0$$

以4乘 $g(u) = 0$ 的根，得：

$$h(u) = u^3 - 28u - 144 = 0$$

求 $h(u) = 0$ 的正根：

(1) 试根 因 $h(u) = 0$ 有一变号，故 $h(u) = 0$ 必有一正

根，视察知 $h(6) = (-)$ ， $h(7) = (+)$ ，于是知此正根在6与7间，并靠近7。

(2)求根 求在6与7间的根。

置 $[C_{右1}]$ 于 $[D_{28}]$ 对 $[C_{6975}]$ ，读 $[K_{339}]$ 及 $[D_{1953}]$ 。

读 $[K_{339}]$ 是： $6.975^3 = 339$

读 $[D_{1953}]$ 是： $28 \times 6.975 = 195.3$

因 $h(6.975) = 339 - 195.3 - 144 \approx 0$ ，故 $h(u) = 0$ 的正根为6.975

以4除此根，得 $g(u) = 0$ 的根。即：

$$u = \frac{6.975}{4} = 1.744$$

于是得 $g(x) = 0$ 的 x^2 值及 $\pm x$ 值为：

$$x^2 = 1.744; \quad x = \pm 1.320$$

由 $y^2 = x^2 + \frac{b}{2} + \frac{c}{4x}$ ，得 ($b = 0$, $C = -12$):

$$y^2 = 1.744 + \frac{(-12)}{4 \times 1.32} = 1.744 - 2.273 = -0.529$$

$$\therefore y_{12} = \pm 0.727i, \quad x = 1.320$$

$$\text{又 } y^2 = 1.744 + \frac{(-12)}{4 \times (-1.32)}$$

$$= 1.744 + 2.273 = 4.017$$

$$\therefore y_{34} = \pm 2.005, \quad x = -1.320$$

最后得方程 $f(z) = 0$ 的一切根为：

$$z_{12} = x \pm y_{12}i = 1.320 \pm 0.727i^2 \text{ (或 } z_1 = 2.047, z_2 = 0.593 \text{)}, \quad z_{34} = x \pm y_{34}i = -1.320 \pm 2.005i$$

第一部分 巴罗表的改进

一、求倒数准确到7~8个有效数字

这个问题必须从用计算尺作除法讲起。现在先说明一下数的位数：

大于1或等于1的数，它的位数等于整数部分数字的个数。

小于1的数，其位数用负数表示，等于小数点以后0的个数。若小数点以后没有直接相连的0，它的位数就是0位。

除法定位口诀：

除法定位位数减，

滑尺右伸把1加。

位数减——指被除数位数减去除数的位数。另外，滑尺左伸已包括在“除法定位位数减”之中。

现以例子来阐明求高度准确的商：

$$\text{例 1：求 } \frac{346.2576595}{9.2471} = 37.445$$

用计算尺除，其商用口决定位得：

$$q_1 = 37.5$$

取q中前两个数字与除数相乘（笔算）得：

$$37 \times 9.2471 = 342.1427 \text{ (准确数)}$$

用被除数减去此数得余数 r_1

$$\begin{array}{r} 346.2576595 \\ -) 342.1427 \\ \hline 4.1149595 \cdots \cdots r_1 \end{array}$$

再用除数去除余数 r_1 ，则得第二商：

$$q_2 = 0.445$$

第二商 q_2 不必定位，可以紧接在37的后面写，即得商为：

$$q = 37.445 \text{ (此商为准确数)}$$

将以上过程写成普通除法算式：

$$\begin{array}{r} 9.2471 \mid 346.2576595 \mid 37.445 \cdots \cdots q \\ \quad \quad \quad 342.1427 \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 4.1149595 \cdots \cdots r_1 \end{array}$$

$$\text{例 2: 求 } \frac{668612.34748}{145.684} = 4589.47$$

用计算尺除得第一商：

$$q_1 = 4590$$

现取 q_1 中前三个数字与除数相乘得：

$$4590 \times 145.684 = 668689.56$$

用被除数减去此数得余数 r_1 ：

$$\begin{array}{r} 668612.34748 \\ -) 668689.56 \\ \hline - 77.21252 \cdots \cdots r_1 \end{array}$$

因余数 r_1 为负数，故第二商亦为负值：

$$q_2 = -0.53$$

第二商应定位，然后与第一商相加得：

$$q = \frac{\begin{array}{r} 4590.00 \\ +) - 0.53 \\ \hline \end{array}}{4589.47} \quad (\text{此商为准确数})$$

将以上过程写成普通除法算式：

$$\begin{array}{r} 145.684 \mid 668612.34748 \mid \underline{4590} \cdots \cdots q_1 \\ \quad \quad \quad \underline{668689.56} \\ \quad \quad \quad - 77.21252 \mid -0.53 \cdots \cdots q_2 \end{array}$$

$$\text{最后, } q = q_1 + q_2 = 4590 + (-0.53) = 4589.47$$

应当指出：

用此法求两数相除之商时，每次的商都是由计算尺控制的。因此，若商只取前两个数字，则后继的商，可不定位而紧接前一商的后面；如商取三个数字，那末继后的商，应定位后与前一商相加。

$$\text{例 3: 求 } \frac{0.01439482}{6.32} = 0.002277661$$

设分子为近似数，准确度为 7 个有效数字，因此，商只能取 7 个有效数字。即：

$$\begin{array}{r} 6.32 \mid 0.01439482 \mid \underline{0.002277661} \cdots \cdots q \\ 0.0022 \times 6.32 = \frac{0.013904}{0.00049082} \cdots \cdots r_1 \\ 0.000077 \times 6.32 = \frac{0.00048664}{0.00000418} \cdots \cdots r_2 \end{array}$$

$$\text{例 4: 求 } \frac{0.545612}{46.8675} = 0.00481117$$

设分子为近似数，准确度为 6 个有效数字，因此，商只

能取 6 个有效数字。

$$\begin{array}{r} 64.8675 \mid 0.545612 \mid 0.00841 \cdots \cdots q_1 \\ 0.545535675 \\ \hline 0.000076325 \mid 0.00000117 \cdots \cdots q_2 \end{array}$$

$$q = q_1 + q_2 = 0.00841 + 0.00000117 = 0.00841117$$

现在来求高度准确的倒数：

倒数是除法的一种特殊形式，它的第一商由CI尺及C尺来控制，它的定位永远等于 1 减分母的位数。

$$\text{例 1：求 } \frac{1}{2724} = 0.0003671072$$

$$\begin{array}{r} 2724 \mid 1.000000 \mid 0.000367 \cdots \cdots q_1 \\ 0.999708 \\ \hline 0.000292 \mid 0.000000 \mid 1072 \cdots \cdots q_2 \end{array}$$

$$q = 0.0003671072, \text{ 准确到 7 个有效数字。}$$

$$\text{例 2：求 } \frac{1}{4899} = 0.0002041233$$

$$\begin{array}{r} 4899 \mid 1.000000 \mid 0.000204 \cdots \cdots q_1 \\ 0.999396 \\ \hline 0.000604 \mid 0.000000 \mid 1233 \cdots \cdots q_2 \end{array}$$

$$q = 0.0002041233. \text{ 准确度为 7 个有效数字。}$$

以上二例是巴罗表中可以直接查出的倒数，请对照查看。现在举几个必须用插值法，才能从巴罗表中求出的倒数。

$$\text{例 3：求 } \frac{1}{3.27645} = 0.305208$$

每次商取 3 个数字。即：