

微積分與解析幾何詳解

上 册

G. B. 小托馬士 R. L. 芬尼 原著

王 心 如

譯著

曉 園 出 版 社
世 界 圖 書 出 版 公 司

丁小153/03

微積分與解析幾何詳解

G. B. 小托馬士 R. L. 芬尼 原著
王心如 譯著

曉園出版社
世界圖書出版公司

微积分与解析几何详解

G.B. 小托马斯、R.L. 芬尼 原著
王心如 译著

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1994 年 11 月 第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1994 年 11 月 第一次印刷 印张: 26.75

印数: 0001—650 字数: 63 万字

ISBN: 7-5062-1979-4/O·147

定价: 35.80 元 (WB9405/8)

世界图书出版公司已向台湾晓园出版社购得重印权
限国内发行

1.11/163/13

前 言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

上册目錄

第一章 函數的變化率 1

1. 平面上的座標 1 / 2. 增量和距離 5 / 3. 直線的斜率 10 / 4. 直線方程式 23 / 5. 函數和圖形 40 / 6. 二次及三次曲線的斜率 61 / 7. 曲線 $y = f(x)$ 的斜率、導數 72 / 8. 速度和其他變率 80 / 9. 極限的性質 86 / 10. 無限大 102 / 11. 連續函數 110 / 綜合問題 119

第二章 導 數 143

1. 一般導數 143 / 2. 多項式函數及其導數 143 / 3. 乘積乘冪及商 148 / 4. 隱函數與分數乘冪 156 / 5. 切線逼近 167 / 6. 連鎖規則及參數方程 179 / 7. 三角函數的簡單回顧，曲線的夾角 188 / 8. 三角函數之導數 203 / 9. 牛頓法逼近方程式之解 216 / 10. 反函數及 Picard 方法 222 / 綜合問題 231

第三章 導數的應用 253

1. 描圖，一階導數的正負 253 / 2. 凹面和反曲點 263 / 3. 漸近和對稱 280 / 4. 極大與極小定理 300 / 5. 極大和極小之問題 307 / 6. 相對率 325 / 7. Rolle 定理 322 / 8. 均值定理 335 / 9. 不定形和 L'Hôpital 法則 338 / 10. 均值定理與泰勒展式的應用 343 / 綜合問題 348

第四章 積 分 387

1. 前言 387 / 2. 不定積分 387 / 3. 積分常數之決定及其應用 397 / 4. 三角函數之積分 404 / 5. 定積分，曲線下之面積 412 / 6. 利用極限計算面積 420 / 7. 微積分基本定理 426 / 8. 變數代換 438 / 9. 定積分的逼近法則 453 / 綜合問題 462

第五章 定積分的應用 473

1. 簡言 473 / 2. 兩曲線間面積 473 / 3. 距離 485 / 4. 薄片的旋轉體積 493 / 5. 薄殼和皮圈的體積模型 504 / 6. 平面曲線的長度 512 / 7. 旋轉體的表面積 517 / 8. 函數的平均值 522 / 9. 動量和質量中心 528 / 10. 重心和中心

532 / 11. Pappus's 定理 537 / 12. 流體靜力 539 / 13. 功 542 / 綜合問題 547

第六章 超越函數 567

1. 概論 567 / 2. 反三角函數 567 / 3. 反三角函數的微分及有關的積分 573 / 4. 自然對數及其微分 585 / 5. 自然對數的性質及 $y = \ln x$ 的圖形 599 / 6. 指數函數 613 / 7. a^x 和 a^y 函數 633 / 8. $y = \log_a u$ 函數，及函數的上升率 644 / 9. 指數函數及對數函數的應用 651 / 10. 複利及富蘭克林遺囑 657 / 綜合問題 658

第七章 分部積分 689

1. 基本積分公式 689 / 2. 分部積分 702 / 3. 三角函數的乘積與乘冪 714 / 4. 正弦、餘弦偶次乘方 726 / 5. 三角函數積分代換加入 732 / 6. 關於 $ax^2 + bx + c$ 之積分 744 / 7. 部分分式 750 / 8. 計算下列積分 762 / 9. 瑕積分 765 / 10. 利用積分表 777 / 綜合問題 787

下冊目錄

第八章 平面解析幾何 847

1 圓錐 847 / 2 利用距離公式產生方程式 847 / 3 圓 850 / 4 拋物線 857
5 橢圓 868 / 6 雙曲線 880 / 7 二次曲線 887 / 8 利用判別式判定拋物線、橢圓抑或雙曲線 891 / 9 圓錐截面 892 / 綜合問題 894

第九章 雙曲線函數 919

1 簡介 919 / 2 定義及等式 919 / 3 導數和積分 921 / 4 反雙曲函數 929
/ 5 吊索 935 / 綜合問題 938

第十章 極坐標 947

1 極坐標 947 / 2 極坐標方程式的描繪 959 / 3 錐線和其他曲線的極座標方程式 964 / 4 積分 976 / 綜合問題 986

第十一章 數列與級數 1005

1 簡介 1005 / 2 數列 1007 / 3 常用之極限 1018 / 4 無窮級數 1023 / 5 正項級數的收斂判別法 1034 / 6 絕對收斂 1045 / 7 交錯級數、條件收斂 1052 / 綜合問題 1061

第十二章 冪級數 1069

1 函數的冪級數 1069 / 2 有餘項之泰勒展式：正弦、餘弦、指數函數 1078 / 3 進一步計算對數函數 $\tan^{-1} x$ 及 π 1086 / 4 不定型 1096 / 5 級數的收斂、積分與乘除 1103 / 綜合問題 1119

第十三章 向 量 1135

1 向量的分量和單位向量 1135 / 2 拋射運動 1141 / 3 解析幾何中的參數方程 1146 / 4 空間坐標系 1155 / 5 空間中的向量與距離 1162 / 6 兩個向量的內積 1167 / 7 空間中兩向量的向量積 1178 / 8 直線、線段和平面方程式 1184 / 9 三個或更多向量的積 1194 / 10. Cylinders (圓柱) 1201 / 11. 二次曲面 1205 / 綜合問題 1215

第十四章 向量值函數及其導函數 1237

1 向量值函數的導函數 1237 / 2 切向量、速度及加速度 1242 / 3 空間中曲線的弧長及單位切向量 T 1249 / 4. 曲線及法向量 1253 / 5. 向量乘積的導數。 v 及 a 的切向量法向分量 1266 / 6. 平面運動及人造衛星 1273 / 綜合問題 1278

第十五章 偏導數 1295

1 二變數或多變數函數 1295 / 2 極限與連續 1301 / 3 偏導數 1307 / 4. 鏈鎖法則 1314 / 5. 非獨立變數 1323 / 6. 梯度，方向導數及切平面 1326 / 7. 高階導數，物理中的偏微分方程 1347 / 8. 線性逼近和增加量估計 1355 / 9. 極大、極小及鞍點 1365 / 10. Lagrange 乘值法 1379 / 11. 恰當型微分方程 1391 / 12. 最小平方 1398 / 綜合問題 1403

第十六章 多重積分 1425

2 重積分 1425 / 3 面積 1437 / 4. 物理的應用 1441 / 5. 變換成極坐標 1450 / 6. 直角坐標系中的三重積分 1457 / 7. 三維中的物理應用 1464 / 8. 柱面坐標與球面坐標上之積分 1470 / 9. 曲面面積 1484 / 綜合問題 1490

第十七章 向量分析 1513

1 向量場 1513 / 2 曲面積分 1515 / 3 線積分及功 1523 / 4. 二維向量場，平面曲線流速 1538 / 5. 格林定理 1542 / 6. 散度定理 1552 / 7. 史托克定理 1567 / 綜合問題 1574

第十八章 微分方程 1585

1 簡介 1585 / 2 微分方程解 1585 / 3. 一階：分離變數 1586 / 4. 一階：齊次 1589 / 5. 一階：線性 1592 / 6. 一階：恰當型 1596 / 7. 二階方程式之特殊型 1599 / 8. 常係數線性方程 1602 / 9. 二階線性常係數齊次方程式 1602 / 10. 二階非齊次常係數線性方程式 1603 / 11. 高階常係數線性方程 1620 / 12. 振動 1622 / 13. 逼近方法冪級數 1625 / 14. 方向場及 Picard 定理 1629 / 15. 數字方法 1634 / 綜合問題 1637

附錄 A 1647

A·1 行列式及 Cramer 法則 1647 / A·2 矩陣與線性方程式 1653 / A·3 極限定理的證明 1659 / A·5 數學歸納法 1661 / A·8 創造數系，複數 1664

第一章 函數的變化率

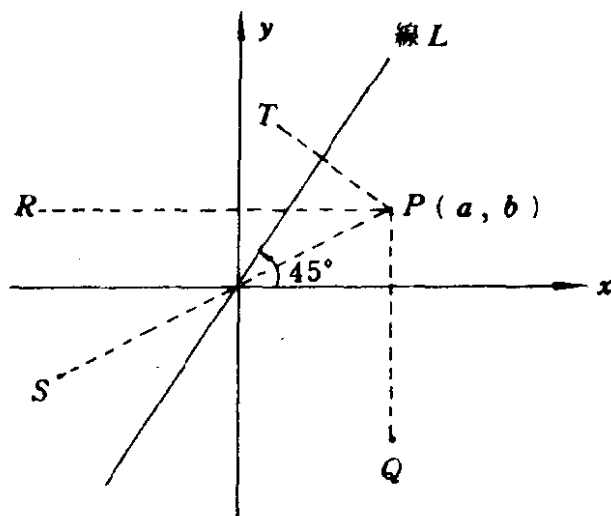
1.1 平面上的座標

問題 1-12，先劃座標軸及所予點 $P(a, b)$ ，次劃下列各點：

- (a) 畫出 Q 使得 PQ 垂直 x 軸且 PQ 為 x 軸所平分，寫出 Q 之座標 (P 及 Q 關於 x 軸為對稱)
- (b) R 點使得 PR 垂直 y 軸且 PR 為 y 軸所平分，寫出 R 之座標 (P 及 R 對於 y 軸為對稱)
- (c) S 點使得 PS 為原點所平分，寫出 S 點座標。 (P 及 S 對於原點為對稱)
- (d) T 點使得 PT 垂直過原點而等分第一、三象限的 45° 線 L 。(見圖 1.6)，設若兩軸單位相等，寫出 T 的座標。 (P 及 T 對於 L 對稱)

- 1 (1, -2) 2 (2, -1) 3 (-2, 2) 4 (-2, 1)
5 (0, 1) 6 (1, 0) 7 (-2, 0) 8 (0, -3)
9 (-1, -3) 10. ($\sqrt{2}, -\sqrt{2}$) 11. ($-\pi, -\pi$) 12. (-1.5, 2.3)

圖 1.6 關於 x 軸， y 軸，原點及 45° 線 L 的對稱



解

2 第一章 函數的變化率

解

座標 \ 題次	1	2	3	4	5	6	7
$P(a, b)$	(1, -2)	(2, -1)	(-2, 2)	(-2, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(-2, 0)
$Q(a, -b)$	(1, 2)	(2, 1)	(-2, -2)	(-2, -1)	(0, -1)	(1, 0)	(-2, 0)
$R(-a, b)$	(-1, -2)	(-2, -1)	(2, 2)	(2, 1)	(0, 1)	(-1, 0)	(2, 0)
$S(-a, -b)$	(-1, 2)	(-2, 1)	(2, -2)	(2, -1)	(0, -1)	(-1, 0)	(2, 0)
$T(b, a)$	(-2, 1)	(-1, 2)	(2, -2)	(1, -2)	(1, 0)	(0, 1)	(0, -2)

座標 \ 題次	8	9	10	11	12
$P(a, b)$	(0, -3)	(-1, -3)	($\sqrt{2}, -\sqrt{2}$)	($-\pi, -\pi$)	(-1.5, 2.3)
$Q(a, -b)$	(0, 3)	(-1, 3)	($\sqrt{2}, \sqrt{2}$)	($-\pi, \pi$)	(-1.5, -2.3)
$R(-a, b)$	(0, -3)	(1, -3)	($-\sqrt{2}, -\sqrt{2}$)	($\pi, -\pi$)	(1.5, 2.3)
$S(-a, -b)$	(0, 3)	(1, 3)	($-\sqrt{2}, \sqrt{2}$)	(π, π)	(1.5, -2.3)
$T(b, a)$	(-3, 0)	(-3, -1)	($-\sqrt{2}, \sqrt{2}$)	($-\pi, -\pi$)	(2.3, -1.5)

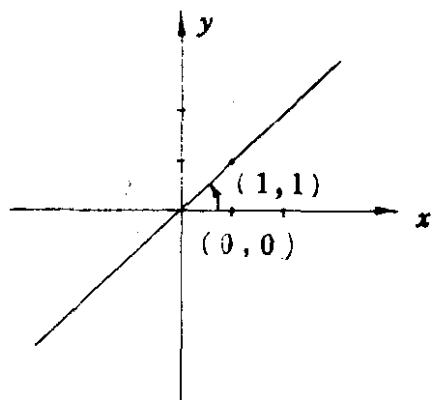
13. 若 $P = P(x, y)$ ，則點 Q 的座標在上題(a)中為 $(x, -y)$ 寫出以 x, y 表 R, S, T 的座標。

解 $R(-x, y), S(-x, -y), T(y, x)$ 。

在問題 14—20 中，設兩軸的單位長相等。

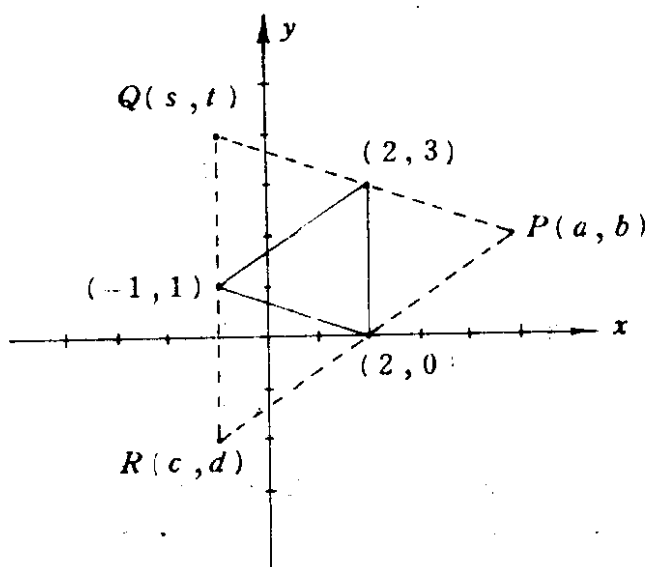
14. 一線過 $(0, 0)$ 及 $(1, 1)$ 其與正 x 軸夾之銳角為多少？畫圖

解 45° 。



15. 以 $(-1, 1), (2, 0)$ 及 $(2, 3)$ 為頂點的平行四邊形有三個畫出並寫出第四頂點的座標。

解



利用對角線兩端點求其中點，則有

$$\frac{(2, 3) + (2, 0)}{2} = \frac{(a, b) + (-1, 1)}{2}$$

$$\Rightarrow (a, b) = (2, 3) + (2, 0) - (-1, 1) = (5, 2)$$

$$\text{故 } Q : (s, t) = (2, 3) + (-1, 1) - (2, 0) = (-1, 4)$$

$$R : (c, d) = (-1, 1) + (2, 0) - (2, 3) = (-1, -2)$$

16. 以 $(3, -2)$ 和 $(-4, -7)$ 為頂點且邊平行兩軸之長方形

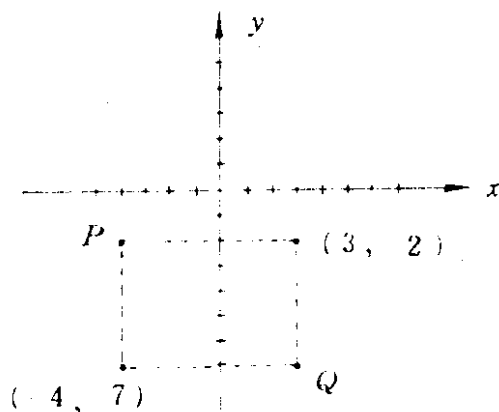
(a) 求其餘兩頂點座標。

(b) 求其面積。

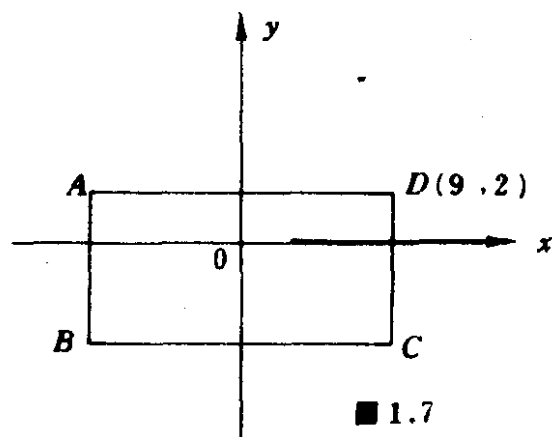
解 (a) $P(-4, -2)$

$Q(3, -7)$

(b) 面積 $= 5 \times 7 = 35$ (平方單位)



17. 圖 1.7 之長方形邊平行兩軸，其長為寬之 3 倍，周長為 56 單位，求頂點 A, B, C 之座標。



解 設寬為 x 單位，則 $2(x+3x) = 56$ ，故 $x = 7$ (單位)，長為 21 單位
 $\therefore A(-12, 2)$ ， $B(-12, -5)$ ， $C(9, -5)$

18. 在第二象限之圓切於兩軸，與 y 軸接於 $(0, 3)$

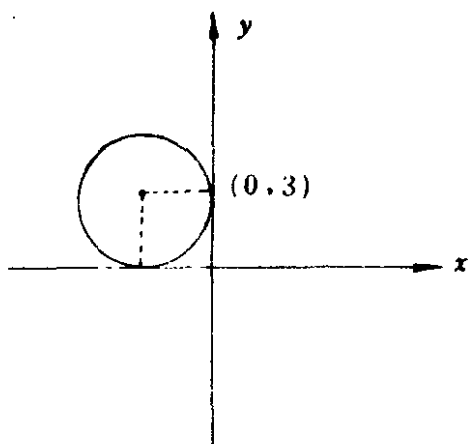
(a) 切 x 軸之點為何？畫圖。

(b) 求圓心。

解 (a) 因切 y 軸於 $(0, 3)$ ，故半徑為 3 單位

\therefore 切 x 軸於 $(-3, 0)$

(b) 圓心 $(-3, 3)$ 。



19. 過 $(1, 1)$ 及 $(2, 0)$ 之直線過 y 軸於 $(0, b)$ ，用相似三角形求 b 。

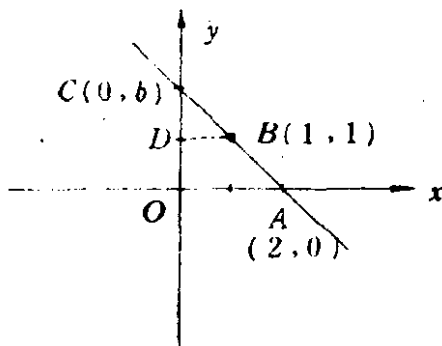
解 如下圖知 $D(0, 1)$

利用 $\triangle ACO \sim \triangle BCD$

$$\text{則 } \frac{BD}{AO} = \frac{CD}{CO}$$

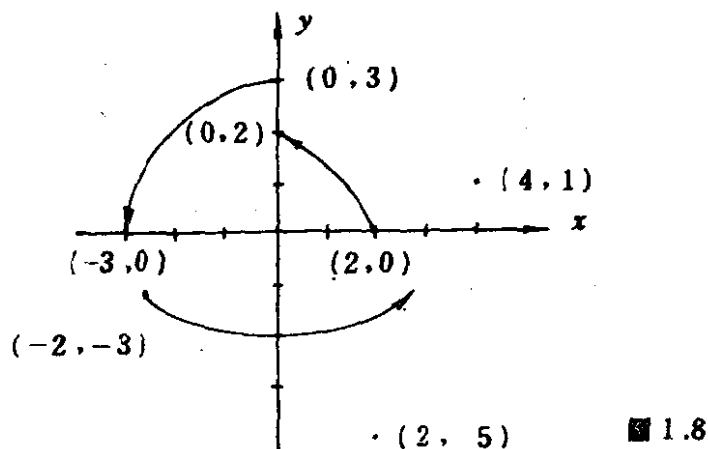
$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{b-1}{b}$$

$$\therefore b = 2$$



20. 對於原點反時鐘方向旋轉 90° ，將 $(2, 0)$ 轉為 $(0, 2)$ ， $(0, 3)$ 轉而 $(-3, 0)$ ，如圖 1.8 所示，求下列旋轉後之點：

- (a) $(4, 1)$ (b) $(-2, -3)$ (c) $(2, -5)$ (d) $(x, 0)$
 (e) $(0, y)$ (f) (x, y) (g) 何點轉成 $(10, 3)$?



解 (x, y) 經旋轉 θ 角 (反時鐘) 後為 (x', y') 其關係為

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\theta = 90^\circ$ ，則 $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ ，故

- (a) $(4, 1) \rightarrow (-1, 4)$ (b) $(-2, -3) \rightarrow (3, -2)$
 (c) $(2, -5) \rightarrow (5, 2)$ (d) $(x, 0) \rightarrow (0, x)$
 (e) $(0, y) \rightarrow (-y, 0)$ (f) $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

(g) $\begin{cases} x' = 10 = -y \\ y' = 3 = x \end{cases}$

$\therefore (x, y) = (3, -10)$ 經旋轉 90° 後為 $(10, 3)$ 。

1.2 增量和距離

1 球心座標如圖 1.9 所示，若球如下運動求淨垂直及淨水平的變化。

- (a) A 到 G (b) D 到 E (c) C 到 F

解 (a) $A(0, 32) \rightarrow G(57, 22)$

淨水平變化 = $\Delta x = 57 - 0 = 57$

淨垂直變化 = $\Delta y = 22 - 32 = -10$

(b) $D(28, 18) \rightarrow E(26, 6)$ $\Delta x = 26 - 28 = -2$

$\Delta y = 6 - 18 = -12$

(c) $C(39, 18) \rightarrow F(40, 4)$

$\Delta x = 40 - 39 = 1$

$\Delta y = 4 - 18 = -14$

2 圖1.9中球心座標若在球再轉由G回F時增量為多少？

解 $G \rightarrow F$

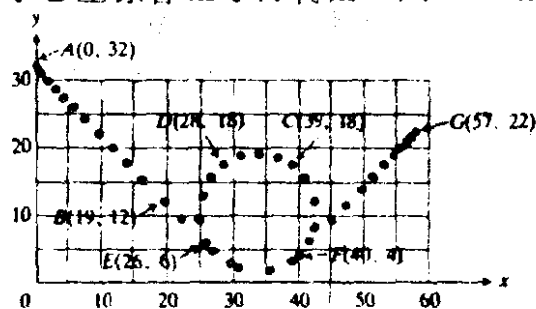


圖1.9 為一圓球繞垂直圓環經多次閃光複製而得之照片。圓球從靜止狀態自左上角A(0,32)處釋放，英文字母標明圓球之連續位置。所給之座標為圓球之中心位置，四捨五入至最近之整數。座標軸之比例單位為公分(cm)。

$$\Delta x = 40 - 57 = -17$$

$$\Delta y = 4 - 22 = -18$$

在問題3-8中，平面上二質點由A至B，點C為過A之水平線和過B之垂直線的交點，畫出直線及求(a)C之座標；(b) Δx (c) Δy ；(d) 假設x軸及y軸單位長相同，求AB長

3 $A(-1, 1), B(1, 2)$

4 $A(1, 2), B(-1, -1)$

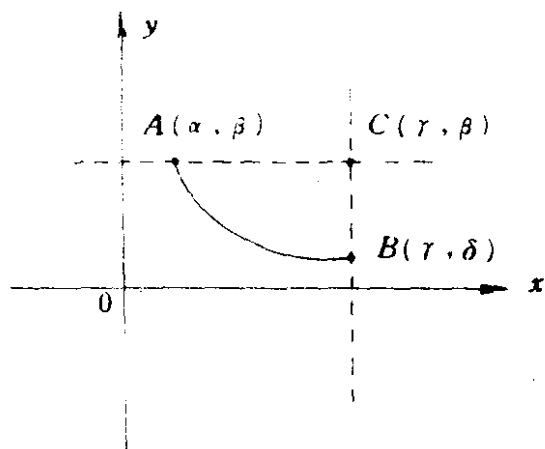
5 $A(-3, 2), B(-1, -2)$

6 $A(-1, -2), B(-3, 2)$

7 $A(-3, 1), B(-8, 1)$

8 $A(0, 4), B(0, -2)$

解



$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (\text{距離公式}) \text{ 見課本(2)式}$$

項目 \ 題次	3	4	5	6	7	8
(a) C	(1, 1)	(-1, 2)	(-1, 2)	(-3, -2)	(-8, 1)	(0, 4)
(b) Δx	2	-2	2	-2	-5	0
(c) Δy	1	-3	-4	4	0	-6
(d) AB	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	5	6

在問題9-16中，平面上質點以增量 Δx 及 Δy 由 $P_1(x, y)$ 至 $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 在各問題中 P_2 位 P_1 之上，下，右方或左方？

9. $\Delta x = 6, \Delta y = 3$

10. $\Delta x = 5, \Delta y = 0$

11. $\Delta x = -2, \Delta y = 0$

12. $\Delta x = 0, \Delta y = 2$

13. $\Delta x = 3, \Delta y = -1$

14. $\Delta x = -1, \Delta y = -2$

15. $\Delta x = 0, \Delta y = -5,$

16. $\Delta x = -4, \Delta y = 0$

解 Δx 決定左，右： $\Delta x > 0$ ， P_2 在 P_1 之右； $\Delta x < 0$ ， P_2 在 P_1 之左
 Δy 決定上，下： $\Delta y > 0$ ， P_2 在 P_1 之上； $\Delta y < 0$ ， P_2 在 P_1 之下
 $\Delta x = 0$ (或 $\Delta y = 0$) 表對於左右方 (或上下方) 為不動。

故 9. 右上方

13. 右下方

10. 正右方

14. 左下方

11. 正左方

15. 正下方

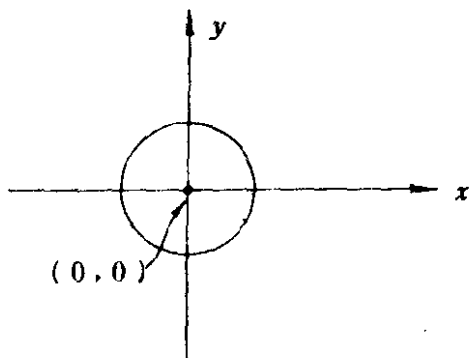
12. 正上方

16. 正左方

在問題 17—20 中，寫出圓心為所予而半徑為 5 單位之圓方程式。畫圖以示其與兩軸之關係。

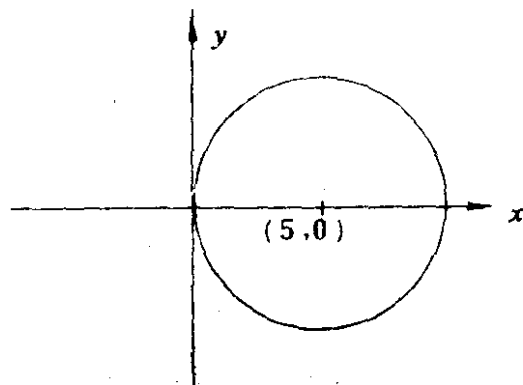
17. $(0, 0)$

解 $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$ (課本公式(3))



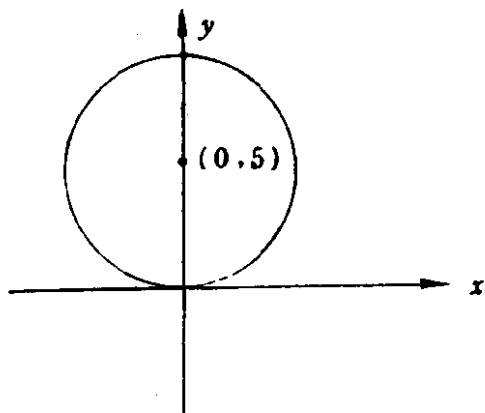
18. $(5, 0)$

解 $(x-5)^2 + (y-0)^2 = 5^2 \Rightarrow (x-5)^2 + y^2 = 25$



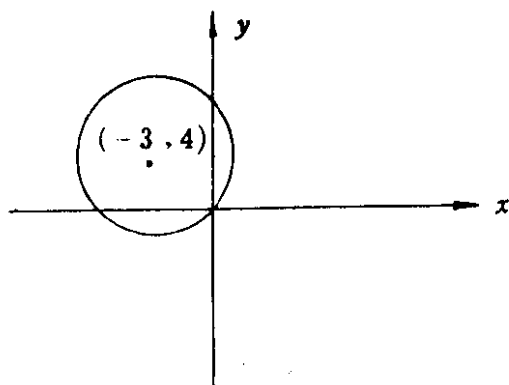
19. (0, 5)

$$\text{解 } (x-0)^2 + (y-5)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + (y-5)^2 = 25$$



20. (-3, 4)

$$\text{解 } (x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$$



21. 寫出圓心為原點且過點(1, 1)之圓方程式。

解 設圓方程式為 $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$, r 為半徑

$$\because \text{圓過 } (1, 1) \quad \therefore 1^2 + 1^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

故圓方程式為 $x^2 + y^2 = 2$

22. 設 L 為過原點且與正 x 軸向成 45° 夾角的直線, 求 L 上距原點 1 單位之點。

解 直線方程式為 $x - y = 0$

$$\text{而 } 1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \Rightarrow 1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow 1 = \sqrt{2} |x| \quad (\because x = y)$$

$$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 或 } -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

故點為 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 及 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

23. 質點原位於 $A(-2, 3)$ 經 $\Delta x = 5$, $\Delta y = -6$ 之改變後, 新位置為何?

解 設 $B(x, y)$ 為其新位置，則 $\begin{cases} \Delta x = x - (-2) = 5 \\ \Delta y = y - 3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$

24. 質點原位於 $A(6, 0)$ ，經 $\Delta x = -6$ ， $\Delta y = 0$ 之改變後，新位置為何？

解 如上題 $(x, y) = (0, 0)$

25. 質點由 $A(x, y)$ 至 $B(3, -3)$ 座標變化 $\Delta x = 5$ ， $\Delta y = 6$ ，求 x, y 。

解 $\begin{cases} \Delta x = 3 - x = 5 \\ \Delta y = -3 - y = 6 \end{cases} \therefore (x, y) = (-2, -9)$

26. 質點原位於 $A(1, 0)$ ，對原點反時鐘方向繞一圈回 $A(1, 0)$ ，則座標淨變化為何？

解 $\Delta x = 1 - 1 = 0$

$\Delta y = 0 - 0 = 0$

27. 質點經 $\Delta x = h$ 及 $\Delta y = k$ 後至 $B(u, v)$ ，則起點位置？

解 設起點位置為 (x, y) ，則

$\begin{cases} \Delta x = u - x = h \\ \Delta y = v - y = k \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (u - h, v - k)$

28. 質點由 $A(-2, 5)$ 至 y 軸以 $\Delta y = 3\Delta x$ 行之，求新座標。

解 由 A 至 y 軸，故 $\Delta y = 0 - 5 = -5$

設新座標為 (x, y) ，則

$\begin{cases} \Delta x = x - (-2) = \frac{1}{3}\Delta y = -\frac{5}{3} \\ \Delta y = y - 5 = -5 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-\frac{11}{3}, 0)$

29. 一質點以定速度 v 沿過原點直線運動，座標系及質點軌跡如圖 1.13 所示，線上質點以 $\Delta t = 1$ 秒間隔，為什麼面積 A_1, A_2, \dots, A_6 相等？如喀卜勒第二定律（見前言）所敘，連接原點及質點之線在相等時間內掃過之面積相同。（題示：由原點到運動直線作一高）

解

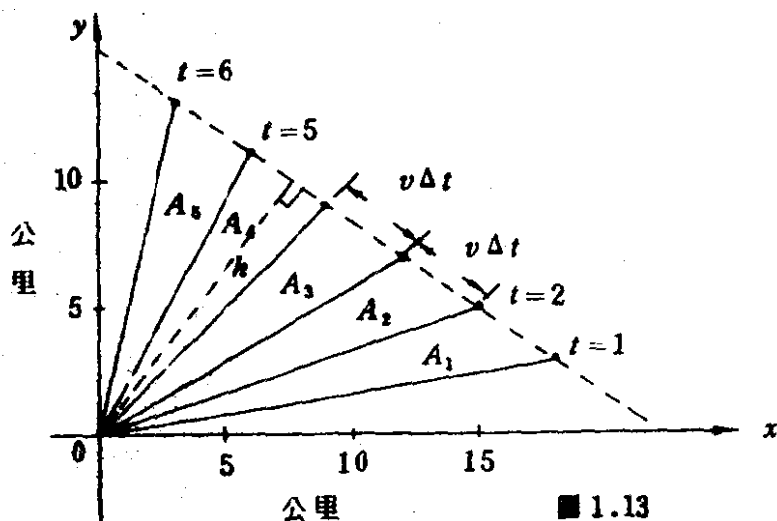


圖 1.13