结构力学教学参考丛书

结构动力学

刘昭培　丁学成

结构力学教学参考丛书

结构动力学

刘昭培　丁学成

本书是为高等工业学校土木、水利、道桥等专业的学生在学完结构力学课程后，进一步加深、加宽结构力学方面的知识而编写的教学参考书。本书与结构力学课程中的动力学部分相衔接，更为深入、系统地讲述了结构动力分析的基本理论和计算方法。

全书共分六章。主要内容包括：一般有限自由度体系和无限自由度体系的振动，频率和振型的常用计算法，动力反应的数值解法，有限单元法及近似解法等。各章附有习题和部分答案，便于读者自学。

本书可作为高等工业学校土木、水利、道桥等专业高年级学生、研究生的选修课教材或参考用书，也可供有关工程技术人员参考。

结构力学教学参考丛书

结构动力学

刘昭培　丁学成

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 8.25 字数 190 000

1989年1月第1版　1989年1月第1次印刷

印数 0001—3 230

ISBN7-04-001108-5/TB·110

定价 2.65 元

前　言

在高等工业学校土建、水利、道桥等专业的结构力学课程中，“结构动力计算”是一比较重要的专题教学内容。为了供本科高年级学生、研究生以及有关工程技术人员进一步学习参考，需要有本加深、加宽结构动力学内容的教学和参考用书，本书就是为此目的而编写的。

本书编写时遵循以下原则：(1) 以《结构力学》教材中有关动力学的基本内容为起点，在保持学科体系的系统性的前提下，对这些内容避免过多地重复；(2)主要采用达朗贝尔原理来阐述有关理论和计算方法，这样物理概念简明易懂，易为读者所接受。本书在近似解法一章中，少量地涉及了变分的原理和方法；(3)限于篇幅，本书仅以杆件体系为分析对象。对各种结构普遍适用的方法，可在所学的杆件体系计算方法基础上予以推广。

与结构力学课程中有关动力学的基本内容相比，本书在以下几方面增加了相应的内容：(1)较详细地介绍了无限自由度体系的振动问题；(2)对有限自由度体系，直接以有惯性耦联的较复杂的体系为讨论对象；(3)编入了有限自由度体系频率和振型的常用计算法，包括：矩阵迭代法，逆迭代法，雅可比法，子空间迭代法；(4)编入了有限单元法；(5)增加了近似解法的内容，在叙述了有关的能量驻值原理后，重点介绍了里兹法；(6)较大篇幅地写入了计算线性和非线性体系动力反应的数值解法，包括：纽马克β法，威尔逊θ法等；(7)增加了阻尼问题的内容，较详细地介绍了非耦联粘滞阻尼的形成方法。

目　录

第一章　结构动力学概论

§1-1 引　　言

一、动力计算的特点

结构动力学研究在动荷载作用下结构的位移和内力（统称为动力反应）的计算原理和方法。所谓动荷载，就其本身的特征而言，是指荷载的大小、方向和作用位置随时间而变的荷载。在它的作用下，结构的位移、内力也随时间改变，并且各质点得到加速度。此时，静力学中的原理和方法便不能直接应用。但是，根据达伦贝尔原理，只要我们在结构上假想地加入质点的惯性力作为结构的外力，则结构便在形式上处于平衡状态，静力学中的某些原理和方法也可以同样地予以引用。

引入惯性力后的平衡常称之为动力平衡。分析一个处于动力平衡状态下的结构虽形式上与静力学问题相似，但问题的实质仍是动力学问题，结构实际上是处于运动状态，所计算的惯性力、位移、内力等都是某一时刻的量值。

结构某一动力反应的最大值与荷载的大小及其变化过程有关。设有一随时间 t 作周期变化的荷载 $p^0\sin\theta t$ 作用于结构，若结构的自振频率接近于 θ 值，则 p^0 值虽很小，也会出现很大的动力反应；反之，当结构的自振频率远大于 θ（譬如说，五倍以上）时，动力反应的最大值与将 p^0 作为静荷载时的结果并没有显著差别。所以，一种随时间改变的荷载是否要看作动荷载，须将其本身的特征与结构的动力特性结合起来考虑，才能决定。

二、动荷载的种类

作用于工程结构上的动荷载，从荷载是否具有随机性的角度来看，可分为确定性和非确定性荷载两大类。

确定性动荷载的变化规律是完全确定的，无论这种变化是周期的或非周期的，是简单的或复杂的，它们都可用确定的函数来描述。这种动荷载作用于结构时，若给定了初始条件，结构在某时刻的动力反应便是唯一确定的。常见的确定性动荷载有：周期荷载，其中尤以简谐周期荷载最为常见；冲击荷载；持续长时间的非周期荷载。

非确定性动荷载也常称为随机荷载，它随时间的变化规律不是预先可以确定的，而是一种随机过程。在基本条件不变的情况下，由于偶然因素的影响，两次荷载随时间变化的过程也不会重现同一波形。随机荷载虽然不能表示为时间 t 的确定性函数，但它们受统计规律的制约，我们需要用概率统计的方法来加以研究以保证结构物的安全。地震荷载、风荷载、波浪压力等都是常见的随机荷载。

限于篇幅，本书只讲述在确定性荷载作用下结构动力反应的计算。关于在随机荷载作用下结构的随机振动问题，可参考其它有关专著。

§1-2 体系的动力自由度及其缩减

和进行静力分析一样，在计算结构的动力反应之前，首先要选取它的计算简图。动力问题的特点是需要考虑质点的惯性力，所以在选取动力计算简图时必须明确结构的质量分布情况并分析质点或质块*)的位移的可能性。体系运动时，确定某一时刻的全部

*) 质块为具有一定尺寸、本身形状不变的质点的集合体。

质点位置所需的独立几何参变量的数目，称为体系的动力自由度。

一切结构都具有分布质量，因之都是无限自由度体系。但除了某些简单结构的动力计算按无限自由度考虑并不困难外(如：当结构为一等截面直杆时，见第四章)，在很多情况下，计算将是很繁杂的。为了避免这种情况，可将实际结构转化为有限自由度体系。常用的转化方法有：

(一) 集中质量法

图 1-1 a 中的梁上有三个较重的质块，若将梁的分布质量也分段集中到这些质块所在处，这样，梁便转化为只具有若干个质块的体系。对于一个作平面运动的质块，一般需要用两个线位移和一个角位移来确定它的位置；相应地，便有两个惯性力和一个惯性

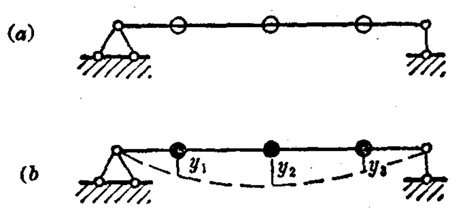

图 1-1

转矩。如与梁的跨度相比，质块的高度很小时，惯性转矩对动力分析结果的影响是次要的，可以略去。因而也就不必以质块的角位移作为基本未知量。这样就相当于把质块看作质点（图 1-1 b）。若再不考虑梁上各质点沿梁轴方向的位移，则图 1-1 b 中各质点便只有竖向位移 y，而体系便简化为只有三个自由度了。

某些情况下结构上并无较重的质块，但为了得到近似解，也可沿结构的杆轴线将分布质量分段集中，使结构转化为有限自由度体系。图 1-2 a 示一截面分段变化的简支梁，若按无限自由度体系求其最低自振频率是较复杂的。采取近似计算时，可将梁分为

三段，把每段的总质量的一半分别集中于各段的两端，再考虑到支座的约束作用和可以不计梁的轴向变形，简化后的体系便只有两个自由度，且 $m_1=\frac{1}{2}(\bar{m}_1 l_1+\bar{m}_2 l_2)$， $m_2=\frac{1}{2}(\bar{m}_2 l_2+\bar{m}_3 l_3)$（见图 1-2 *b*）。当然，若欲提高计算精度，可增加分段数，简化后体系的自由度亦相应增加。

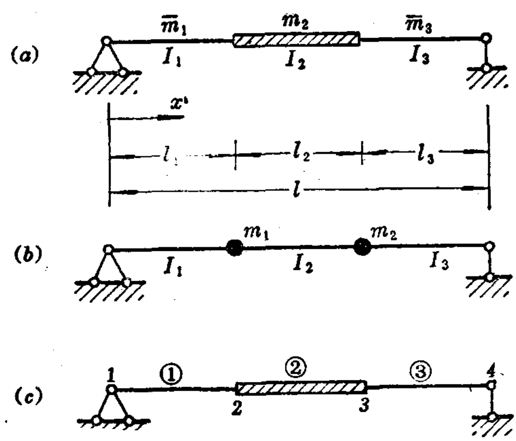

图 1-2

(二) 广义位移法

上面讲述的集中质量法，对于大部分质量实际上集中在几个点的结构来说，是有效而合理的。但若结构上只有分布质量，在给体系选取同样的自由度数的前提下，改用下述的广义位移法便较集中质量法更为精确。

仍以图 1-2*a* 中简支梁为例，设在时刻 t_0 时梁的挠曲线为 $y(x,t_0)$，将它展为三角级数

$$y(x,\ t_0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ (t_0)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{a}$$

若给定各级数项中的系数 $a_n(t_0) \neq (n=1、2、\cdots、\infty)$，则挠曲线 $y(x, t_0)$ 的形状，即全部质点的位置随之确定。这样，体系的无限个自由度便用级数中的无限个参数 $a_n(t_0)$ $(n=1、2、\cdots、\infty)$ 来表征。一般说来，用有限个低频的正弦波的和来表达挠曲线的形状，已足够精确。设只取前三项，即有

$$y(x, t_0)=a_1(t_0)\sin\frac{\pi x}{l}+a_2(t_0)\sin\frac{2\pi x}{l}+a_3(t_0)\sin\frac{3\pi x}{l} \tag{b}$$

以式(b)代替式(a)来表达 $y(x, t_0)$，体系便由无限自由度缩减为只具有三个自由度。这里，$a_1(t_0)$、$a_2(t_0)$、$a_3(t_0)$ 是决定梁的形状亦即全部质点位置的三个彼此独立的坐标。

（三）有限单元法

用有限单元法分析动力问题，可以做到以结构的结点位移表达结构上各个点的位移状态。它综合了上述两种作法的特点，其概念和用于静力分析时是一致的。仍以图 1-2 *a* 中简支梁为例，首先将梁分成适当数量的部分或称为单元，单元之间以结点相联结。图 1-2*c* 表示将简支梁分为三个单元①、②、③，此三单元用结点 2、3 联结并通过结点 1 和 4 与支座相联。结点的位移（包括线位移和角位移）便是用以决定全部质点位置的独立坐标。

与(二)中讲述的方法不同，我们不在整个梁的范围内取有限个函数项的和作为全梁某一时刻的挠曲线，而是在各个单元范围内假定两结点之间的挠曲线，它的表达式也含有若干参数。单元挠曲线应在内部光滑连续，并在单元两端满足支承条件和变形连续条件。根据这些条件，可以将表征结点之间梁轴线位置的参数转换为结点位移*。整个梁的轴线上所有各点的位移都这样以结点处的位移表达后，原给梁便转化为有限自由度体系了。

*) 详细叙述见后面第五章。

以上三种方法中，有的基本未知量即是体系上质点的位移，有明显的几何意义(如方法(一)、图 1-1 中的 y_1、y_2、y_3)，可称为几何坐标。有的基本未知量则不一定具有明显的几何意义，其本身并不是质点的几何位置的变化(如方法(二)中的未知参数 $a_1(t_0)$、$a_2(t_0)$、$a_3(t_0)$、…)，但只要这些参数给定，体系的全部质点的位置即确定。概括而言，对能决定体系上全部质点的几何位置，彼此独立的参数，不论其量纲为何，常称之为广义坐标。

§1-3 体系振动时能量的耗散 阻尼力

实际结构在作自由振动时有衰减现象，振幅随时间逐渐减小；在强迫振动时，外荷载需对结构作功，才能维持振幅不变；这都表明在振动过程中会产生能量的耗散。不同材料、不同类型的结构，在自由振动实验中所得位移-时间曲线的形状、衰减快慢等可有很大差异，所以，它们的能量耗散的情况也不相同。引起能量耗散的因素主要有以下几种：

(一) 结构变形过程中材料的内摩擦。我们可以通过结构的稳态简谐振动实验来表明内摩擦力的作用。图 1-3a 示一单自由度体系，质块受约束限制只能产生水平方向的位移并在简谐力 $p(t)$ 作用下作稳态简谐振动，x 为它偏离静力平衡位置的动位移，R 为以质块为隔离体时，体系的其它部分给予质块的总恢复力(图 1-3b)。通过实验绘制每一振动周期的 R-x 关系曲线(图 1-3c)，则结果表明，此曲线为一闭合曲线 $m'nmn'$，向上凸的线段 $m'nm$ 相应于位移增加阶段，向下凸的线段 $mn'm'$ 相应于位移减少阶段。在此 R-x 关系图上，与某一 R_0 相应的 x 值，在位移增加时为 x_0^1，在位移减少时为 x_0^2；若体系是理想线弹性的，则所相应的位移为 x_0^e。因 $x_0^1 < x_0^e$，$x_0^2 > x_0^e$，这就表明：与理想线弹性关系比较，实际应

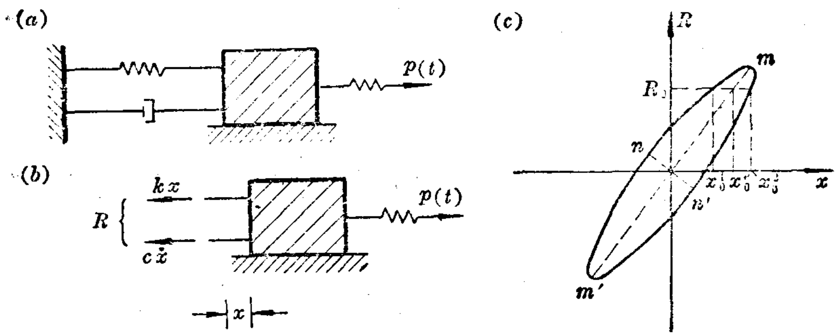

图 1-3

变在进程上总是落后于应力，这种现象称为“滞变现象”。闭合曲线称为滞变回线。滞变回线所包围的面积，即是结构在一振动周期中散失的能量。

（二）周围介质对振动的阻力。

（三）支座、结点等构件联结处的摩擦力。

（四）地基土等的内摩擦阻力。

我们将以上这些使能量耗散的因素统称为阻尼因素。关于阻尼问题，目前研究的还很不够。现有各种阻尼理论大多只研究一种阻尼因素的影响，其中对材料的内摩擦研究的较多。提出了不同类型的理论(假说)。但真实的结构有各种类型，而且对一个结构来说，往往同时存在着几种不同性质的阻尼因素，要想找出一种完善的、可以反映各种结构中阻尼作用的理论是很困难的，故目前还不得不采用相当简化的阻尼模型。在分析动力问题时，要先建立结构的运动方程，为了能反映振动过程中的能量耗散，在建立方程时便须引入一个造成能量耗散的阻尼力。

以下我们介绍目前应用较多，主要是反映内摩擦作用的粘滞阻尼理论。

这种理论假定阻尼力的大小与质点（或质块）的速度成正比，

方向和速度的方向相反。总恢复力R包括弹性力 kx 和阻尼力 $c\dot{x}$ 两部分，即

$$R=kx+c\dot{x} \tag{a}$$

式中：$\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$为质点速度，$k$ 为弹簧刚度，c 为粘滞阻尼系数。为了清楚地表明粘滞阻尼力的存在，常在计算简图上与弹簧并列地画入粘滞阻尼器如图 1-3a 所示。相应的质块受力图已绘于该图 b 中。

考查上式可知，当位移增加($\dot{x}>0$)时，$R>kx$；当位移减少($\dot{x}<0$)时，$R<kx$，从而形成了图 1-3c中的滞变回线。我们可进一步导出简谐振动时滞变回线的方程。设

$$x=x^0\sin(\theta t+\varphi) \tag{b}$$

其中 x^0 为简谐振动的振幅，θ 为简谐振动的圆频率(简称频率)，φ 为相角。将式(b)代入式(a)得：

$$R=kx^0\sin(\theta t+\varphi)+c\theta x^0\cos(\theta t+\varphi) \tag{c}$$

利用式(b)及(c)消去 $\sin(\theta t+\varphi)$和 $\cos(\theta t+\varphi)$，得：

$$(R-kx)^2=c^2\theta^2x^{0^2}\left(1-\frac{x^2}{x^{0^2}}\right)$$

或

$$R=kx\pm c\theta x^0\sqrt{1-\left(\frac{x}{x^0}\right)^2} \tag{d}$$

因此可知粘滞理论的滞变回线为一椭圆。

本节只是就产生阻尼力的因素和常用的粘滞阻尼理论的要点作一概括叙述，更详细的内容见以下各章。

§1-4 建立运动方程的方法综述

在确定性荷载下作动力分析时，目的是要求出动位移和动内力，并研究它们随时间变化的规律。由于影响位移大小的惯性力

本身也是以未知位移对时间的导数来表达的，所以一般来讲，我们需先建立体系的运动微分方程（简称运动方程），再根据初始条件进行解算，从而确定体系的运动状态。

建立体系运动方程的方法有各种各样，但从数学的角度来看，所根据的原理可分为非变分的与变分的两种，而每种又有积分的与微分的两类。虽然推导体系的运动方程可以从不同的角度出发，但结果终归是一致的。在这一节我们只对这些原理和方法概括地予以综述，使读者有一个初步的了解。

一、非变分的动力学原理

非变分的动力学原理描述所有真实运动都须满足的关系。如果这些关系是属于每一瞬时的，就是微分的原理，若是有限时间段内的关系，则是积分的原理。前者如达朗贝尔原理，后者如能量守恒原理。

利用达朗贝尔原理建立运动方程时，在引入惯性力后，便可形式上完全按静力问题处理。与静力问题中的位移法、力法两种方法相应，在建立运动方程时也有利用动力平衡条件和位移条件两种作法。它具有形象鲜明，物理概念清楚的优点。只要读者熟悉了静力问题的解法，用此种方法列运动方程是没有什么困难的。缺点是解决较复杂问题时困难较大，且不便于用它来推证某些结论（如：与能量有关的问题）。

二、变分的动力学原理

变分的动力学原理提供了一种将真实运动与其他在同样条件下运动学上可能的运动区别开来的准则。虚位移原理是微分的变分原理，而哈密顿原理是积分的变分原理。

在结构静力学中，我们已学习过变形体的虚位移原理，现在只

要将质点的惯性力作为荷载施加于结构，便可在形式上与静力问题一样地来应用虚位移原理。变分动力学原理的优点是适应性强，可利用它推出运动的普遍规律，且直接处理的物理量为与坐标选择无关的标量；缺点是较为抽象。

限于篇幅，本书主要根据非变分动力学原理来建立体系的运动方程。读者如进一步学习变分的原理和分析方法，可参考王光远教授编著的《应用分析动力学》（高等教育出版社 1981 年出版）或其它专著。

第二章　单自由度体系的振动

§2-1　单自由度体系振动的几个基本问题

一、运动方程

单自由度体系可以用图 2-1 所示的模型来代表。图中 m 为质块的质量；k_{11} 为弹簧刚度 $\left(\text{其柔度} f_{11}=\dfrac{1}{k_{11}}\right)$；为了表征存在阻尼因素，绘入了阻尼器，$c$ 为粘滞阻尼系数；$p(t)$ 为作用的干扰力。将坐标原点设在质块的静力平衡位置处，坐标 y 即表示自静力平衡位置算起的质块的动位移。在任一瞬时取质块为隔离体，作用于其上的力有下列四种：

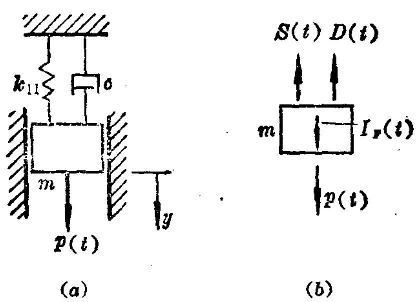

图　2-1

1. 弹性恢复力：$S(t)=k_{11}y$，与位移 y 的方向相反；
2. 阻尼力：$D(t)=c\dot{y}$，与速度 $\dot{y}$ 的方向相反；
3. 干扰力：$p(t)$，指向 y 的正向；
4. 惯性力：$I_F(t)=-m\ddot{y}$，指向加速度的正向。