报考硕士研究生复习参考丛书

# 高等数学复习指导

## （上册）

郭豫敏　姜培润　编

河北教育出版社

报考硕士研究生复习参考丛书

**高等数学复习指导**

（上册）

敏[illegible]培润[illegible]编

河北教育出版社[illegible]（石家庄市北马路45号）

河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

850×1168毫米　1/32　11.25 印张　279,000 字　印数：1—5,400　1987 年 5 月第 1 版

1987 年 5 月第 1 次印刷　统一书号：7509·12　定价：2.25 元

# 前　言

科学技术的发展，需要年轻的后备军。当前，报考硕士研究生已成为有发有为的知识青年的理想。为此，我们编写了这本《高等数学复习指导》（分上、下两册出版），希望能对报考理工科研究生的青年有所帮助。

本书是笔者根据多年来在教学中积累的资料与近年来指导本科应届毕业生报考研究生的辅导材料编写的。在编写过程中，还参阅了近年来全国各高等院校及科研单位的研究生试题，并精选了一些有代表性的试题作为本书的部分例题与练习题。全书所包括的内容是比较全面的，在选材的深度上也和报考理工科研究生的要求相吻合。

报考理工科研究生，不仅要有较全面的高等数学知识，还要有较高的解题能力。本书着眼于提高解题能力，力求全面地总结归纳高等数学中有关的解题方法与技巧。对较难的例题，均介绍了解题思路，许多例题还给出多种解法。此外，还随时指出解题过程中容易出现的错误。凡此种种，都是为了使读者开扩解题思路，提高解题的能力。

高等数学的内容是很丰富的，为了便于掌握，本书各章节均对主要内容给以清晰的概括，并指出各部分必须深入掌握的重点。

本书除作为报考研究生的指导书外，还可作为各类大专院校的高等数学教学参考书。考虑到理工科各专业对高等数学的要求不尽相同，本书部分内容标有＊号，以供对数学要求较高的各专业学生选读。

本书各章节均有相对的独立性，便于读者选学自己所需的部分。另一方面，各部分例题的安排是有系统的，采用了由浅入深，逐步介绍各种方法与技巧的方式。

本书各章均有练习题，练习题是本书有机的组成部分，读者应尽量独立完成。练习题配有答案，较难的练习题有解题提示。

本书编写后请河北大学数学系梁鸿绩先生和尹崇智先生分别审阅了部分内容，谨此致谢。

由于编者水平所限，错误之处恳请指正。

编者

1985年12月

# 目　　录

## 下册简目

# 第一章　函数与极限

## §1. 基本概念与基本性质

**本节重点：**

1. 函数的概念；
2. 从定义证明极限或证明函数的连续性；
3. 证明极限或连续函数的某些简单性质；
4. 判断函数的连续性与间断点的类型。

### 一、函数

**1. 函数的定义**

设给定实数集 $X$ 与对应规律 $f$，如果对于 $X$ 中的每个 $x$，按照对应规律 $f$，有唯一确定的实数 $y$ 与之对应，则称 $f$ 为定义于 $X$ 的**函数**. $f(x)$ 为 $x$ 所对应的函数值。习惯上，用 $y=f(x)$ $(x\in X)$ 表示函数。$X$ 称为函数的**定义域**，集合 $\{y:\ y=f(x),\ x\in X\}$ 称为函数的**值域**。

**2. 函数的几何特性**

如果对于区间 $X$ 的任意两个点 $x_1$、$x_2$，$x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上是**严格单调增加**（或**严格单调减少**）的。如果将不等式改为 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上是**单调增加**（或**单调减少**）的。

设 $f(x)$ 定义于 $X$. 如果对任意的 $x\in X$，恒有 $-x\in X$，并

且$f(-x)=-f(x)$（或$f(-x)=f(x)$），则称$f(x)$是**奇**（或**偶**）**函数**。奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于$y$轴对称。

设$f(x)$在$X$有定义。如果存在$M>0$，使得对任意的$x\in X$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称$f(x)$在$X$上是**有界**的。

设$f(x)$定义于$X$，如果存在$T>0$，使得对任意的$x\in X$，恒有$x+T\in X$，并且$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$为以$T$为周期的**周期函数**。一般，周期函数的周期是指使$f(x+T)=f(x)$对所有的$x\in X$成立的最小正数$T$。

**3．复合函数**

设$y=f(u)$定义于$U$，$u=\varphi(x)$定义于$X$，如果$\varphi(x)$的值域$U_1\subset U$，则$y$是$x$的**复合函数**：$y=f(\varphi(x))$。

条件$U_1\subset U$是重要的，否则记号$y=f(\varphi(x))$是没有意义的。

设$y=f(x)$的定义域为$X$，值域为$Y$。如果对任意的$y\in Y$，在$X$中只有一个$x$满足$f(x)=y$，令$y$对应这个$x$，便得到由$y=f(x)$定义的**反函数**：$x=f^{-1}(y)$。

如果对任意的$x_1$、$x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，都有$f(x_1)\neq f(x_2)$。则$y=f(x)$有反函数。特别，在区间上严格单调增加（或减少）的函数必有反函数，并且反函数也是严格单调增加（或减少）的函数。

**4．初等函数**

下列五类函数称为**基本初等函数**：幂函数（$y=x^a$，$a$为常数）；指数函数（$y=a^x$，$a>0$，$a\neq1$）；对数函数（$y=\log a^x$，$a>0$，$a\neq1$）；三角函数（$y=\sin x$，$y=\cos x$等）；反三角函数（$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$等）。

必须熟记基本初等函数的一切几何特性。为此，只需熟记各基本初等函数的图象。尽管函数的图象是在讨论了几何特性的基础上作出的，但作为结论，记住图象便可记住函数的一切特性。

例如，记住了 $y=\operatorname{arc\,tg} x$ 的图象（图 1-1），不仅可以记住它是单调增加的、有界的奇函数。并且也记住了极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{2}$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,tg} x=-\frac{\pi}{2}$。

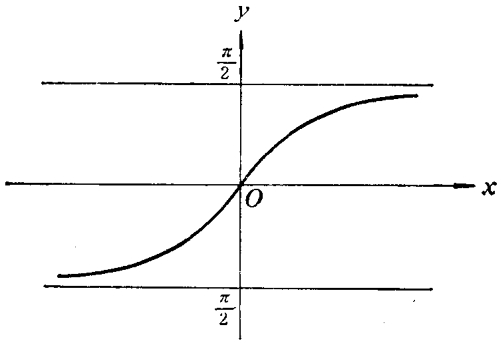


图 1-1

由常数和基本初等函数经有限次的四则运算与复合得到的函数称为**初等函数**。

一般地说，"分段函数"不是初等函数。

**例 1** 求函数 $f(x)=\sqrt{7x-3x^2-2}+\ln\sin\frac{\pi}{x}$ 的定义域。

**解**：$7x-3x^2-2\geqslant0$，即 $(3x-1)(2-x)\geqslant0$。解之得

$$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant2.$$

为使 $\ln\sin\frac{\pi}{x}$ 有意义，必须 $\sin\frac{\pi}{x}>0$。即

$$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi,\ (k=0,\pm1,\ \pm2,\cdots),$$

当 $k=0$ 时，得 $x>1$，当 $k\neq0$ 时，得 $\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$。

于是，所求函数的定义域必须满足$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 2$，并且$x>1$或

$\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$ $(k=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\cdots)$，所以函数的定义域是

$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)$和$(1,2]$.

解决这类问题，应熟悉基本初等函数的性质和不等式的解法。

**例 2** 设$f(x)$定义于$(0,\ 1)$，求$F(x)=f(\sin x)$与$G(x)=f(\ln x)$的定义域。

**解**：只有$\varphi(x)$的值域含于$f(x)$的定义域时，$f(\varphi(x))$才有意义。

对$F(x)$，必须要求$0<\sin x<1$. 故$F(x)$的定义域是$2k\pi<x<(2k+1)\pi$，$(k=0,\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\cdots)$.

同理，由$0<\ln x<1$知$1<x<e$，故$G(x)$的定义域是$(1,e)$.

**例 3** 设$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$ $(x\neq 0)$，求$f(x)$.

**解**：令$t=\frac{1}{x}$，则$x=\frac{1}{t}$，故

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}=\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}.$$

即
$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|},\quad (x\neq 0).$$

或
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}, & x>0,\\[2mm] \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}, & x<0.\end{cases}$$

这个例题有两个问题值得注意：①一个函数只要定义域与对应规律不改变，即对定义域中的每个实数值所确定的函数值不变，写成 $f(x)$ 或 $f(t)$ 是无关紧要的；② $\sqrt{x^2}=|x|$，不可误为 $\sqrt{x^2}=x$。

**例 4** 设 $f(x)=x^2-1$, $g(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

求 $f(f(x))$、$g(g(x))$、$f(g(x))$、$g(f(x))$。

**解**：$f(f(x))=f(x^2-1)=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2$。

当 $x>0$ 时，$g(x)=1$，因此 $g(g(x))=g(1)=1$，$f(g(x))=f(1)=0$；

当 $x=0$ 时，$g(x)=0$，因此 $g(g(x))=g(0)=0$，$f(g(x))=f(0)=-1$；

当 $x<0$ 时，$g(x)=-1$，因此 $g(g(x))=g(-1)=-1$，$f(g(x))=f(-1)=0$。

综上可得 $g(g(x))=g(x)$，而

$$f(g(x))=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ -1, & x=0.\end{cases}$$

当 $|x|>1$ 时，$f(x)>0$，故 $g(f(x))=1$；当 $|x|=1$ 时，$f(x)=0$，故 $g(f(x))=0$；当 $|x|<1$ 时，$f(x)<0$，故 $g(f(x))=-1$。因此

$$g(f(x))=\begin{cases}1, & |x|>1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|<1.\end{cases}$$

**例 5** 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中 $a$、$b$、$c$ 是常数，并且 $|a|\neq|b|$，证明 $f(x)$ 是奇函数。

**证**：将 $x$ 换成$\frac{1}{x}$，代入所给等式，得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx.$$

如果 $a=0$，由条件知 $b\neq 0$，因此 $f(x)=\frac{c}{b}x$ 是奇函数；如果 $a\neq 0$，将

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{cx-bf(x)}{a}$$

代入原等式，得

$$af(x)+b\cdot\frac{cx-bf(x)}{a}=\frac{c}{x}.$$

因为$|a|\neq|b|$，故可解出

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right),$$

从而 $$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)=-f(x),$$

因此 $f(x)$ 是奇函数。

**例 6** 设 $f(y)$ 定义于 $(-\infty,\ +\infty)$，并且存在正数 $k$ 和 $T$，使 $f(x+T)=kf(x)$ 对一切 $x$ 成立。证明存在正常数 $a$ 和以 $T$ 为周期的函数 $\varphi(x)$，使得 $f(x)=a^x\varphi(x)$。

**证**：对任意的 $a>0$，有 $a^x>0$，因此 $\frac{f(x)}{a^x}$ 有意义。只需证明可适当选取正数 $a$，使 $\varphi(x)=\frac{f(x)}{a^x}$ 是以 $T$ 为周期的函数就可以了。

设 $\varphi(x)=\frac{f(x)}{a^x}$，其中 $a$ 是待定正数，因为

$$\varphi(x+T)=\frac{f(x+T)}{a^{x+T}}=\frac{kf(x)}{a^{x}\cdot a^{T}}=\frac{k}{a^{T}}\varphi(x).$$

所以，要想 $\varphi(x)$ 是周期函数，只需取 $\frac{k}{a^T}=1$，即 $a=k^{\frac{1}{T}}$。

因此，取 $a=k^{\frac{1}{T}}$，则 $f(x)=a^x\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 是以 $T$ 为周期的函数。

## 二、极限的概念与性质

### 1．极限的概念

（1）数列的极限　已知数列 $\{x_n\}$ 与数 $a$。如果对于任意给定的正数 $\varepsilon$，存在正整数 $N$，使当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$，则称数 $a$ 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**或 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。此时称数列 $\{x_n\}$ 收敛。如果 $\{x_n\}$ 不收敛，则称数列发散。

（2）函数的极限　设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个邻域内有定义（不考虑点 $x_0$ 本身），如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称数 $A$ 是函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的**极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

在函数极限的定义中，如果将不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 换成 $x_0<x<x_0+\delta$（或 $x_0-\delta<x<x_0$），则数 $A$ 称为函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的**右极限**（或**左极限**）记作 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$（或 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$）。

如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\Delta>0$，使当 $|x|>\Delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 $x$ 趋于 $\infty$ 时 $f(x)$ 的极限是 $A$，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。如果在 $x>\Delta$（或 $x<-\Delta$）时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$）。

**2. 有关极限的定理**

这里只讨论函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的情形，对于数列的极限和其它形式的函数极限也都有类似结果。

(1) 唯一性　如果 $f(x)$ 在点 $x_0$ 有极限，则极限是唯一的。

(2) 有界性　如果 $f(x)$ 在点 $x_0$ 有极限，则存在正数 $\delta$ 和 $M$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<M$。

(3) 保号性　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，并且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，使得对一切满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 $x$，都有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）。

(4) 夹挤定理　如果存在 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，并且 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

(5) 运算法则　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B;\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B.$$

在 $B\neq0$ 时，又有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$g(x)$ 在 $x_0$ 的某个邻域内有界，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$。

**3. 数列收敛准则**

(1) 单调有界数列必收敛。

*(2) 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N$，使当 $m$、$n>N$ 时，$|x_n-x_m|<\varepsilon$。

**4. 无穷大量**

如果对任意给定的 $M>0$，存在 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 为 $x$ 趋于 $x_0$ 时的**无穷大量**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$。如果在 $x_0$ 附近除 $x_0$ 外恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$），

则无穷大量也记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$(或 $-\infty$)。

对于数列和函数在 $x\to x_0+0$，$x\to\infty$ 等等情形，也可类似地定义。

必须注意，对无穷大量虽然也使用了极限的记号，但在谈到函数或数列的极限存在时，如不特别声明，应排除极限是无穷的情形。

**5．无穷小量的阶的比较**

以零为极限的函数（或数列）称为**无穷小量**。设 $\alpha$，$\beta$ 是无穷小量。

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0\left(\text{或}\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty\right)$，则称 $\beta$ 是比 $\alpha$ **高阶的无穷小量**，记作 $\beta=o(\alpha)$。

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=a\neq 0$，则称 $\beta$ 与 $\alpha$ 是**同阶无穷小量**。特别，若 $a=1$，则称 $\alpha$ 和 $\beta$ 是**等价无穷小量**，记作 $\alpha\sim\beta$。

如果 $\beta$ 和 $\alpha^k(k>0)$ 是同阶无穷小量，则称 $\beta$ 关于 $\alpha$ 是 **$k$ 阶无穷小量**。

**例 7** 从定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+6}{n^2+5}=1$。

**证**：要证对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N$，当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{n^2+n+6}{n^2+5}-1\right|<\varepsilon$。由于

$$\left|\frac{n^2+n+6}{n^2+5}-1\right|=\frac{n+1}{n^2+5}<\frac{n+n}{n^2}=\frac{2}{n},$$

所以要想 $\left|\dfrac{n^2+n+6}{n^2+5}-1\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$。

因此，对任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{n^2+n+6}{n^2+5}-1\right|<\varepsilon.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+6}{n^2+5}=1.$$

从定义证明极限，用的是综合分析法，即倒推的方法。做题时，务必表达清楚。

**例 8** 从定义证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}(x_0\neq 0)$.

**证：** 要证对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$.

设 $|x-x_0|<\frac{|x_0|}{2}$，则 $|x_0|-|x|\leqslant|x-x_0|<\frac{|x_0|}{2}$，从而 $|x|>\frac{|x_0|}{2}$.

故
$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\left|\frac{x_0-x}{xx_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{|x||x_0|}<\frac{|x-x_0|}{\frac{|x_0|}{2}\cdot|x_0|}=\frac{|x-x_0|}{\frac{x_0^2}{2}}.$$

因此，要想 $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$，只要 $|x-x_0|<\frac{|x_0|}{2}$，并且 $\frac{|x-x_0|}{\frac{x_0^2}{2}}<\varepsilon$，即 $|x-x_0|<\frac{x_0^2\varepsilon}{2}$. 所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{|x_0|}{2},\frac{x_0^2\varepsilon}{2}\right\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$. 这就证明了我们的结论。

此例，在限制 $x$ 满足 $|x-x_0|<\frac{|x_0|}{2}$ 的前提下推出 $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\frac{|x-x_0|}{x/2}$，从而找出所要求的 $\delta$，这是在证明函数极限时常用的

方法，要注意不能将$\frac{|x-x_0|}{|x||x_0|}$的分母中的$|x|$换成$|x_0|$以寻找$\delta$(即取$\delta=x_0^2\varepsilon$)，因为$x\to x_0$意味着$x$永远不等于$x_0$，并且$x$应在$x_0$的某个邻域内取值。

例 9　设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$。反之，已知$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，能否得出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$？

**证**：对任意给定的$\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$可知存在正整数$N$，当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$。因为$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$，所以对上述$N$，当$n>N$时，亦有$||x_n|-|a||<\varepsilon$，这表明$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$。

取$x_n=(-1)^n$，有$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$，但极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在。这说明，在$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$时，不能保证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

**例 10**　证明数列$x_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$收敛。

**证**：$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{(n+1)^2}>x_n\,(n=1,2,3,\cdots)$，所以数列单调增加。另一方面，对每个$n$，

$$0<x_n=1+\frac{1}{2\cdot2}+\frac{1}{3\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot n}$$

$$<1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=2-\frac{1}{n}<2.$$

所以数列有界。因此$\{x_n\}$收敛。