部定大學用書

微分方程式

國立編譯館大學用書編審委員會主編

沈　璿編著

國立編譯館出版
正中書局印行

J41180/22

部 定 大 學 用 書

微 分 方 程 式

國立編譯館大學用書編審委員會主編

沈 璿 編 著

602476

國 立 編 譯 館 出 版
正 中 書 局 印 行

版權所有　翻印必究

中華民國四十八年九月臺初版
中華民國六十二年十月臺十版

部定大學用書 微分方程式

全一册 基本定價 精三元九角 平二元四角
（外埠酌加運費匯費）

主編者 國立編譯館大學用書編審委員會
編著者 沈　璿
出版者 國立編譯館
發行人 李　潔
發行印刷 正中書局
（臺灣臺北市衡陽路二十號）
暫遷臺北市南昌路一段十二號
海外總經銷 集成圖書公司
（香港九龍旺角洗衣街一五三號地下）
海風書店
（日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番地）
東海書店
（日本京都市左京區田中門前町九八番地）

內政部登記證 內版臺業字第〇六七八號（4227）昇
（1000）

721/130/22

編 輯 趣 旨

本書係應教育部大學用書編審委員會之託，爲修畢大學一年級微積分者所編著，以供其繼續修習之微分方程式教課之用；內容之主要材料，期能於每週四小時十五週內授完，若略去其附有“*”記號之各章節，則期能於每週三小時同時期內授完。

本書除第八章外，概注重各種微分方程式之解法，至於理論上須附之嚴密的制限條件，並不一一詳記。

對於記述各種微分方程式之解法，爲使初學者易於接受及理解起，概採取簡單而容易引伸至普遍型式者，予以詳細說明，或僅說明其簡單型式之解法，而將引伸至普遍型式之要點摘記於「附註」，以省篇幅。

全書分十章，並加「附錄」，「習題答」，「中英名詞對照及索引」等三項目；各章之主要內容列記於後頁「目次」；書內所用主要名詞概依據教育部公布之數學名詞。

編著本書時，主要參考下列諸書：

H. T. H. Piaggio: An elementary treatise on differential equations and their applications. (1952)

A. R. Forsyth: A treatise on differential equations. (1914)

E. L. Ince: Ordinary differential equations. (1927)

A. Cohen: An elementary treatise on differential equations. (1933)

H. Levy and E. A. Baggott: Numerical solutions of differential equations (Dover, New York), (1950)

E. Kamke: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. 1, (Chelsea, New York), (1948)
坂井英太郎:微分積分學演習 第三卷(1952)
吉江琢兒:初等常微分方程式 (1937)
岩波講座現代應用數學B.4(微分方程式之近似解法),(1957-8)

微分方程式所涉之範圍,頗爲廣泛,編者菲才,謬誤之處,自所難免,又資料之選擇以及其排列之次序等,亦深恐杜撰,諸祈各方賢達,不吝指教,俾能隨時改善。

編著人　謹識

己亥年　春日

试读结束：需要全本请在线购买： www.er

再版序言

本書出版後，承各方賢達，尤以臺灣大學數學系教師同仁，指出頗多錯誤，深爲感激，特誌之以表謝忱；此等錯誤，藉此再版之機會，均已改正，惟恐尚有謬誤不尠，仍希各方賢達，不吝指教，俾能漸次修改以臻完善。

編著人　謹識

庚子年　春日

三版序言

本版已將迄今所發見之錯誤，悉予以修正，並增加少數雜題，以資補充。

蒙各方賢達指示錯誤，謹表衷心之謝忱。

編著人　謹識

辛丑年　春日

目　次

第一章 引 言

1·1 微分方程式之分類——階數，次數。

凡表示因變數與其導數及自變數間之關係之等式，稱曰**微分方程式**。若微分方程式中祇含有一自變數，則稱之曰**常微分方程式**，例如

$$\frac{dy}{dx}-y-2x=0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+y=0 \tag{2}$$

等，其中 y 爲因變數，而僅有一自變數 x，故 (1) 與 (2) 俱稱爲常微分方程式。若微分方程式中含有二個或二個以上之自變數，則稱之曰**偏微分方程式**，例如

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{4}$$

等，其中 z 爲因變數，並含有二自變數 x,y，故 (3) 與 (4) 俱稱爲偏微分方程式。

微分方程式中，其所含導數之最高階數，稱爲該微分方程式之**階數**，例如 (1) 稱爲第一階常微分方程式，(2) 稱爲第二階常微分方程式，(3) 稱爲第一階偏微分方程式，(4) 稱爲第二階偏微分方程式等。

當將微分方程式化成其所含導數之有理整式時，其最高階導數之最高冪數，稱爲該微分方程式之**次數**，例如

$$\frac{dy}{dx}+x^2y=0 \tag{5}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.er

稱爲第一次第一階常微分方程式,又如以

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=y+x\frac{dy}{dx}$$

$$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=3\frac{d^2y}{dx^2}$$

等化成其所含導數之有理整式,即

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)^2 \tag{6}$$

$$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3=9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2; \tag{7}$$

(6) 稱爲第二次第一階常微分方程式,(7) 稱爲第二次第二階常微分方程式;惟此後爲使名稱簡明起見,如 (5) 之型式,則稱爲一次一階常微分方程式,(6) 稱爲二次一階常微分方程式,(7) 稱爲二次二階常微分方程式,其他類推;對於偏微分方程式之次階名稱亦然.通常對於微分方程式之次階名稱,就微分方程式之本質而言,因其次數之重要性較小,爰概略之而僅標出其階數.

除上述常微分方程式與偏微分方程式之名稱以外,尚有稱爲**全微分方程式**者;普通於常微分方程式所含之變數中,以 x 爲自變數,則此外以因變數與其導數視爲 x 之函數;又於含有二自變數之偏微分方程式內,以 x, y 爲二自變數,則此外以因變數 z 與其偏導數視爲 x 或 y,或 x, y 二者之函數;但所謂全微分方程式者,其所含之變數中,不一定以何者爲自變數或因變數,乃僅決定數個變數之微分間之關係而已,例如

$$x\,dx+y\,dy=0,$$

$$dx^2+dy^2+dz^2=0,$$

$$yzdx+zxdy+xydz=0$$

等.

1·2 常微分方程式之構成

設有一方程式, $F(x,y,c)=0,$ (1)

此中 c 為任意常數，x 為自變數，y 為因變數；今就 x 作 (1) 之微分式，則得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0\ ;$$

在理論上，由 (1) 與甫得之式消去 c，此時得 $x, y, \frac{dy}{dx}$ 間之一關係式，即一個一階微分方程式：
$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0; \tag{2}$$
因 (2) 中不含 c，故不論 c 為任何值，由 (1) 所規定之函數 y 必滿足 (2)。

次設
$$F(x, y, c_1, c_2)=0, \tag{3}$$
此中 c_1, c_2 為二任意常數，x 為自變數，y 為因變數；今就 x 連接二回作 (3) 之微分式，則得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0;$$

於是，由此二式與 (3)，在理論上可消去 c_1, c_2 而得一個二階微分方程式
$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0; \tag{4}$$
因 (4) 中不含 c_1, c_2，故不論 c_1, c_2 為任何值，由 (3) 所規定之函數 y 必滿足 (4)。

仿上所述，由含有 n 個不定常數 $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ 之方程式：
$$F(x, y, c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n)=0, \tag{5}$$
在理論上可消去 $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ 而得一個 n 階微分方程式，
$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots\cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0; \tag{6}$$
因 (6) 中不含 $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$，故不論 $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ 為任何值，由 (5) 所規定之函數 y 必滿足 (6)。

吾人稱(1),(3),(5)依次為微分方程式(2),(4),(6)之原函數；茲舉數

例以說明 原函數消去其所含之不定常數於次。

(例一) $$y = mx + b. \tag{i}$$

設於方程式(i)中，以m, b俱視爲定常數，則(i)所表示之軌跡爲一定直線．若以m視爲定常數，而以b爲任意常數，則隨b之值變更而(i)乃表示不同之直線，惟此等直線係互相平行，蓋各直線之斜率俱爲同一值m故也；次就x作(i)之微分式，則得

$$\frac{dy}{dx} = m, \tag{ii}$$

此乃表示一羣平行線之微分方程式． 又若以b爲定常數而以m爲任意常數，則由(i)與(ii)消去m，而得

$$x\frac{dy}{dx} = y - b, \tag{iii}$$

此乃表示通過定點(o,b)之一羣直線之微分方程式． 更若以m,b俱視爲任意常數，則(i)所表示之直線，其位置全然未定，卽此時(i)係表示一任意直線；今欲自(i)消去m與b，則祇需就x再作(ii)之微分式可矣，卽

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{iv}$$

此乃表示一任意直線之微分方程式．

(例二) $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{v}$$

(v)係表示圓之方程式，其中心爲(a,b)，半徑爲r． 若將a,b視爲任意常數而r爲定常數，則(v)係表示一羣等圓，故由(v)消去a與b，便得表示此羣等圓之微分方程式；今試求之於次：就x連接二回作(v)之微分式，則得[1]

$$x-a+(y-b)y'=0,$$

$$1+(y')^2+(y-b)y''=0;$$

---

1) $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$，此後除特別指明者以外，y', y'', y''', ……, $y^{(n)}$ 等概用以表示y之第一，二，三乃至n階之導數．

由此二式與(v)容易消去 $x-a$ 與 $y-b$ 而得

$$\{1+(y')^2\}^3=r^2(y'')^2, \tag{vi}$$

此即所求等圓系之微分方程式.

(附註) 在曲線 $y=f(x)$ 上一點(x,y)之曲率半徑爲 $\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}/|y''|$,(vi)係表示在原函數之曲線上各點之曲率半徑恆爲定數 r.

(例三)

$$x=A\cos nt+B\sin nt, \tag{vii}$$

在方程式(vii)中,t 表示時間而視爲自變數,x 爲動點之坐標而視爲因變數,n 爲定常數,A 與 B 爲未定常數. 今試由(vii)消去 A 與 B:先就 t 連接二回作(vii)之微分式,則得[2]

$$\frac{dx}{dt}=-An\sin nt+Bn\cos nt,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-An^2\cos nt-Bn^2\sin nt$$

由最後一式與(vii),得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-n^2x, \tag{viii}$$

此乃表示原函數(vii)所滿足之微分方程式; 或由力學解釋之,(viii)係表示單位質量之質點之運動方程式,其質點之加速度係指向坐標 x 之原點,而與其自原點之距離成比例.

(例四) 求證凡切於 x 軸上原點之圓俱滿足微分方程式:

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

(解) 凡切於 x 軸上原點之圓之方程式易知爲

$$x^2+(y-c)^2=c^2,$$

或

$$x^2+y^2-2cy=0, \tag{ix}$$

2) 普通力學上往往用 $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$ 等記號,此時固亦有用 $x'=\frac{dx}{dt}$, $x''=\frac{d^2x}{dt^2}$ 等記號.

此中 c 爲任意常數，故由(ix)消去 c，便得題設之微分方程式；今示之於次：就 x 作(ix)之微分式，則得

$$x+(y-c)y'=0,$$

以(ix)中之 c 代入此式而整理之，便得所求證之微分方程式 $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

習　題 I.

1. 試由下列方程式消去 k。

 (i) $y^2=4k(k+x)$;　　(ii) $(x-\cos k)^2+(y-\sin k)^2=1$。

2. 試由下列方程式消去 A 與 B

 (i) $y=Ax^2+Bx$;　　(ii) $y=(A+Bx)e^{kx}$。

3. 設 $x=e^{-\frac{1}{2}kt}(A\cos nt+B\sin nt)$，試證

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+\left(n^2+\frac{1}{4}k^2\right)x=0.$$

4. 試證

 (i) 當 $\varphi=\dfrac{Ae^{kr}+Be^{-kr}}{r}$ 時，$\dfrac{d^2\varphi}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{d\varphi}{dr}-k^2\varphi=0$,

 (ii) 當 $\varphi=\dfrac{A\cos kr+B\sin kr}{r}$ 時，$\dfrac{d^2\varphi}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{d\varphi}{dr}+k^2\varphi=0$。

5. 設 $y=(A+Bx)\cos kx+(C+Dx)\sin kx$，試證

$$\frac{d^4y}{dx^4}+2k^2\frac{d^2y}{dx^2}+k^4y=0.$$

6. 設 $y=A\left(\sin x+\dfrac{\cos x}{x}\right)+B\left(\cos x-\dfrac{\sin x}{x}\right)$，試證

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=(2-x^2)y.$$

7. 設 $y=\left(A\cosh\dfrac{kx}{\sqrt{2}}+B\sinh\dfrac{kx}{\sqrt{2}}\right)\cos\dfrac{kx}{\sqrt{2}}+\left(C\cosh\dfrac{kx}{\sqrt{2}}\right.$

$$\left.+D\sinh\frac{kx}{\sqrt{2}}\right)\sin\frac{kx}{\sqrt{2}},$$

試證
$$\frac{d^4y}{dx^4}+k^4y=0.$$

8. 試證凡切於 y 軸上原點而其中心在 x 軸上之錐線俱滿足下列微分方程式
$$x^2y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2=0.$$

9. 試證凡通過原點且其漸近線平行於坐標軸之雙曲線俱滿足下列微分方程式
$$xy\frac{d^2y}{dx^2}-2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2y\frac{dy}{dx}=0.$$

10. 設有一羣拋物線，其主軸俱平行於 y 軸，試求其所滿足之微分方程式。

1·3 常微分方程式之通解與特解及奇解

凡求滿足微分方程式之未知函數即因變數，稱此運算曰**解微分方程式**；而當所求得之函數為可微分時，稱之為該**微分方程式之解**或**積分**；有時由微分方程式所導出之自變數與因變數間之關係，其中不含導數，亦稱為其解或積分。 解或積分所表示之幾何圖形，稱曰**積分曲線**。

例如前節中所示，其 (1) 式滿足一階微分方程式(2)；(3) 式滿足二階微分方程式(4)；(5) 式滿足 n 階微分方程式(6)；換言之，(1) 為 (2) 之解，其中含有一個不定常數；(3) 為 (4) 之解，其中含有二個不定常數；(5) 為 (6) 之解，其中含有 n 個不定常數；由是可察知，常微分方程式之最普遍之解乃含有與其階數相同個數之不定常數，惟嚴密證明此結果係超越本書範圍，茲從略；但若假定 n 階常微分方程式之解得以收斂之昇冪級數表示之，則不難說明其中含有 n 個不定常數。 今先就一階微分方程式：
$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$
檢討上述結果，令其解寫為
$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_kx^k+\cdots\cdots,$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.er