湍流边界层理论

许维德著

哈尔滨船舶工程学院出版社

序　　言

边界层理论有重大的工程实用价值，现已广泛应用于航海、航空、航天、气象、水利、化工、传热、机械等领域。对于船舶工程专业来说，它不仅是研究船舶粘性阻力和伴流的重要环节，而且随着现代科学的发展，许多理想流体的流动计算也都要包括粘性干扰，例如绕船体的势流、水翼的升力、船的兴波等等。由于边界层理论的应用范围不断扩大，其重要性就更突出了。

伴随着电子计算机的广泛应用，1970年以来边界层理论发展异常迅猛。本书的目的是尽力反映这方面的最新成就，并阐明其来龙去脉。希望本书不仅能使读者开阔知识视野，活跃学术思想，而且能够对于科研工作和教学工作有实质上的帮助。

现代湍流边界层理论应该包括三大部分：边界层方程，湍流理论和数值计算方法。

在古典的“薄”边界层理论中，假设边界层厚度δ与物体表面曲率半径R之比为$\delta/R\approx0$，根据这种假设可将N—S方程简化为抛物型的Prandtl方程。但在物体尾部大约25%范围内，边界层的厚度增长很快。在这种情况下，上述古典理论已不再适用，需要考虑高阶效应，例如边界层内部法向压力的变化、物体曲率的影响等。因此，近年来又发展了“厚”边界层理论和“部分抛物型”边界层理论。同时由于物体形状的关系，采用直角坐标系不很方便，所以在计算某些形状物体的边界层时，往往采用圆柱坐标系、任意正交曲线坐标系或非正交曲线坐标系。但是不管这些新的边界层方程多么复杂，它们都是从N—S方程简化得来的。所以本书将根据张量和并矢的概念，导出一般曲线坐标系的N—S方程（第一章）。然后根据不同的边界层假设，对N—S方程简化，从而得到薄边界层、厚边界层和部分抛物型边界层等各种基本偏微分方程组（第四章）。

由于湍流边界层的微分方程组是不封闭的，因此要引进有关雷诺剪应力的补充方程使其封闭，为此提出了描述或模拟湍流物理量转移过程的“湍流模式”。湍流模式有许多种，现在常用的有三种：（a）零方程模式，采用Prandtl混合长度理论；（b）一方程模式，引进了一个决定湍流能量K的微分方程；（c）二方程模式，又增加了一个决定湍流耗散ε的微分方程，所以这种湍流模式称为K-ε二方程模式。由于湍流模式与湍流统计理论的一些基本概念有关，所以本书将介绍湍流统计理论（第二章），然后以此为基础讨论这些湍流模式，并导出关于K和ε的微分方程（第三章）。

计算边界层的方法可以归纳为两大类。一类为近似方法，采用动量积分方程，或能量积分方程，也称积分法。另一类为精确方法，从基本偏微分方程直接求解，也称微分法。在过去，采用微分法是颇困难而复杂的。从七十年代开始，随着电子计算机的使用，对边界层基本偏微分方程组的求解采用有限差分的数值计算方法起到了很大的推动作用。因此现在采用微分法来计算边界层，无论对于层流或是湍流都容易得多，有限差分的微分法也就成为目前比较流行的方法了。本书将介绍有限差分的基本概念（第五章），然后根据前面导出的边界层方程，采用相应的湍流模式，说明平板、轴对称和船体边界层的有限差分计算方法（第六章）。

有关边界层理论的材料浩如烟海，仅就自己科研和教学工作接触所得，写成此书，难免挂一漏万。此外，由于作者水平有限，可能存在这样或那样的缺点和错误，请读者批评指正。

作　者　　1983.2.21

内 容 简 介

由于电子计算机的出现，近年来湍流边界层理论迅猛发展。本书的目的是尽力反映这方面的新成就，并阐明其来龙去脉。因此，其内容之一是导出任意正交与非正交曲线坐标系的N—S方程，然后按不同的假设，简化为各种形式的新型边界层方程。内容之二是介绍湍流统计理论，然后以此为基础来讨论零方程、一方程和二方程等湍流模式。最后一部分内容是叙述有限差分的概念，然后结合前两部分内容，说明对平板、轴对称和船体等边界层进行数值计算的方法。

本书适用于船舶工程专业大学本科高年级学生、研究生和科研人员。对于航空、航天、气象、水利、化工、传热等专业的研究生和科研人员也有较大的参考价值。

湍 流 边 界 层 理 论

许维德 著

*

哈尔滨船舶工程学院出版社出版
北 京 市 新 华 书 店 发 行
哈尔滨船舶工程学院印刷厂印刷

*

787×1092　1/16　印张10.25　256千字
1986年12月第一版　1986年12月第一次印刷
印数：1—4,000册
书号：15413·001　定价：1.80元

目　　录

序　　言

第一章　粘性流体基本方程

§1—1　坐标变换的概念……（1）
§1—2　不变量　矢量　张量……（3）
§1—3　形变速度张量和应力张量……（5）
§1—4　并矢的概念……（7）
§1—5　曲线坐标系……（11）
§1—6　粘性流体运动微分方程……（15）
§1—7　纳维-斯托克斯方程(正交曲线坐标系）……（18）
§1—8　纳维-斯托克斯方程(一般曲线坐标系）……（26）
§1—9　涡量转移方程……（31）
§1—10　流函数方程……（33）
参考文献……（36）

第二章　湍流统计理论基础

§2—1　引言……（37）
§2—2　速度相关函数（二次矩）……（38）
§2—3　压力相关函数……（42）
§2—4　速度相关函数（三次矩）……（43）
§2—5　速度相关函数的传播方程……（45）
§2—6　传播方程的自模拟解……（51）
§2—7　局部均匀各向同性湍流……（55）
§2—8　湍流的频谱分析……（61）
§2—9　频谱函数的传播方程及其解……（66）
参考文献……（69）

第三章　湍流的模式

§3—1　引言……（70）
§3—2　雷诺湍流方程……（70）
§3—3　能量耗散定理……（73）
§3—4　雷诺剪应力转移方程……（76）
§3—5　混合长度理论（零方程模式）……（78）
§3—6　湍流的一方程模式……（82）
§3—7　湍流的二方程模式……（88）
§3—8　湍流的多方程模式……（90）
参考文献……（94）

第四章　边界层基本方程

§4—1　引言……（96）
§4—2　二元薄边界层理论（Prandtl 方程）……（96）
§4—3　轴对称薄边界层方程及其变换……（100）
§4—4　三元薄边界层理论……（104）
§4—5　厚边界层理论……（107）
§4—6　部份抛物型边界层理论……（110）
§4—7　动量方程的积分（Head 方法）……（111）
参考文献……（113）

第五章　有限差分法的概念

§5—1　引言……（115）
§5—2　差商的概念……（116）
§5—3　截断误差……（120）
§5—4　多点一侧差商……（120）
§5—5　多点中心差商和半侧差商……（122）
§5—6　变步长差商……（125）
§5—7　偏微分方程的差分格式……（127）
§5—8　差分格式的稳定条件……（131）
参考文献……（133）

第六章　边界层的有限差分计算

§6—1　引言……（134）
§6—2　坐标变换……（134）
§6—3　边界层微分方程的变换……（137）
§6—4　差分格式及线性方程组……（138）
§6—5　层流边界层的有限差分计算……（140）
§6—6　平板湍流边界层的计算……（142）
§6—7　轴对称湍流边界层的计算（CS 方法）……（144）
§6—8　船体边界层的计算（CS 方法）……（146）
§6—9　船体边界层的计算（Spalding 方法）……（150）
参考文献……（156）

Turbulent Boundary Layer Theory

by

Xu Wei—De

Contents

page

Preface

Chapter 1 Fundamental Equations of Viscous Fluid

§1—1 Concepts on transformation of coordinate systems ………………(1)
§1—2 Invariant. Vector. Tensor. ………………………………………………(3)
§1—3 Deformation tensor and stress tensor ………………………………(5)
§1—4 Concepts of dyad……………………………………………………………(7)
§1—5 Curvilinear coordinates……………………………………………………(11)
§1—6 The equation of motion of a viscous fluid …………………………(15)
§1—7 Navier-Stokes equations in orthogonal curvilinear coordinates ……………………………………………………………………………(18)
§1—8 Navier-Stokes equations in non-orthogonal curvilinear coordinates……………………………………………………………………(26)
§1—9 The vorticity transport equation ………………………………………(31)
§1—10 The stream function equation…………………………………………(33)

Chapter 2 Basic Statistical Theory of Turbulence

§2—1 Introduction ……………………………………………………………(37)
§2—2 Double velocity correlations …………………………………………(38)
§2—3 Double correlations between velocity and pressure ………………(42)
§2—4 Triple velocity correlations……………………………………………(43)
§2—5 Propagation equation of the velocity correlation functions ……(45)
§2—6 Self-preserving solutions of propagation equation………………(51)
§2—7 Locally isotropic turbulence ……………………………………………(55)
§2—8 Spectrum analysis of turbulence ………………………………………(61)
§2—9 Propagation equation of the spectrum and its solutions…………(66)

Chapter 3 Models of Turbulence

§3—1 Introduction ……………………………………………………………(70)
§3—2 Reynolds equations of motion for turbulent flow …………………(70)

§3—3 Theorem of energy dissipation ……………………………………………(73)
§3—4 Transport equations of Reynolds stresses ………………………………(76)
§3—5 Mixing length theory (zero-equation model) ……………………………(78)
§3—6 One-equation model of turbulence ………………………………………(82)
§3—7 Two-equation model of turbulence ………………………………………(88)
§3—8 Multi-equation model of turbulence………………………………………(90)

Chapter 4 Fundamental Equations of Boundary Layer

§4—1 Introduction ……………………………………………………………………(96)
§4—2 Two-dimensional thin boundary layer equations (Prandtl's boundary layer equations) ………………………………………………(96)
§4—3 Axially symmetrical thin boundary layer equations and Mangler's transformation………………………………………………………(100)
§4—4 Three-dimensional thin boundary layer equations ……………………(104)
§4—5 Thick boundary layer equations…………………………………………(107)
§4—6 Partially-parabolic boundary layer equations …………………………(111)
§4—7 Integration of the momentum equation (Head's method) ………(113)

Chapter 5 The Concepts of Finite-Defference Method

§5—1 Introduction ……………………………………………………………………(115)
§5—2 Finite-difference quotients ……………………………………………(116)
§5—3 The truncation errors……………………………………………………(120)
§5—4 Multi-point one-side-differences ………………………………………(120)
§5—5 Multi-point central-differences and semi-one-side-differences ……………………………………………………………………………………(122)
§5—6 Finite-differences of variable step sizes ……………………………(125)
§5—7 The various schemes for solving partial differential equations ……………………………………………………………………………………(127)
§5—8 The stability conditions of various schemes…………………………(131)

Chapter 6 Finite-Difference Methods of Solution of Boundary Layer Equations

§6—1 Introduction ……………………………………………………………………(134)
§6—2 Transformation of coordinates …………………………………………(134)
§6—3 Transformation of boundary layer equations…………………………(137)
§6—4 Finite-difference patterns and linear algebraic equations…………(138)
§6—5 Finite-difference methods of laminar boundary layer solutions ……………………………………………………………………………………(140)
§6—6 Finite-difference methods of flat plate turbulent boundary layer solutions ……………………………………………………………(142)

§6—7 Finite-difference methods of axially symmetrical turbulent boundary layer solutions (CS method) ……(144)
§6—8 Finite-difference methods of ship turbulent boundary layer solutions (CS method) ……(146)
§6—9 Finite-difference methods of ship turbulent boundary layer solutions (Spalding's method) ……(150)

第一章　粘性流体基本方程

§1—1　坐标变换的概念[1—1]

流体力学的问题是场论问题，在充满流体的空间中，流体的物理量由空间点的位置（x，y，z）所决定。当采用的坐标系不同时，空间点位置的表示形式就有所不同，并将改变各个物理量的表示形式。下面将讨论这些表示形式的变化情况。为了书写简便还将引入“轮换标”和“迭加标（哑标）”的概念。

设原来坐标系为（x_1，x_2，x_3），变换后的新坐标系为(y_1，y_2，y_3)。在旧坐标系中矢径$\vec{r}$可表示为

$$\vec{r}=x_1\vec{i}_1+x_2\vec{i}_2+x_3\vec{i}_3 \tag{1—1}$$

其中$\vec{i}_1$，$\vec{i}_2$和$\vec{i}_3$为沿旧坐标轴的单位矢量。当变换为新坐标系后$\vec{r}$则表示为

$$\vec{r}=y_1\vec{j}_1+y_2\vec{j}_2+y_3\vec{j}_3 \tag{1—2}$$

其中$\vec{j}_1$，$\vec{j}_2$和$\vec{j}_3$为沿新坐标轴的单位矢量。

现在来讨论坐标系变换前后，x_1，x_2和x_3与y_1、y_2和y_3的关系及其表示形式。

根据投影定理可知，矢量的投影为其分量投影之和。因此（参看图1—1）

$$\left\{\begin{array}{l}x_1=y_1\cos(x_1,\ y_1)+y_2\cos(x_1,\ y_2)+y_3\cos(x_1,\ y_3)\\ x_2=y_1\cos(x_2,\ y_1)+y_2\cos(x_2,\ y_2)+y_3\cos(x_2,\ y_3)\\ x_3=y_1\cos(x_3,\ y_1)+y_2\cos(x_3,\ y_2)+y_3\cos(x_3,\ y_3)\end{array}\right. \tag{1—3}$$

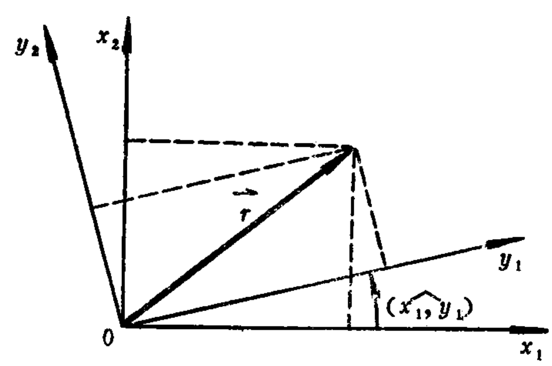

图1—1　坐标变换

引入如下符号：

$$e_{ij}\equiv\cos(x_i,\ y_j) \tag{1—4}$$

其中i，$j=1$，2，3。这样，式（1—3）可以写成

$$\left\{\begin{array}{l}x_1=y_1e_{11}+y_2e_{12}+y_3e_{13}\\ x_2=y_1e_{21}+y_2e_{22}+y_3e_{23}\\ x_3=y_1e_{31}+y_2e_{32}+y_3e_{33}\end{array}\right. \tag{1—5}$$

为了将上式写得简单些，现在我们引入轮换标和迭加标的符号。考虑将上式中的三个公式写成如下一个公式：

$$x_i = y_1 e_{i1} + y_2 e_{i2} + y_3 e_{i3} \qquad (1-6)$$

其中 i 称为轮换标或自由指标，它在各项中只出现一次，而应轮换为 $i=1$、2、3。可以用其他字母来表示，例如 j、k、l、α、β 等等，但所有各项中均应用同一字母来表示。

还可以引用迭加标的符号使上式写得更简单些。上式可表示为

$$x_i = y_j e_{ij} \qquad (1-7)$$

其中 j 称为迭加标或哑标，它在各项中重复出现两次。比较以上两式可知，应轮换为 $j=1$、2、3，然后进行迭加，即为三项之和。同样，j 可用其他字母来代替，例如 i、k、r、t、α、β 等等，只是应该使它在同一项中重复出现两次。

式(1—7)就是当坐标系变换时，用轮换标和迭加标来表示的坐标的变换关系式。

为了以后的需要，我们引入"克罗内克符号"(Kronecker Delta)。为此现在来讨论当坐标系变换时，矢径 $\vec{r}$ 的长度表示式的变化。

当坐标系变换时，矢径的长度应保持不变。对于旧坐标系(x_1, x_2, x_3)，可表示为

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \qquad (1-8)$$

而对于新坐标系(y_1, y_2, y_3)，则表示为

$$r^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \qquad (1-9)$$

由于这一长度应保持不变，因此

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \qquad (1-10)$$

将式(1—7)，即式(1—5)，代入上式左边，然后加以展开。左右两边同一变量的系数应相等，因此得到

$$\left\{\begin{aligned} e_{11}e_{11} + e_{21}e_{21} + e_{31}e_{31} &= 1 \\ e_{12}e_{12} + e_{22}e_{22} + e_{32}e_{32} &= 1 \\ e_{13}e_{13} + e_{23}e_{23} + e_{33}e_{33} &= 1 \\ e_{11}e_{12} + e_{21}e_{22} + e_{31}e_{32} &= 0 \\ e_{12}e_{13} + e_{22}e_{23} + e_{32}e_{33} &= 0 \\ e_{13}e_{11} + e_{23}e_{21} + e_{33}e_{31} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad (1-11)$$

当采用迭加标来表示时，上式中的前三式可表示为

$$e_{i1}e_{i1} = e_{i2}e_{i2} = e_{i3}e_{i3} = 1 \qquad (1-12)$$

后三式则可表示为

$$e_{i1}e_{i2} = e_{i2}e_{i3} = e_{i3}e_{i1} = 0 \qquad (1-13)$$

克罗内克符号由下式所定义：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & 当 i = j, \\ 0, & 当 i \neq j。 \end{cases} \qquad (1-14)$$

这样式(1—12)和式(1—13)可以统一地表示为

$$e_{ik}e_{il} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & 当 k = l, \\ 0, & 当 k \neq l。 \end{cases} \qquad (1-15)$$

即

$$e_{1k}e_{1l}+e_{2k}e_{2l}+e_{3k}e_{3l}=\delta_{kl} \tag{1—16}$$

§1—2 不变量 矢量 张量[1—2][1—3]

从上节的论述可知，当变换坐标系时，矢径本身虽然不改变，但它的投影不同了，也就是它的分量的表示式会有所改变。现在来讨论当变换坐标系时，各个物理量表示形式的改变，及其变换关系式。根据它们变换关系的不同而分别定义为：不变量（零阶张量），矢量（一阶张量）和张量（二阶以上张量）。

当坐标系从旧坐标系(x_1, x_2, x_3)变换为新坐标系(y_1, y_2, y_3)后，对于流体中一些属于标量的物理量，例如密度ρ、压力p等，以及空间距离r^2等，其数值不应由于坐标系的改变而改变。即

$$\begin{cases}\rho(x_1, x_2, x_3)=\rho(y_1, y_2, y_3)\\ p(x_1, x_2, x_3)=p(y_1, y_2, y_3)\\ r^2(x_1, x_2, x_3)=r^2(y_1, y_2, y_3)\end{cases} \tag{1—17}$$

式(1—10)为上式最后一式的具体表示形式。这种不受坐标变换影响的几何量或物理量称为不变量或零阶张量。

当坐标系从(x_1, x_2, x_3)变换为(y_1, y_2, y_3)时，对于一些矢量，例如矢径$\vec{r}$、流体的速度$\vec{v}$等将起某种变化。这些量可以通过坐标轴上的三个投影来表示，在坐标变换时，这些量本身的大小和方向是不改变的，但是它们在新坐标轴上的投影却发生了变化。例如式(1—7)所表示的坐标的变换关系便是其中一个例子，这时矢径$\vec{r}$是不变的，而其投影将从x_1、x_2和x_3分别变换为y_1、y_2和y_3。

还可以将变换关系式(1—7)改写为另一种形式。根据微分法则，从式(1—6)可以得到

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_1}=e_{i1}\ ,\ \frac{\partial x_i}{\partial y_2}=e_{i2} \text{ 和 } \frac{\partial x_i}{\partial y_3}=e_{i3}$$

也就是

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j}=e_{ij} \tag{1—18}$$

这样将式(1—18)代入式(1—7)便得到

$$x_i=\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\cdot y_j \tag{1—19}$$

在上式中i为轮换标，而j则为迭加标。

同样，在坐标变换时，变量x_i可表示为

$$x_i=x_i(y_1, y_2, y_3) \tag{1—20}$$

而其反变换为

$$y_j=y_j(x_1, x_2, x_3) \tag{1—21}$$

根据多变量的全微分法则，x_i的全微分为

$$dx_i=\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\ dy_j \tag{1—22}$$

将上式对 t 微分，可以得到坐标系变换时速度投影的变换关系：

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\frac{dy_j}{dt} \tag{1—23}$$

$$\therefore\quad u_i=\frac{\partial x_i}{\partial y_j}v_j \tag{1—24}$$

其中u_i和v_j分别为旧和新坐标系中的速度投影。

综合(1—19)、(1—22)和(1—24)三式，可见在坐标变换时，这些量的三个投影按一定的规律进行变换。根据这一点，我们来定义一阶张量。

设坐标系从(x_1，x_2，x_3)变换为(y_1，y_2，y_3)，某一量的三个分量A_1、A_2和A_3将变换为B_1、B_2和B_3等三个分量，新旧分量之间具有如下的变换关系（逆变关系）：

$$A_i=\frac{\partial x_i}{\partial y_j}B_j \tag{1—25}$$

或者具有如下的变换关系（协变关系）：

$$A_j=\frac{\partial y_i}{\partial x_i}B_i \tag{1—26}$$

则称之为一阶张量。矢量为一阶张量。

将这一概念加以推广就可以来定义二阶张量。在流体力学中已提及雷诺湍流应力，它是脉动速度两个分量的乘积。现在我们来讨论由两个速度各个分量的乘积所组成的量在坐标变换时的变换关系式。设某一速度的分量在坐标变换时由u_i(x_1, x_2，x_3)变换为p_i(y_1，y_2，y_3)，另一速度的分量则由v_i(x_1，x_2，x_3)变换为q_i(y_1，y_2，y_3)。这两个速度的分量的乘积可以组成九个分量，它们将由u_iv_j(x_1，x_2，x_3)变换为p_iq_j(y_1，y_2，y_3)，在这里i，$j=1$，2，3，为轮换标。根据式(1—24)，这一乘积的变换关系为

$$u_iv_j=\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial x_j}{\partial y_l}p_kq_l \tag{1—27}$$

现将这一变换关系推广来定义二阶张量。

设坐标系从(x_1，x_2，x_3)变换为(y_1，y_2，y_3)，某一量的九个分量A_{ij}将变换为B_{kl}，新旧分量之间具有如下的变换关系（逆变关系）：

$$A_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial x_j}{\partial y_l}B_{kl} \tag{1—28}$$

或者具有如下的变换关系（协变关系）：

$$A_{ij}=\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}B_{kl} \tag{1—29}$$

或者具有如下的变换关系（混变关系）：

$$A_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}B_{kl} \tag{1—30}$$

则这一量称为二阶张量，并可表示为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix} \tag{1—31}$$

将以上概念推广，还可以定义二阶以上的张量。

综合上述可知，这些定义均与坐标变换有关：在坐标变换时保持不变的量定义为零阶张量（不变量）；如果有三个分量，在坐标变换时，这些分量满足式(1—25)或式（1—26），则定义为一阶张量（矢量）；如果有九个分量，在坐标变换时，这些分量满足式(1—28)、式(1—29)或式(1—30)，则定义为二阶张量；类似地，可定义二阶以上的张量。

§1—3 形变速度张量和应力张量[1—4][1—5]

在流体力学中已经讨论过流体微团的变形问题。在流体流动时，由于流体的流动性，流体微团的运动除了平移和旋转以外，还有变形。变形速度有两种：线形变速度和剪形变角速度[1—4]。

线形变速度是直线距离单位长度的伸长速度。沿坐标轴的线形变速度可表示为

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{cases} \tag{1—32}$$

剪形变角速度是流体微团中某一直角的角度减小速度的一半，可表示为

$$\begin{cases} \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) \\ \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \end{cases} \tag{1—33}$$

现在我们来证明这九个分量组成一个二阶张量

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{1—34}$$

即在坐标变换时，满足(1—28)～(1—30)等三式中任意一式。这一张量称为形变速度张量。

在流体内部相邻两点间取一微段δS，根据式(1—17)第三式，δS^2应为不变量。它相对于时间t的变化率为

$$\delta S^2 = \delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 = \delta x_i \delta x_i$$

$$\frac{d}{dt}(\delta S^2) = 2\delta x_i \frac{d}{dt}(\delta x_i) \tag{a}$$

我们可以交换微分符号d及δ，即在上式中

$$\frac{d}{dt}(\delta x_i) = \frac{d}{dt}(x_{i2} - x_{i1})$$

$$= \frac{dx_{i2}}{dt} - \frac{dx_{i1}}{dt}$$

$$= v_{i2} - v_{i1} = \delta v_i$$

因此
$$\frac{d}{dt}(\delta x_i) = \delta\left(\frac{dx_i}{dt}\right) = \delta v_i \tag{b}$$

同时根据全微分法则：

$$v_i = v_i(x_1, \ x_2, \ x_3)$$

$$\delta v_i = \frac{\delta v_i}{\delta x_j}\delta x_j$$

将上式及式(b)代入式(a)，可得

$$\frac{d}{dt}(\delta S^2) = 2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta x_i \delta x_j \tag{1—35}$$

在上式中下标 i 及 j 为迭加标，将右边所有各项写出，并按照式(1—32)和式(1—33)所示，合并有关项后可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\delta S^2) = \varepsilon_{ij}\delta x_i \delta x_j \tag{1—36}$$

现在来讨论在坐标变换时所引起的变化。由于微段的平方δS^2为标量，即不变量。在从坐标系(x_1，x_2，x_3)变换为坐标系(y_1，y_2，y_3)时，应保持不变[参看式(1—17)第三式]。对照上式，对于坐标系(y_1，y_2，y_3)应具有如下关系式：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\delta S^2) = \varepsilon'_{kl}\delta y_k \delta y_l \tag{1—37}$$

因而

$$\varepsilon_{ij}\delta x_i \delta x_j = \varepsilon'_{kl}\delta y_k \delta y_l$$

将式(1—22)代入上式：

$$\varepsilon_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial x_j}{\partial y_l}\delta y_k \delta y_l = \varepsilon'_{kl}\delta y_k \delta y_l$$

将上式中的迭加标全部展开，使同一变量的系数相同，然后归纳整理，最后可以得到

$$\varepsilon'_{kl} = \frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial x_j}{\partial y_l}\varepsilon_{ij} \tag{1—38}$$

ε_{ij}和ε'_{kl}分别为坐标变换前后的形变速度分量，它们之间的变换关系与式(1—29)一致，所以这九个形变速度分量组成一个二阶张量。由于$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$，所以这是一个对称张量[参看式(1—33)]。

现在来讨论应力张量。

将牛顿内摩擦定律推广，可以得到将流体的变形速度和表面应力联系起来的六个补充方程，称为广义的牛顿内摩擦定律。关于法向应力的三个补充方程为[1—4]

$$\begin{cases} p_{11} = -p - \dfrac{2}{3}\mu\, div\, \vec{v} + 2\mu\varepsilon_{11} \\ p_{22} = -p - \dfrac{2}{3}\mu\, div\, \vec{v} + 2\mu\varepsilon_{22} \\ p_{33} = -p - \dfrac{2}{3}\mu\, div\, \vec{v} + 2\mu\varepsilon_{33} \end{cases} \tag{1—39}$$

这些方程将粘性流体中的法向应力和线形变速度联系起来。对于不可压缩流体，因 $div\vec{v}=0$，则上式简化为

$$\begin{cases} p_{11}=-p+2\mu\varepsilon_{11} \\ p_{22}=-p+2\mu\varepsilon_{22} \\ p_{33}=-p+2\mu\varepsilon_{33} \end{cases} \tag{1—40}$$

关于剪应力的补充方程为

$$\begin{cases} p_{12}=2\mu\varepsilon_{12} \\ p_{23}=2\mu\varepsilon_{23} \\ p_{31}=2\mu\varepsilon_{31} \end{cases} \tag{1—41}$$

由于剪应力互等，所以还应有

$$p_{12}=p_{21},\ p_{23}=p_{32} \quad 及 \quad p_{31}=p_{13} \tag{c}$$

在前面还提及 $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$。这些是剪应力和剪形变角速度的关系。

这样，应力的九个分量与形变速度的九个分量之间的关系可以表示为

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}=-p\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+2\mu\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{1—42}$$

或者可以表示为

$$p_{ij}=-p\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij} \tag{1—43}$$

可见应力的九个分量也组成一个二阶张量，称为应力张量。

还可以用剪应力张量来表示：

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}=-p\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \tag{1—44}$$

或者

$$p_{ij}=-p\delta_{ij}+\tau_{ij} \tag{1—45}$$

即

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=-p\tilde{\boldsymbol{\delta}}+2\mu\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{1—46}$$

或

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=-p\tilde{\boldsymbol{\delta}}+\tilde{\boldsymbol{\tau}} \tag{1—47}$$

其中带上标～的黑体字表示二阶张量。

§1—4 并矢的概念[1—6][1—7]

并矢（Dyad）的引入是为了便于表示和处理张量，例如上节所提出的形变速度张量和应力张量。

矢量可以用它的三个投影来表示，例如矢径 $\vec{r}$ 可表示为

$$\vec{r}=\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z \tag{1—48}$$

其中 $\vec{i}$，$\vec{j}$ 和 $\vec{k}$ 为沿坐标轴的单位矢量。仿照上式，二阶张量可以用三个矢量（共有九个投影）表示如下：

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\vec{i},\vec{a}+\vec{j},\vec{b}+\vec{k},\vec{c} \tag{1—49}$$

在上式中各对矢量既非“点乘”，也非“叉乘”，而仅仅是“放”在一起的形式，称为“并矢”。这一概念是 Gibbs 于1881年所提出的。

定义 并矢为两个矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$“并放”，表示为（$\vec{a}$，$\vec{b}$），而具有如下性质：

（1） $(\vec{a},\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$； （1—50）

（2） $\vec{c}\cdot(\vec{a},\vec{b})=(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$。 （1—51）

应该注意，一般来说，“并放”的次序是不可交换的，例如（$\vec{a}$，$\vec{b}$）$\neq$（$\vec{b}$，$\vec{a}$），除非$\vec{a}=\vec{b}$。另外它与某一矢量“点乘”时，其次序也是不可交换的。例如式（1—50）表示点乘的结果为与$\vec{a}$平行的矢量，而当变换点乘的次序后，式（1—51）表示其结果为与$\vec{b}$平行的矢量。

并矢可以如式（1—49）所示展开为某些项之和，也可以用矩阵的形式来表示。在前一种情况下可表示为

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{A}}&=(\vec{a},\vec{b})\\
&=(\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z,\ \vec{i}b_x+\vec{j}b_y+\vec{k}b_z)\\
\therefore\quad \widetilde{\boldsymbol{A}}&=(\vec{i},\vec{i})a_xb_x+(\vec{i},\vec{j})a_xb_y+(\vec{i},\vec{k})a_xb_z\\
&+(\vec{j},\vec{i})a_yb_x+(\vec{j},\vec{j})a_yb_y+(\vec{j},\vec{k})a_yb_z\\
&+(\vec{k},\vec{i})a_zb_x+(\vec{k},\vec{j})a_zb_y+(\vec{k},\vec{k})a_zb_z
\end{aligned}
\qquad (1—52)
$$

也可用矩阵的形式表示为

$$
\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}
(\vec{i},\vec{i})a_xb_x & (\vec{i},\vec{j})a_xb_y & (\vec{i},\vec{k})a_xb_z\\
(\vec{j},\vec{i})a_yb_x & (\vec{j},\vec{j})a_yb_y & (\vec{j},\vec{k})a_yb_z\\
(\vec{k},\vec{i})a_zb_x & (\vec{k},\vec{j})a_zb_y & (\vec{k},\vec{k})a_zb_z
\end{pmatrix}
\qquad (1—53)
$$

现在来定义共轭并矢。将并矢并放的次序交换可以得到另一并矢，后一并矢称为前一并矢的共轭并矢，我们用下标C来表示，即

$$(\vec{a},\vec{b})_C=(\vec{b},\vec{a}) \qquad (1—54)$$

这时

$$
\begin{aligned}
(\vec{a},\vec{b})_C&=(\vec{i}b_x+\vec{j}b_y+\vec{k}b_z,\ \vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z)\\
&=\begin{pmatrix}
(\vec{i},\vec{i})a_xb_x & (\vec{i},\vec{j})a_yb_x & (\vec{i},\vec{k})a_zb_x\\
(\vec{j},\vec{i})a_xb_y & (\vec{j},\vec{j})a_yb_y & (\vec{j},\vec{k})a_zb_y\\
(\vec{k},\vec{i})a_xb_z & (\vec{k},\vec{j})a_yb_z & (\vec{k},\vec{k})a_zb_z
\end{pmatrix}
\end{aligned}
\qquad (1—55)
$$

比较式（1—53）和式（1—55），可见共轭的关系为交换对称位置的项，例如a_xb_y与a_yb_x的位置交换等等。

现在来讨论并矢的点乘的结果。单位矢量的点乘（数量积）为

$$
\begin{cases}
\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0\\
\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1
\end{cases}
\qquad (1—56)
$$

根据上式及式(1—51)，可以得到如下的结果：

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\vec{i}\cdot\begin{pmatrix}(\vec{i},\vec{i}) & (\vec{i},\vec{j}) & (\vec{i},\vec{k})\\ (\vec{j},\vec{i}) & (\vec{j},\vec{j}) & (\vec{j},\vec{k})\\ (\vec{k},\vec{i}) & (\vec{k},\vec{j}) & (\vec{k},\vec{k})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (1—57a)\\
&\vec{j}\cdot\begin{pmatrix}(\vec{i},\vec{i}) & (\vec{i},\vec{j}) & (\vec{i},\vec{k})\\ (\vec{j},\vec{i}) & (\vec{j},\vec{j}) & (\vec{j},\vec{k})\\ (\vec{k},\vec{i}) & (\vec{k},\vec{j}) & (\vec{k},\vec{k})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (1—57b)\\
&\vec{k}\cdot\begin{pmatrix}(\vec{i},\vec{i}) & (\vec{i},\vec{j}) & (\vec{i},\vec{k})\\ (\vec{j},\vec{i}) & (\vec{j},\vec{j}) & (\vec{j},\vec{k})\\ (\vec{k},\vec{i}) & (\vec{k},\vec{j}) & (\vec{k},\vec{k})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{pmatrix} \qquad (1—57c)
\end{aligned}
\right.
$$

以上为单位矢量与并矢点乘的结果，熟悉这些结果对于导出以下所提到的一些关系式是有用的。

设某一微分面积 $d\vec{S}$ 的法线方向n的方向余弦为$\cos\alpha$、$\cos\beta$和$\cos\gamma$，则作用在这一表面上的粘性流体应力由垂直于坐标轴三表面上的应力所决定，根据流体力学可知[1—4]：

$$
\left\{
\begin{aligned}
p_{nx} &= p_{11}\cos\alpha + p_{21}\cos\beta + p_{31}\cos\gamma\\
p_{ny} &= p_{12}\cos\alpha = p_{22}\cos\beta + p_{32}\cos\gamma\\
p_{nz} &= p_{13}\cos\alpha + p_{23}\cos\beta + p_{33}\cos\gamma
\end{aligned}
\right. \qquad (1—58)
$$

现在来求矢量 $d\vec{S}$ 与表面上应力张量$\tilde{\sigma}$的点乘结果：

$$d\vec{S}\cdot\tilde{\sigma} = dS\ (\cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\ \vec{j} + \cos\gamma\ \vec{k})\cdot\tilde{\sigma} \qquad (1—59)$$

而$\tilde{\sigma}$可表示为

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix}(\vec{i},\vec{i})p_{11} & (\vec{i},\vec{j})p_{12} & (\vec{i},\vec{k})p_{13}\\ (\vec{j},\vec{i})p_{21} & (\vec{j},\vec{j})p_{22} & (\vec{j},\vec{k})p_{23}\\ (\vec{k},\vec{i})p_{31} & (\vec{k},\vec{j})p_{32} & (\vec{k},\vec{k})p_{33}\end{pmatrix} \qquad (1—60)$$

这样，根据式(1—57)的结果，从以上两式可得

$$
\begin{aligned}
d\vec{S}\cdot\tilde{\sigma} = dS[&\cos\alpha(p_{11}\vec{i} + p_{12}\vec{j} + p_{13}\vec{k})\\
&+\cos\beta(p_{21}\vec{i} + p_{22}\vec{j} + p_{23}\vec{k})\\
&+\cos\gamma(p_{31}\vec{i} + p_{32}\vec{j} + p_{33}\vec{k})]
\end{aligned}
$$

将式(1—58)代入上式就可以得到

$$d\vec{S}\cdot\tilde{\sigma} = dS\vec{p}_n = d\vec{F} \qquad (1—61)$$

可见微分表面矢量与用并矢表示的应力张量的点乘，将等于作用在这一表面上的粘性微分力矢量。

现在来讨论哈米尔顿（Hamilton）算子对并矢的运算问题。这是一个矢性微分算子：