中学数学题巧解妙法

夏圣亭　编著

上海科学普及出版社

(沪)新登字第305号

责任编辑 顾蕙兰

中学数学题巧解妙法
夏圣亭 编著
上海科学普及出版社出版
(上海曹杨路500号 邮政编码 200063)

新华书店上海发行所发行 上海新贵印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 19.5 字数 433000
1994年6月第1版 1996年1月第3次印刷
印数13600—25600

ISBN 7-5427-0647-0/G·170 定价：16.00元

序

在我国很少见到对数学思维的探索与研究的书籍。夏圣亭同志编著的《中学数学题巧解妙法》对各类数学问题从思维方法上进行了探索，触类旁通，启发学生或教师去解决其他的数学问题，这是很有价值的参考书，值得向青少年、大学生、数学教师、数学工作者推荐。

全书内容非常丰富，包括了数学中许多常用的思考方法，有些方法超过了中学生的知识范围，对大学生、数学教师都还是有用的，可以各取所需，分段学习。许多例子是历史上的著名问题，很有趣味性和启发性。希望能早日与读者见面。

华东师范大学数学系教授

曹锡华

1990年6月15日

前　言

随着科学技术的发展，在所有领域里，再没有比今天更切实地感觉到数学的重要性了，而学习、研究数学的人最感兴趣的莫过于数学的探索与思维方法。古今中外许多数学家正是通过巧妙地运用各种方法，在数学史上写下了一页又一页的创造性篇章。可以说，学生、教师、数学爱好者都渴望得到一把开启数学大门的"钥匙"，本书就是顺应这一愿望而编著的。

本书主要内容是数学的探索和思维方法，包括一些具体的方法。分成发散性思维方法、探索解题途径的方法、数学证明方法、数学求解方法和技巧思维等五大部分，大致如目录和索引所示。每节集中研究一种方法，对于方法的意义、特征、如何运用以及注意点等都有详细的说明，并辅有适当的例题以帮助理解和学习。例题深入浅出，既具有一定的思维深度又饶有趣味，有的例题还兼具欣赏价值，所有这些定将引起读者的好奇心与求知欲。书中绝大部分例题不需要高深的数学知识就能领会，其中有些例题左上角标有"°"号的，即使不具有专门数学知识的读者也能看懂。极少部分（不足二十分之一）为说明数学方法的延伸而设置的例题需要较深的数学知识，这部分例题左上角标有"*"号，读者可以暂时略去而不影响对方法的学习和理解。

阅读本书可以开拓思路，增强学习数学的兴趣和意志，提高逻辑思维和创造性思维的能力，本书特别对于中学生、数学

教师、数学爱好者、数学工作者是十分有用的，对于家庭的智力投资也有重要意义。

全书共三十八节，虽是相辅相成、互相联系，但各节都具有相对的独立性，可以独立运用，因此本书有下列四种用法：

(1) 读者根据自己的学习进度，选择使用；

(2) 按自己的兴趣先浏览全书，然后细读；

(3) 按需查阅有关方法和例题；

(4) 系统学习全书或书中的某一部分。

学习时要认真研读有关解释，仔细揣摩例题，以收举一反三之功。

本书编著历经多年，曾得到华东师范大学数学系曹锡华教授，清华大学数学系盛祥耀教授的关心和支持，特别是上海市复兴中学名誉校长、数学特级教师姚晶审阅了全书，提出了宝贵的意见，并极力推荐本书，特在此向他们致谢！

本书还得到华东师范大学数学系徐春霆老师，上海教育学院数学系艾武老师，上海数学会理事薛福田老师，福建莆田林新华老师，福州郑亚培同志等的关心和支持，特此致谢！

参加本书工作的还有朱根娣、周启泰、卢乃周、全惠英等同志。

本书虽经多方校订，不妥之处在所难免，热诚欢迎读者批评指正。

夏圣亭

1990年6月

目　　录

第一章　发散性思维方法

发散性思维是从某些已知的知识，猜想某一新知识的思维形式，其思维犹如从一点发散开来的树图．历史上许多重要的数学发现来源于发散性思维，下面分别叙述数学上一些属于发散性思维的方法．

一、观　察　法

（一）观察法的意义

观察是认识的开始，是解决问题的基础，可以说科学上的发现大多起源于观察．数学家欧勒（Euler, L.）非常推崇观察，他指出“今天已知许多数的性质，大部分是通过观察发现的……，只有靠观察才能获得这些知识．”

一般通过观察寻找研究对象的特点和规律，同时观察也是进行比较、类比、联想和归纳的基础，通常把经由观察来发现研究对象所具有的特点和规律称为观察法或发现法．

传说著名的科学家牛顿（Newton, I.）就是通过对“苹果落地”这一现象的观察、思考，发现了万有引力；化学家门捷列夫（Менделеев, Д.）通过对各种元素的性质、结构、原子量等的观察发现了元素的周期性，编出了著名的元素周期表；科学巨匠爱因斯坦（Einstein, A.）通过对大量数据的观察分析，发现了相对论．

总之，观察对于科学的发现来说是至关重要的．

（二）常见的几种观察法

常见的观察法，从观察的性质看有特点观察、规律观察；从观察的数量看有抽样观察、系统观察、穷举观察等。

1．特点观察

发现研究对象的特点常能使问题迅速突破，因此观察时注意研究对象有无特殊之处，进而思考如何利用这种特殊性，对于寻求解决途径是至关重要的。

°**例1** 数学家高斯(Gauss, C. F.)在读小学二年级时，有一次，老师出了一道算术题

$$1+2+3+\cdots+99+100=?$$

当其他同学刚刚开始按1加2、加3、……演算时，高斯已得出正确的答案5050，老师非常惊奇，原来高斯仔细观察这道算术题后发现

$$1+100=101,$$
$$2+99=101,$$
$$3+98=101,$$
$$\cdots\cdots$$
$$50+51=101.$$

根据这一特点，高斯把100个加数首尾组合，分成50对，每对数的和都是101，因此

$$101\times50=5050$$

便是这道题的答案。

°**例2** 阿凡提分牛

一个喜欢卖弄聪明的富商死了，遗产是23头牛，留下了一份难于执行的遗嘱，遗嘱规定大儿子得遗产的$\frac{5}{24}$，第二个儿子得$\frac{1}{6}$，第三个儿子得$\frac{1}{4}$，最小的儿子得$\frac{1}{3}$，四个儿子为

如何分牛已经苦想了好几天，就是找不出好办法来．至少要杀死一头牛，而谁得这头牛的头，…又争执不下．最后，他们找到了聪明的阿凡提，请阿凡提帮忙，你能知道阿凡提是如何分牛的吗？

原来阿凡提通过对遗嘱的仔细观察发现$\frac{5}{24}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{4}$与$\frac{1}{3}$的和不等于1。

$$\frac{5}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{23}{24}$$

于是阿凡提牵来了一头牛，加入富商的“遗产”，使遗产增加到24头牛，四个儿子因为遗产增加而皆大欢喜．按遗嘱大儿子分得5头牛，第二个儿子分得4头牛，第三个儿子分得6头牛，最小的儿子分得8头牛，剩下一头牛仍由阿凡提牵走。

°例3　图中最大的正方形边长为1，求阴影部分的面积．

解：本题的阴影部分有三块，如果分别计算各块面积，然后再加起来显然十分麻烦，但经过观察可以发现，图中的三块阴影部分通过移动或反转可以拼成一个直角三角形，面积恰为$\frac{1}{8}$．

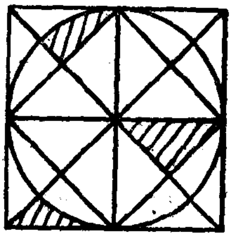

图　1-1

°例4　俄国画家波洛丹诺夫·别列斯基的名画《难题》画的是一群学生正盯着黑板上的口算难题

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$$

抓耳挠腮地观察、思索，要在短时期内用口算算出这一难题的答案必须掌握这道题的特点

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$$

而 $10^2+11^2+12^2$ 易于计算，平方和为 365。

所以此题答案为 2。

例 5　x、y 都是实数，并且 $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}}{x+1}$，求 $\lg(x+y)$ 的值。

解：先观察分子的 $\sqrt{1-x^2}$ 与 $\sqrt{x^2-1}$，前者 $x^2\leqslant1$，后者 $x^2\geqslant1$，因此只能是 $x^2=1$，∴　$x=\pm1$。

再观察分母可知 $x\neq-1$。

所以　　　　　$x=1$。

于是　　　　　$y=0$。

$$\lg(x+y)=\lg1=0.$$

例 6　试在一分钟内算出下题的答案。

半径为 1 的圆内有两条互相垂直的直径，从圆上任意一点作这两条直径的垂线，求连结此两垂线垂足的线段的长度。

解：本题的特点是所求线段为矩形的一条对角线，而另一条对角线恰是圆的半径，根据矩形的两条对角线相等可知所求线段的长度为 1，请读者自行作图研究。

例 7　解方程 $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$。

解：观察两个大根号内的根式恰成共轭，

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=1$$

可见 $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$ 与 $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x$ 互为倒数，因此设

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=y.$$

则原方程成为

$$y+\frac{1}{y}=4.$$

解得

$$y_1=2+\sqrt{3},\quad y_2=2-\sqrt{3}$$

于是

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=2+\sqrt{3}. \qquad ①$$

或

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=2-\sqrt{3}. \qquad ②$$

解①②得 $\qquad x_1=-2,\ x_2=2.$

经验算，-2、2都是原方程的解。

2. 规律观察

观察时注意研究对象的变化是否具有规律性，然后证实这种规律，以便利用这种规律去解决问题。

°例 8 丹麦天文学家布拉赫(Brahe, T.)耗费了毕生的精力，在大量观察的基础上积累了关于六大行星绕太阳公转的周期P和行星轨道的半长径a的精确资料，见下表：

行星	水星	金星	地球	火星	木星	土星
a	0.387	0.723	1	1.524	5.203	9.539
P	0.241	0.615	1	1.881	11.862	29.458

表中a取天文单位，即地球到太阳的平均距离为计量单位；P用年作为计量单位。天文学家开普勒(Kepler, J.)根据对这些资料的反复观察研究，十六年后即在1619年终于发现了著名的行星运动第三定律：

$$a^3=P^2.$$

由此足见开普勒的观察能力是何等敏锐。这个规律的发现，使开普勒荣获了"天空立法者"的美称。

例 9 定义数列$\{a_n\}$如下

$$a_1=1,$$
$$a_2=2+3,$$
$$a_3=4+5+6,$$

$$a_4=7+8+9+10,$$

……

求此数列的通项 a_n。

解：观察 a_1、a_2、a_3、a_4 可以得到下面两个规律：

(1) 由 a_1 为 1 个自然数；

a_2 为 2 个连续自然数之和；

a_3 为 3 个连续自然数之和；

a_4 为 4 个连续自然数之和；

……

得 a_n 为 n 个连续自然数之和。

(2) 把 a_1、a_2、a_3、$a_4\cdots a_n$ 加起来，即为连续自然数相加，其和 $S_n=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+\cdots+m$。

其中 m 是 a_n 的最后一个自然数加数。

于是 a_n 可以通过 S_n-S_{n-1} 求出，关键在于确定 m。

由上述规律(1)可知 S_n 的项数共有

$$1+2+3+4+\cdots+n,$$

即 $\dfrac{n(1+n)}{2}$ 项。

因此，按上述规律(2)可知，m 是第 $\dfrac{n(1+n)}{2}$ 个自然数，

所以
$$m=\frac{n(1+n)}{2}$$

于是
$$S_n=1+2+3+\cdots+\frac{n(1+n)}{2}$$

$$=\frac{n(1+n)}{2}\cdot\frac{\left[1+\dfrac{n(1+n)}{2}\right]}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}.$$

$$\therefore \quad a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8} - \frac{(n-1)n(n^2-n+2)}{8}$$
$$= \frac{n}{2}(n^2+1).$$

说明：本题的另一种解法是设

$$a_n = k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (k+n-1).$$

按上述规律(1)(2)可求出

$$k = [1+2+3+\cdots+(n-1)]+1.$$

于是 a_n 可求。

例 10 三角堆垛

将圆弹排成正三角形(见图 1-2 上面一行)，然后一层层累叠上去(见图 1-2 下面一行)，若底层三角形每边的圆弹数为 n，每向上一层每边的圆弹数就减少一个，垛顶为一个圆弹。

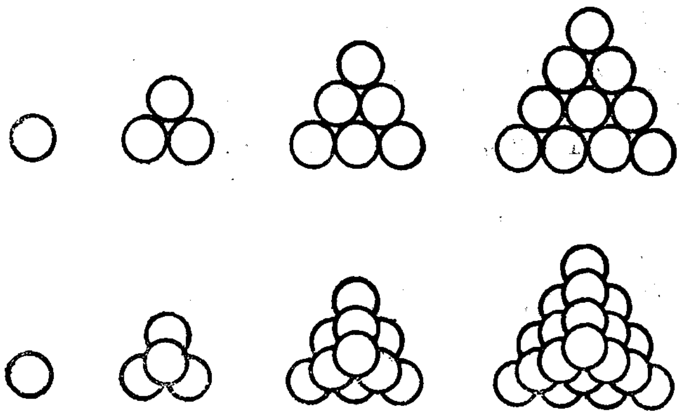

图 1-2

求这样堆成的三角堆垛的圆弹总数 S_n。

(1) 先看底层的圆弹数 a_n。

由于圆弹排成正三角形，从正三角形顶点到底边一排一排观察，发现每排总比前排多一个圆弹，因此

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(1+n)}{2}.$$

(2) 再从底层向上，一层一层观察，发现正三角形边上的圆弹逐层减少一个，因此从顶层起，每层圆弹数为：

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 1 + 2,$$
$$a_3 = 1 + 2 + 3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n = \frac{n(1+n)}{2}.$$

$$\therefore \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(1+k)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right).$$

根据公式(见递推法一节)：

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(1+n)}{2},$$

得 $$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(1+n)}{2}\right]$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

例 11 把自然数按顺序像发条一样排列成“方螺线形”(如图所示)进行观察，结果发现在方螺线形中，当中心数

从 17 或 41 开始时，若从左下角到右上角划一条斜线，那末斜线上的数恰好都是质数，方螺线形的这个特点引起了许多数学家的关心。

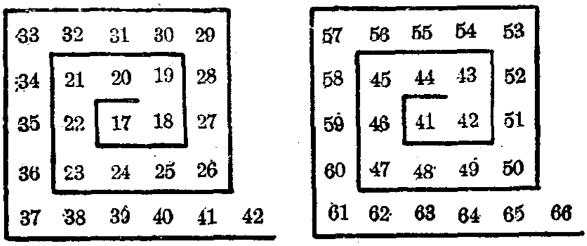

图 1-3

(1) 如果这斜线上的数全是质数，那末不断扩大“方螺线形”就可以不断地发现质数。

(2) 在这种情况下，找出方螺线形斜线上数的分布规律是非常有意义的。

让我们来寻找方螺线形斜线上数的分布规律，设中心数为 a_0，先观察方螺线形各边上数的个数，并以此来计算边长，从起点开始，各边分别为

$$2、2、3、3、4、4、5、5、\cdots$$

规律为每过两条边，边长增加 1。

以 $a=17$ 为例，数 17 到 19 走过了两条长度为 2 的方螺线边长，前一条边上是 17、18，后一条边上是 18、19，如果我们把中心数 17 加上两边的长度得 $17+2+2$，因此实际上为要得到 19，需将 $17+2+2-2$。

同前，要从 19 到 23，需将 $19+3+3-2$。

从数 23 到数 29，需将 $23+4+4-2$。等等。

将这个观察得到的规律用代数式表示出来为

$$a_1=a_0+2\times2-2,$$
$$a_2=a_1+3\times2-2,$$
$$a_3=a_2+4\times2-2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n=a_{n-1}+(n+1)\times2-2.$$

将这 n 个等式两边加起来得

$$a_n=a_0+2[2+3+4+\cdots+(n+1)]-2n$$
$$=a_0+2\cdot\left[\frac{2+(n+1)}{2}\cdot n\right]-2n$$
$$=a_0+n(n+1).$$

利用这个公式验证得：

(1) 取 $a_0=17$，当 $n=0、1、2、\cdots15$ 时，所得 a_n 共16个均是质数；

(2) 取 $a_0=41$，当 $n=0、1、2、\cdots39$ 时所得 a_n 共40个均是质数。

实际上，当 $n=a_0-1$ 时，

$$a_n=a_0+(a_0-1)(a_0-1+1)=a_0^2$$

不是质数，因此从方螺线形斜线上得到的不全是质数。有人验得，取 $a_0=41$，$n=0、1、2\cdots2397$ 时，从上述公式所得2398个数中恰有一半是质数。

3．抽样观察

抽样观察是选择一些特殊情况进行观察，这里抽样不一定按某种顺序进行，可以是随机的，也可以根据研究的需要来选择。

一般抽取较典型的或较易于处理的特殊情况作观察，以提高抽样观察的效果。

例 12 若 $0<a<1$、$0<b<1$，则 $a+b$、$2\sqrt{ab}$、a^2+b^2、$2ab$