电磁学原理及应用

P.洛兰　D.科逊　原著
潘仲麟　胡　芬　翻译
钟锡华　审校

成都科技大学出版社
一九八八年七月

本书是目前在美国、加拿大和西欧高等学校中较为流行的电磁学教材。它系统地阐述了从库仑定律到介质的平面波，从稳恒电流到交变电流的电磁学基本规律。对电场和磁场的相对变换也作了简略介绍。

全书注重实际应用，选用了近100道例题和350道习题，许多内容选自近代科学技术的先进成果；近年来物理学、电气工程和电磁学测量文献。这些例题和习题包含了大量的信息资料，取材新颖。它适合大专院校理工科各专业的学生、教师及有关工程技术人员参阅。

电磁学原理及应用

P·洛兰 D·科逊 原著

潘仲麟 胡芬 翻译

钟锡华 审校

成都科技大学出版社出版、发行

四川省新华书店经销

成都科技大学印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/16 印张：17

1988年9月第1版 1988年9月第1次印刷

字数：424千字 印数：1-1,500

ISBN 7-5616-0214-6/O·18 定价：5.05元

译　者　序

展现在读者面前的是一本八十年代在美国、加拿大和西欧较为流行的大学一、二年级电磁学教科书。作者从普通物理学的水平出发，系统地阐述了电磁现象的基本规律，十分注重实际应用，涉及了有关近代科学技术多方面的问题。我国高等院校理工科各专业的师生，必能从该书中获得教益。

作者洛兰(P.Lorrain) 和科逊 (D.R.Corson)是我国读者所熟悉的。他们合著的《Electromagnetic fields and waves》一书已由陈成钧同志译成中文，于1980年由人民教育出版社出版。科逊是美国康乃尔大学的名誉校长，曾任该校物理系教授、系主任、教务长和校长，是一位有资历的物理学家。洛兰是加拿大蒙特利尔大学物理系教授，曾任该校物理系主任，加拿大物理学家协会主席，并曾应邀到法国格兰诺伯(Grenoble) 大学和西班牙马德里大学担任客座教授。

本书的主要特点是：(1)保持了电磁理论的完整性和系统性。原理的论述和概念的推进简炼精辟，快入快切，注重于对实际问题的分析；(2)选材新颖。许多内容引自近代科学技术的先进成果，不少例题和习题直接选自近年物理学和电工学文献；(3)该书有一定数量的习题要求绘制曲线，一部分习题要求作近似计算，这正是科学研究和工程技术常用的方法；(4)书中的插图，运用了画素描的技巧，绘制物体的三维透视图，具有很强的立体感。为此，我们将此书翻译成中文，以飨读者。

本书的第5—13章和19章是由胡芬翻译的，其余部分由潘仲麟翻译并统稿全书。在翻译中，凡已发现的印刷错误、笔误和个别叙述错误，均已作了订正。

北京大学物理系钟锡华同志仔细阅读、认真推敲，审校了全部译稿，保证了译述的科学性和准确性，以及文句的流畅。责任编辑赖晓霞同志在认真负责编辑加工的同时，提出了许多宝贵有益的意见，谨致谢意。

由于译者水平有限，错误在所难免，诚恳地希望读者批评指正。

译　者

1987年秋于

杭州大学

序　　言

如同作者编著《电磁场和波》*那样，本书旨在给读者以有用的电磁学知识。请读者参看A.N.怀特黑德的论文集《教育的目的》**，特别是与此书名相同的第一篇文章。怀德黑德在一开头就阐明他的观点："全书主张反对死的知识，就是说，反对无活力的观念，……这些观念只不过是被强装入头脑的，而没有经过使用，或没有经过实践，或没有经过重新组合。"基于这个精神，我们在书中给出90余道例题和332道习题，其中27题给出详细的解答。

本书计划作为大学一年级或二年级的教程。也可作为物理学家和工程师的入门课程，或作为紧接电磁学之后的教程，对学生作进一步的训练。

我们设想读者已学过一学期的微积分课程，而未学过矢量、重积分、微分方程及复数。

本书具有前版的同样特点：上面提到的例题；在现时文献中所描述的问题；每章末的摘要；此次还准确地绘制了三维透视图。

为了适应讲授速度，本书分为20章。依次如下：开始一章介绍矢量，接着按电磁学的顺序从库仑定律讨论到介质中的平面波。在第5、17和18章，相当详细地讨论电流，第16章讨论复数和相位。常常有一种相反的看法，认为复数不应占这么显要的地位。事实上，在处理交流电时，没有比复数更适当的方法。我们仅用一章（第10章），简略地阐明洛仑磁变换以及电场和磁场的变换。当然尚留下许多未能答复的问题，但对于本课程将是足够的了。

习　题

许多习题涉及到近年物理学和电工文献中所描述的测量设备和方法，在循序渐进的意义上，它们是"大纲"，而且通常只给出中间的结果。

选许多习题的用意是给读者利用近似和建立有依据的定量分析的机会。致力于求解电磁学中有关场的习题，对于启发式教学无疑是有益的。事实上，通过如此多的习题演算之后，碰到实际问题时，学生不会感到惊奇。

这些习题包含着大量的信息资料，而且提供一些有趣的阅读材料，它亦将促进读者将他新近所获得的知识应用到别的场所，而且能激励读者的创造性。

从第2章开始，比较容易的习题标有E，它们能直接求解，但常需摆脱一些错误概念。有些习题标有D，是属于比较难的。

许多习题要求绘制曲线，这是因为曲线比式子更富有意义。设想学生有一个计算器或计算机，换句话说，计算将是冗长的。

* Electromagnetic Fields and Waves，已译成中文，高教出版社出版(1980.7)——译者注。
** （自由出版社，纽约，1976）

平均来说，每章结束时约有二道习题作了详细的解答。

单位和符号

单位和符号采用国际单位制，所有术语标明SI。由意大利工程师G.乔吉于1901年建议以米-千克-秒制作为电工单位的基础*。随着年代的发展，乔吉制被称为MKS制，后来为MKSA（A为安培）制。主要是国际重量和计量局促进了它的发展，但是，另外一些国际组织也是起作用的，如国际科学联合委员会、国际电工技术委员会和国际物理学和应用物理学委员会。

附录D提供了CGS和SI单位的换算表。“在电磁学中反对继续使用CGS单位制。”**

辅助阅读材料

推荐下列书目作为辅助阅读材料：

电磁场和波　第二版　作者和出版社同本书　在该书的注脚中有几本参考文献。

电工标准手册　McGraw-Hill　纽约　1968年。

电子工程手册　McGraw-Hill　纽约　1975年。

无线电工程参考资料　Howard Sams 和 Company　印第安纳波利斯有限公司　1970年。

静电及其应用　A.D.Moore主编　约翰•怀利　纽约　1973年。

这些书可在大多数物理学和工程图书馆中找到，读者在第二和第三参考文献中将发现许多实际应用的资料。

感谢

首先，感谢我所有的学生，在许多次讨论课中，他们曾给了我那么多的告诫。我亦感谢在写本书中给予帮助的人员：F.洛兰，他绘制了物体三维真实透视图的草图；R.利博罗也参加绘图的准备工作；J.G.德斯马兰斯和G.比拉奇校阅了全书，特别是L.利科特、N.雷兹和A.切纳德，他们完成了一千多页手稿的打字任务。

我亦要感谢R.曼，他在编辑本书和前一书中给予我很大的照顾；同时感谢P.C.维白妮克在校对中的细致工作。

最后，我要一并感谢为《电磁场和波》写信给我的所有人员，尽管我已分别及时地迅速地给他们复信和表示谢意，他们的意见是极为宝贵的。

D•科逊是康乃尔大学校长，最近任名誉校长。遗憾的是由于《电磁场和波》（他是该书的作者之一）的工作，未能和我一起写此序言。

P.洛兰

蒙特利尔，1978

* 参看：ASTM/IEEE Standard Metric Practice, published by the Institute of Electrical and Electrontics Engineers, Inc., 345 East 47th street, New York, N.Y.10017.

** 同前注.

目　　录

第 1 章

矢 量

电和磁现象是由电荷和电流的场来描述的。例如，两电荷之间的作用力用一电荷的电量和另一电荷的场之乘积来表示。

第一章的任务是说明处理场的数学方法.本章的所有内容对于以后各章的真正理解是极为重要的.

在数学上，场是一种函数，用来描述空间各点的物理量.在标量场中的每个点，该量是由单个数量来确定的.压力、温度和电位都是标量的例子，其值在空间各点可以是变化的.对于矢量场，既要求数值又要求方向.风速、地心引力和电场强度均是矢量的例子.图1-1表示两种类型的场.

矢量将用黑体表示；斜体表示标量或矢量的大小*.

以下我们将按通常的习惯，采用右手笛卡尔坐标系，如图1-2；自正x轴向正y轴转过90°，右螺旋的前进方向就是z轴的正方向，

1.1 矢 量

一矢量可由其沿任意三个正交的分量来确定。例如在图1-2笛卡尔坐标系中，矢量

* 在本书的手稿中，在字母上用一箭头来表示矢量，例如 $\vec{A}$

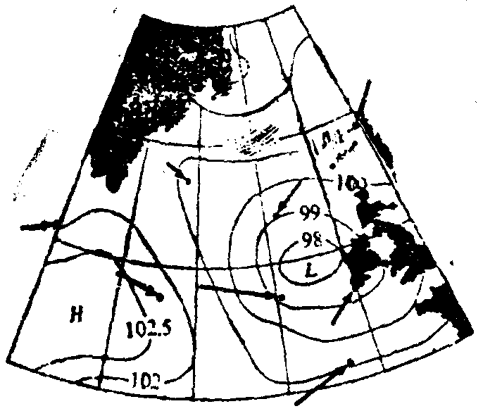

图 1-1　1967年11月1日6时，整个北大西洋的气压和风速场．曲线为等压线，气压单位为千帕。高压地区用H表示．低压地区用L表示。箭头表示风向，箭头的长度表示尖端处的风速．（图中最长的箭头表示风速为25m/s）．图中标出仅几个实际测量的几点的风速矢量

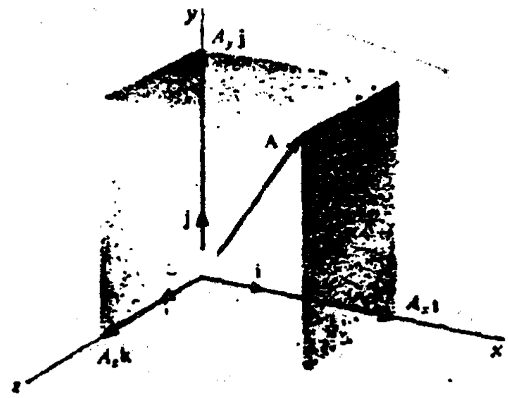

图 1－2 矢量$\vec{A}$和三矢量$A_x\vec{i}$．$A_y\vec{j}$．$A_z\vec{k}$．当三矢量首尾相接时等于$\vec{A}$．

$\vec{A}$的分量是Ax，Ay，Az。

矢量$\vec{A}$可由其分量通过三个单位矢量唯一地确定。$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$分别定为正x、正y和正z方向的单位矢量：

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+\vec{A}_y j+A_z\vec{k} \tag{1-1}$$

矢量$\vec{A}$是大小为A_x、A_y、A_z、其方向分别平行于x、y、z轴的三矢量之总和。

$\vec{A}$的大小是

$$A=(A_x^2+A_y^2+A_z^2)^{1/2} \tag{1-2}$$

两矢量之和由它们的分量相加而得：

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\vec{i}+(A_y+B_y)\vec{j}+(A_z+B_z)\vec{k} \tag{1-3}$$

减法仅是其中一矢量的变符号的加法：

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})=(A_x-B_x)\vec{i}+(A_y-B_y)\vec{j}+(A_z-B_z)\vec{k} \tag{1-4}$$

1.2　标　积

标积或点积，是第一矢量的数值乘以第二矢量的数值再乘以两矢量夹角之余弦，其结果为一标量。例如在图1-3中、

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos(\varphi-\theta) \tag{1-5}$$

由此定义可见，普通算术运算的交换律和分配律适用于标积：

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A} \tag{1-6}$$

对于任意三矢量，

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C} \tag{1-7}$$

后一个性质将在习题1-3中证明。由定义，还可得出

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1;\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1 \tag{1-8}$$

$$\vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{i}=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=0 \tag{1-9}$$

因此，

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}) \quad (1\text{-}10)$$
$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \quad (1\text{-}11)$$

容易验证，对于如图 1-3 中的平面上的两矢量，此结果是正确的：

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos(\varphi-\theta)=AB\cos\varphi\cos\theta+AB\mathrm{sni}\varphi\sin\theta \quad (1\text{-}12)$$
$$=A_xB_x+A_yB_y \quad (1\text{-}13)$$

1.2.1 例题：力所作的功

标积简单的物理学例子是在力的作用下通过位移$\vec{S}$时，力所作之功：$W=\vec{F}\cdot\vec{S}$，如图1-4。

1.3 矢 积

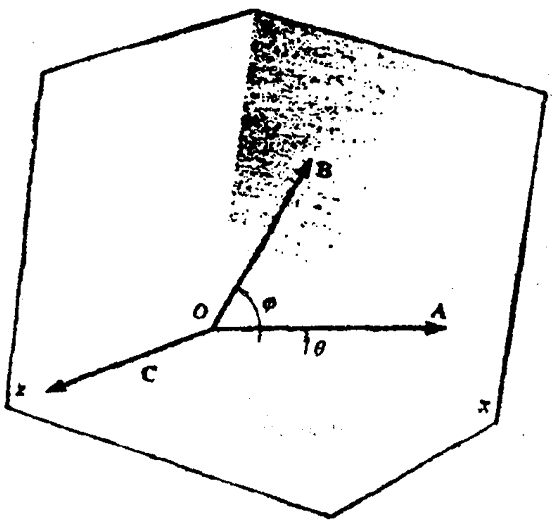

图 1-3 $\vec{A}$和 $\vec{B}$两矢量在 $x-y$ 平面上，它们的标积是$AB\cos(\varphi-\theta)$.它们的矢积$\vec{A}\times\vec{B}$是矢量$\vec{C}$.

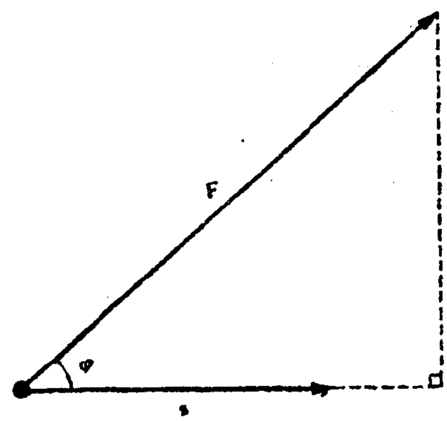

图 1-4 使力的作用点位移$\vec{S}$，力$\vec{F}$所作之功是$(F\cos\varphi)\ S$或$\vec{F}\cdot\vec{S}$

两矢量的矢积或叉积是一个矢量，其方向垂直于两原矢量所在的平面，其大小是两矢量的数值以及它们之夹角正弦的乘积。我们这样表示矢积：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C} \quad (1\text{-}14)$$

$\vec{C}$的大小是

$$C=|AB\sin(\varphi-\theta)| \quad (1\text{-}15)$$

φ和θ如图1-3所示。$\vec{C}$的方向由于右手螺旋法则给出：螺旋轴垂直于$\vec{A}$和$\vec{B}$所在的平面，第一矢量（$\vec{A}$）沿着小角转向第二矢量（$\vec{B}$），则右螺旋前进的方向就是$\vec{C}$的方向。

对于矢积，交换律不成立，因为颠倒$\vec{A}$和$\vec{B}$的顺序，$\vec{C}$的方向相反：

$$\vec{A}\times\vec{B}=-(\vec{B}\times\vec{A}) \quad (1\text{-}16)$$

但是，对于任意三矢量，分配律如下：

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{A}\times\vec{C}) \quad (1\text{-}17)$$

将在习题1-7中证明此式。

对于如图1-2所示的常用右手坐标系，由矢积的定义得

$$\vec{i}\times\vec{i}=0,\qquad \vec{j}\times\vec{j}=0,\qquad \vec{k}\times\vec{k}=0 \tag{1-18}$$

和

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \text{等等。} \tag{1-19}$$

利用分量，$\vec{A}$和$\vec{B}$的矢积可写成，

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\times(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}), \tag{1-20}$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{i}+(A_zA_x-A_xB_z)\vec{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{k}, \tag{1-21}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1-22}$$

对于图 1-3 两矢量，我们可用展开$\sin(\varphi-\theta)$来验证此结果，而且表明矢积沿正 z 方向。

1.3.1 例题：力矩、平形四边形面积

在物理学上，力矩是矢积的一个好例子，如在图 1-5 中，力$\vec{F}$对于 o 点的力矩为$\vec{T}=\vec{r}\times\vec{F}$。

第二个例子是平行四边形的面积，如在图 1-6 中，面积$\vec{S}=\vec{A}\times\vec{B}$，用垂直于面的矢量表示面积。

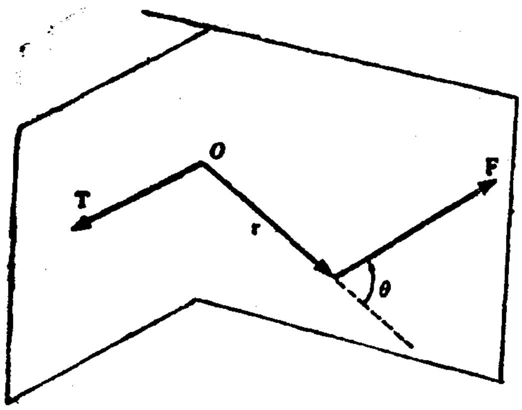

图1-5 矢量乘法的例子·力$\vec{F}$对于 o 点的力矩$\vec{T}$是$\vec{r}\times\vec{F}$，其值为$rF\sin\theta$，方向如图所示。

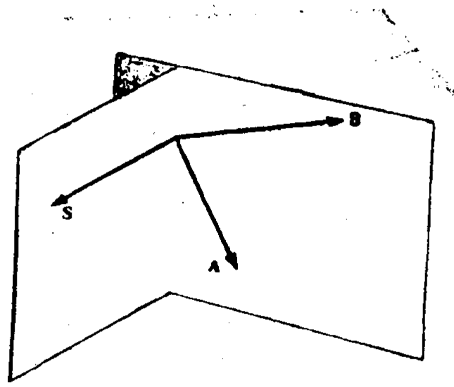

图1—6 平行四边形的面积是$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{S}$，矢量$\vec{S}$垂直于平行四边形。

1.4 时间导数

我们将经常涉及到标量和矢量随时间和空间的变化率，即对时间和空间的导数。

矢量的时间导数是简单易懂的。如图1-7中，在时间Δt内，矢量$\vec{A}$改变$\Delta\vec{A}$，$\Delta\vec{A}$表示大小和方向两者的变化。一般的方法是$\Delta\vec{A}$除以Δt取极限，我们得到时间导数$\frac{d\vec{A}}{dt}$的定义：

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t} \tag{1-23}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_x\vec{i}+\Delta A_y\vec{j}+\Delta A_z\vec{k}}{\Delta t} \tag{1-24}$$

$$=\frac{dA_x}{dt}\vec{i}+\frac{dA_y}{dt}\vec{j}+\frac{dA_z}{dt}\vec{k} \tag{1-25}$$

矢量的时间导数等于其分量的时间导数的矢量和。

1.5 梯 度

考虑一个标量，它是连续可微的坐标函数，在空间某点的值为f，如图1-8。例如f是电位V。我们希望知道该点的f随距离$d\vec{l}$的变化，现在

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\vec{A}\cdot d\vec{l} \tag{1-26}$$

其中

$$\vec{A}=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} \quad 和 \quad d\vec{l}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j} \tag{1-27}$$

矢是$\vec{A}$叫做标量f的梯度。矢量$\vec{A}$的分量是f沿坐标轴随距离的变化率。标量f的梯度的运算用符号∇（称为“*del*”）来表示。这样

$$\vec{A}=\nabla f \tag{1-28}$$

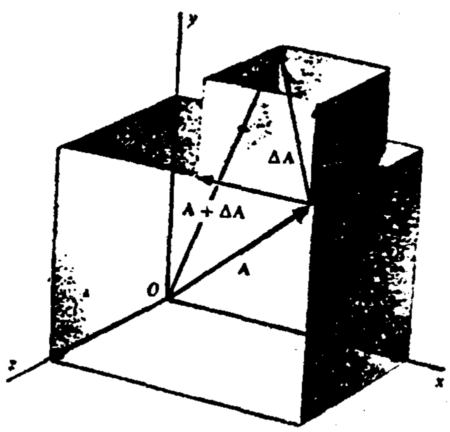

图 1—7 矢量$\vec{A}$，它的增量$\Delta\vec{A}$及其分量

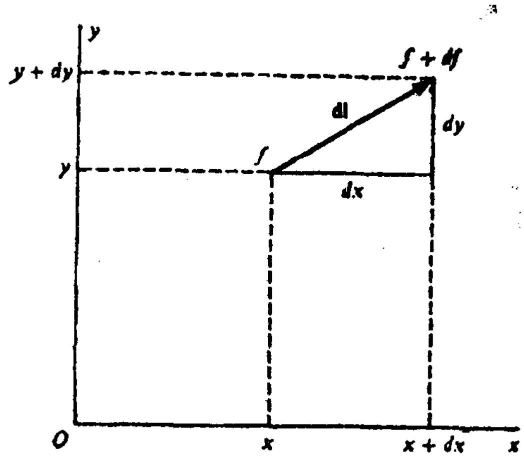

图 1—8 位置函数f：在距离 $d\vec{l}$内从f变到f+df。

在三维里，

$$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1-29}$$

无论什么标量代入算符∇的右边所示的偏微分都能完成。这样

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \tag{1-30}$$

和

$$|\nabla f|=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2} \tag{1-31}$$

于是

$$df=\nabla f\cdot d\vec{l}=|\nabla f||d\vec{l}|\cos\theta \tag{1-32}$$

其中θ是矢量∇f和$d\vec{l}$之间的夹角。

现在我们寻找$d\vec{l}$选择什么方向时df最大。答案是：在$\theta=0$的方向，即∇f的方向。f的梯度是这样一个矢量，其大小和方向都是f的最大空间变化率。

在给定点上，标函数的梯度具有下列特性；

1）它的分量是标函数沿坐标轴方向的变化率。

2）它的大小是标函数随距离的最大变化率的数值。

3）它的方向是标函数变化率最大的方向。

4）它指向较大的函数值。

梯度是由标量点函数导出的矢量点函数。

1.5.1例题：地形图，电场强度

图1-9表示地形图上高度的梯度。

在下一章，我们将看到，电场强度$\vec{E}$等于电位V的梯度的负值：$\vec{E}=-\nabla V$。

1.6 面积分

考虑$x-y$平面。确定该平面上的一点，需要两个坐标，x和y。现在考虑如图1-10中的一个球面，确定一个点，也需要两坐标，θ和φ。当然，我们可用三个坐标x，y，z。但是在给定的球面上，三个坐标是多余的，因为$x^2+y^2+z^2=r^2$，所以我们仅需θ和φ两个坐标。

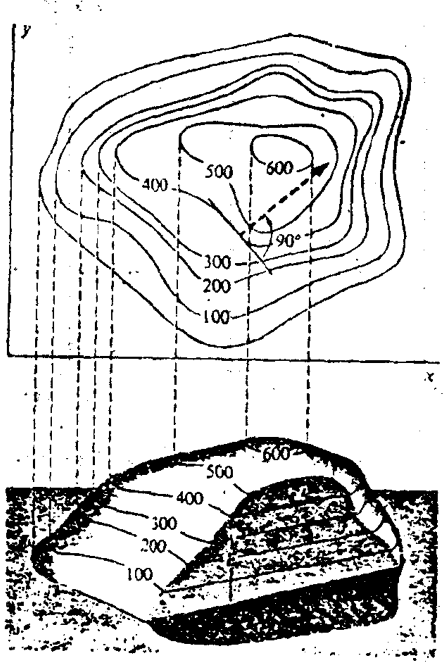

图1-9 一座山的地形图。数字表示高度$E(m)$，E的梯度是被考察点的斜率，它指向高度增加的方向：$\Delta\vec{E}=(\partial E/\partial x)\vec{i}+(\partial E/\partial y)\vec{j}$。箭头表示高为400$m$的点处的$\nabla E$

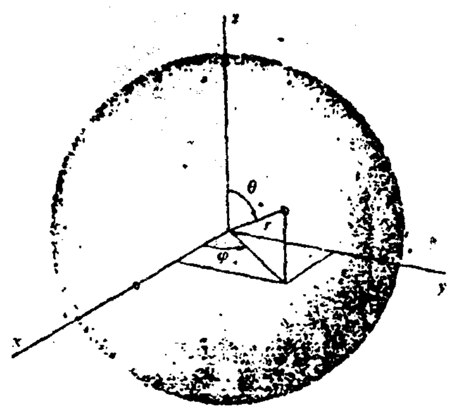

图1-10 半径为r的球面，面上P点的位置由θ和φ两坐标已足够确定，比较地球上的纬度和径度属于什么座标？

这是一般性的规律：区别给定面上的点总是需要两个坐标。

如果要求给定曲面的面积，我们必须对面元$dx\,dy$积分。于是我们有面积分。

更一般地，涉及计算两个变量的积分叫做二重积分（变量不一定是空间坐标）。假定面带电，那么欲求总电荷，我们必须积分电荷面密度乘以面积之两变量。所以面积分是计算涉及确定已知面上的点所必需的两个坐标的二重积分。

如果面位于 $x-y$ 平面上，面积分的形式是

$$\int_{y=a}^{y=b}\left\{\int_{x=a}^{x=b}f(x,\ y)dx\right\}dy$$

其中$f(x,\ y)$是x和y的函数，积分限a和b可以是y的函数，积分限c和d是常量。首先我们计算大括号之间的积分，这样给出另一常量或y的函数。然后此常数或函数对y积分。所以二重积分是积分内的积分。

如在下例中将看到的，颠倒积分的顺序得到同样的结果，二重积分写成形式

$$\int_{x=a'}^{x=b'}\left\{\int_{y=c'}^{y=b'}f(x,\ y)dy\right\}dx$$

这里积分限是不同的：现在c'和d'可以是x的函数，而a'和b'是常量。

必须指出上面表达式中的括号是便于表示二重积分的运算方式，但实际上是不用的。

1.6.1 圆环的面积

在理解和应用新概念时。选用简单的情况，试验其技巧总是适当的。所以，我们用二重积分计算圆环的面积。

为计算方便，我们求图1-11的圆环顶上右边部分的面积，然后乘4。

面积元dA为$dxdy$。首先，我们自左到右滑动dA，在图中产生一阴影窄条。然后我们从$y=0$到$y=R$滑动阴影，而正确地修正它的长度。这样完成了90°区域。

让我们对窄带求积分。窄带高为dy，它在$x=0$处开始，终于圆环的边缘，其中

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (1\text{-}33)$$

这样，在窄带右端

$$x=(R^2-y^2)^{1/2} \qquad (1\text{-}34)$$

和窄带的面积

$$\left\{\int_0^{(R^2-y^2)^{1/2}}dx\right\}dy$$

圆环的总面积A由下式给出

$$\frac{A}{4}=\int_{y=0}^{y=R}\left\{\int_0^{(R^2-y^2)^{1/2}}dx\right\}dy \qquad (1\text{-}35)$$

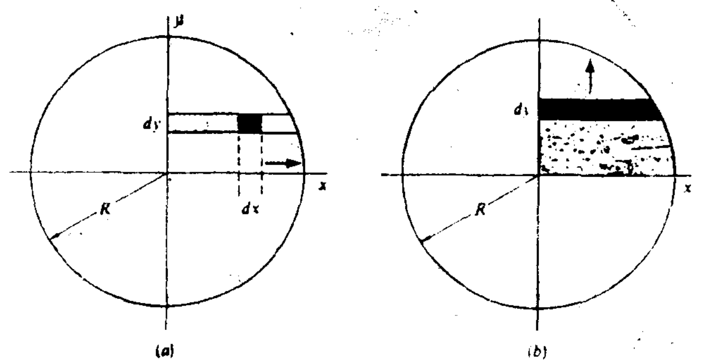

图 1-11 （a）无限小面积之$bxdy$从y轴扫到圆环的周线形成阴影窄带。（b）窄带从x轴扫到圆环的顶，完成了顶一右象限。

$$=\int_0^R(R^2-y^2)^{1/2}dy=R\int_0^R\left(1-\frac{y^2}{R^2}\right)^{1/2}dy, \qquad (1\text{-}36)$$

令$y/R=\sin\theta$，则

$$\left(1-\frac{y^2}{R^2}\right)^{1/2}=\cos\theta,\ \ dy=R\cos\theta d\theta。 \qquad (1\text{-}37)$$

亦即，当$y=0$时，$\theta=0$，和当$y=R$时，$\theta=\pi/2$，则

$$\frac{A}{4}=R\int_0^{\pi/2}R\cos^2\theta\ \ d\theta=\frac{\pi}{4}R^2, \qquad (1\text{-}38)$$

$$A=\pi R^2 \tag{1-39}$$

这正是我们所期待的。

如果我们用竖直窄带，它的范围将由

$$y=0 \quad 到 \quad y=(R^2-x^2)^{1/2} \tag{1-40}$$

于是我们将有

$$\frac{A}{4}=\int_{x=R}^{x=0}\int_{y=0}^{y=(R_2-x_2)^{1/2}}dydx \tag{1-41}$$

$$=\int_0^R(R^2-x^2)^{1/2}dx \tag{1-42}$$

此积分与方程（1-36）相似，圆的面积再次是πR^2。

1.6.2 例题：带电盘

如果有一带电盘，已知其面电荷密度ρ的分布函数，是

$$\sigma=Ky^2, \tag{1-43}$$

那么，利用竖直窄带和遍及整个圆环的积分，总电荷是

$$Q=\int_{x=-R}^{x=+R}\left\{\int_{y=-(R^2-x^2)^{1/2}}^{y=+(R^2-x^2)^{1/2}}Ky^2dy\right\}dx \tag{1-44}$$

$$=\int_{-R}^{+R}\left\{\left[K\frac{y^3}{3}\right]_{-(R^2-x^2)^{1/2}}^{+(R^2-x^2)^{1/2}}\right\}dx \tag{1-45}$$

$$=\int_{-R}^{-R}\frac{2K}{3}(R^2-x^2)^{3/2}dx \tag{1-46}$$

利用积分表，我们求得

$$Q=\frac{\pi}{4}KR^4 \tag{1-47}$$

1.7 体积分

在体积分中有三个变量，在笛卡尔坐标里是x，y，z，在极坐标里为γ，θ，φ（图1-10）。在更一般的情况里，三变量可以是任何性质的，如速度，或电压等等，我们有三重积分。

这里同样地，积分从最里面的开始逐次对每个变量进行。

1.7.1 例题：球的体积

为计算球的体积，我们首先求体积元。参照图1-12，这是

$$(rd\theta)(r\sin\theta d\varphi)(dr)$$

则

$$V=\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr \tag{1-48}$$

首先对φ积分，其次对θ，最后对r。这意味着，我们首先绕垂直轴旋轴产生环线，然后保持半径r和dr不变，滑动环线，这样就得到一个半径为r厚为dr的球壳。当我们把r从0变到R时就得到球。所以

$$V=\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}2\pi r^2\sin\theta d\theta dr \tag{1-49}$$

$$=2\pi\int_{r=0}^{r=R}r^2\left\{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin\theta d\theta\right\}dr \tag{1-50}$$

$$=2\pi\int_0^R 2r^2dr=\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{1-51}$$

这是一个积分限均为常数的特殊的简单情况。的确，方程1-48的三重积分确实是三个积分的乘积。

在习题1-19中，我们将在笛卡尔坐标中重新计算球体积，此时积分限将是函数，而不是常数。

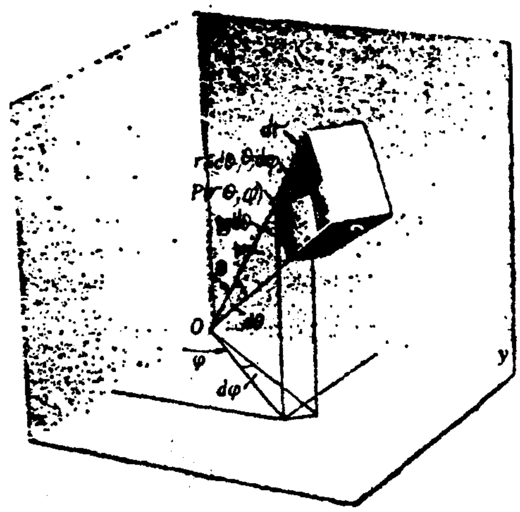

图1-12 球坐标中的体积元。

1.8 通量

常常需要计算一矢量通过曲面的通量。例如要计算通过电磁铁芯的磁通量。矢量$\vec{A}$通过无限小面元$d\vec{a}$的通量是

$$d\Phi=\vec{A}\cdot d\vec{a} \tag{1-52}$$

式中$d\vec{a}$的方向垂直于面元。通量$d\Phi$是矢量$\vec{A}$沿法向方向的分量乘以$d\vec{a}$。对于有限的曲面S，我们对整个曲面积分$\vec{A}\cdot d\vec{a}$求总通量：

$$\Phi=\int_S \vec{A}\cdot d\vec{a} \tag{1-53}$$

对于闭合曲面，矢量$d\vec{a}$的方向取朝外。

1.8.1 例题：流量

让我们考虑流量。定义一矢量$\rho\vec{v}$，ρ是流体的密度，$\vec{v}$为点上的流速，通过任一闭合曲面$\rho\vec{v}$的通量是单位时间内由S所包围的体积流出的净质量。在不可压缩的流体中，此通量是零。

1.9 散度

通过一闭合曲面的$\vec{A}$矢量的朝外通量Φ可由上面的方程或下面的方法计算。让我们考虑一无限小的体积元$dx\ dy\ dz$和矢量$\vec{A}$如图1-13，$\vec{A}$的分量A_x，A_y，A_z是坐标x，y，z的函数。我们考虑无限小体积和$\vec{A}$的第一级变分。

在右侧面中心处A_x的值可以取整个面的平均值。通过体积元右侧面离开的通量是

$$d\Phi_R=\left(A_x+\frac{\partial A_x}{\partial_x}\frac{d_x}{2}\right)dydz, \tag{1-54}$$

因为$\vec{A}$在右侧面的法向分量是$\vec{A}$在该面上的x分量。

在左侧面，

$$d\Phi_L=-\left(A_x-\frac{\partial A_x}{\partial_x}\frac{dx}{2}\right)dydz, \tag{1-55}$$

括号前的负号，是因为该面上$A_x\vec{i}$是朝内的，而$d\vec{a}$是朝外的，两矢量夹角之余弦为-1。则通过两面朝外的净通量是

$$d\Phi_R + d\Phi_L = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial A_x}{\partial x} d\tau, \tag{1-56}$$

式中$d\tau$是无限小的体积元。

如果我们以同样的方法计算通过其它侧面的净通量，对于体积元$d\tau$朝外的总通量是

$$d\Phi_{总} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) d\tau \tag{1-57}$$

现在假定，有两毗邻的无限小体积元。我们求通过包围第一个体积元的面和通过第二个体积元的面的通量之和。在公共的面上，通量等值异号，彼此相消如图1-14。通过第一个体积的通量加通过第二个体积的通量等于通过包围合并体的曲面的通量。

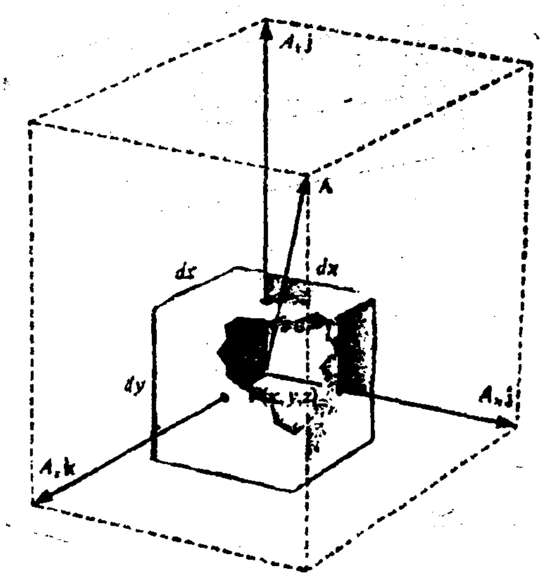

图 1-13 包围点P的体积元dx，dy，dz，这里用箭头表示矢量$\vec{A}$。

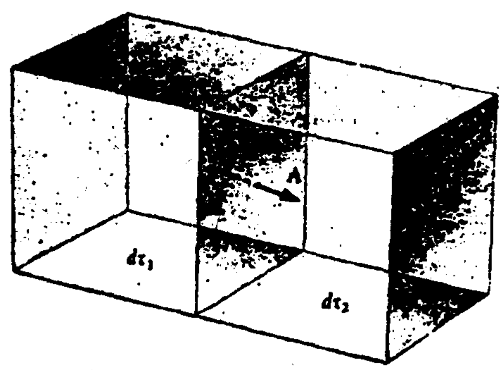

图 1-14 在公共的面上，流出$d\tau_1$的$\vec{A}$通量和流出$d\tau_2$的$\vec{A}$通量等值异号。

为了把此运算扩展到有限的体积，我们把有限体积中的每个无限小体积元的单独通量加起来，朝外的总通量是

$$\Phi_{总} = \int_\tau \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) d\tau \tag{1-58}$$

在体积中的任意给定点上，量

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

是单位体积发出的通量，我们称它为该点上矢量$\vec{A}$的散度。

矢量点函数的散度是标量点函数。

按标积的规律

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z} \tag{1-59}$$

算符∇如同方程(1-29)中的定义。当然∇不是矢量，但是利用标积的记号进行运算是方便的。