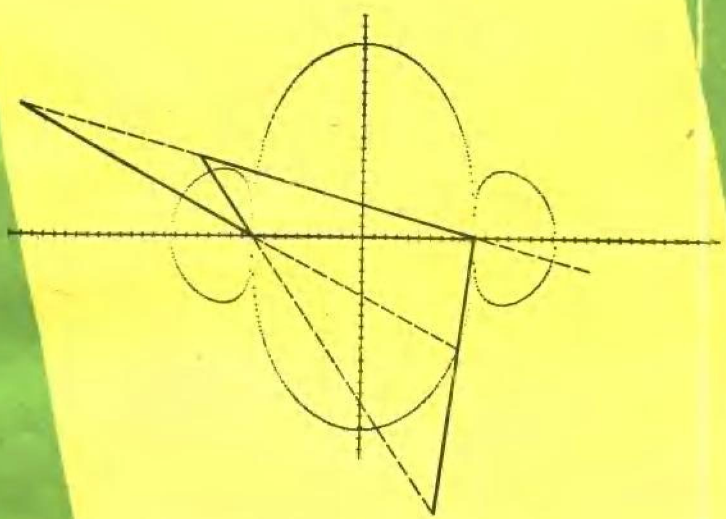
中学生课外读物

分角线相等的三角形

（初等几何机器证明问题）

吴文俊　吕学礼　著



人民教育出版社

中学生课外读物

现代科学技术丛书

分角线相等的三角形

（初等几何机器证明问题）

吴文俊
吕学礼 著

人民教育出版社

本书通过一个古老问题——“内角或外角分角线相等的三角形是否等腰”的研究，初步介绍了利用电子计算机证明初等几何命题的一些概况，可作为电子计算机在逻辑证明方面的应用的启蒙读物。本书可供初中毕业以上学生阅读，也可供中学教师参考。

中学生课外读物

现代科学技术丛书

分角线相等的三角形

（初等几何机器证明问题）

吴文俊 吕学礼 著

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 1.75 字数 34,000

1985年1月第1版 1985年6月第1次印刷

印数 1—31,000

书号 7012·0729 定价 0.26 元

前　言

三角形的两条分角线相等时三角形是否等腰，是一个看来简单而实际上并非如此的古老问题。在十九世纪时，这一问题受到了许多几何学家的注意，当时德国的几何学权威 Steiner 曾写了专文，就内外分角线的各种情形进行了讨论，但并没有把问题彻底澄清。1983 年以来，我与现在美国攻研计算机科学的周咸青同志，应用我们关于机器证明中使用的方法，并通过在计算机上多次反复验算，终于在一年多的通信讨论之后，获得了完全的解答。今年 4 月份我在科学院系统科学所就这一问题作了一次报告，由吕学礼根据记录加以整理，并添加了不少素材，对机器证明也作了一些介绍，写成了现在这本小册子。封面所用图象，也是吕学礼托人用计算机绘制而成。由于这是一本通俗读物，因此某些陈述不能不采取简略的方式，而避免过于艰涩的论证。后者只能求之于专著，例如吴文俊著《几何定理机器证明的基本原理（初等几何部分)》（科学出版社出版）等书。我们希望这本小册子能使读者们对机器证明及其有关方法有一个初步的了解，进而应用之于教育与科研的各条不同战线。

吴文俊

1984 年 12 月14 日

目　　录

一、一个古老问题："两条内分角线相等的三角形是等腰三角形"

初中课本里有一道题目：

求证：等腰三角形两个底角的内分角线❶相等。

这是初中生都会解决的简单问题。

但是，这个命题的逆命题：

两条内分角线相等的三角形是等腰三角形，

看起来十分简单，却并不是容易证明的。如果不信，请你自己试一试。

这是一个古老问题。

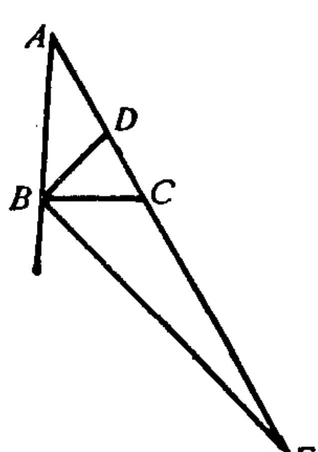
从古至今，有很多人用了很多方法证明这个逆命题，但都不是轻而易举的。下面举出其中比较起来简单些的几种证法。

1. 利用反证法

已知：在$\triangle ABC$中，内分角线BD和CE相等。求证：

---

❶ 三角形一个角的内分角线是指这个内角的平分线从顶点到与对边的交点间的线段，外分角线是指外角的平分线从顶点到与对边的交点间的线段。如图的$\triangle ABC$中，BD是一条内分角线，BE是一条外分角线。



$AB=AC$（图一）。

证明：假定 $AB\neq AC$。且设 $AB>AC$。则 $\angle ACB>\angle ABC$。因而 $\frac{1}{2}\angle ACB>\frac{1}{2}\angle ABC$，即 $\angle ACE>\angle ABD$。

在 $\angle ACE$ 内，作 $\angle ECF=\angle DBA$。则因 $\angle ECB>\angle DBC$（分别等于 $\frac{1}{2}\angle ACB$ 和 $\frac{1}{2}\angle ABC$），所以仍有 $\angle FCB>\angle FBC$。故得 $BF>CF$。

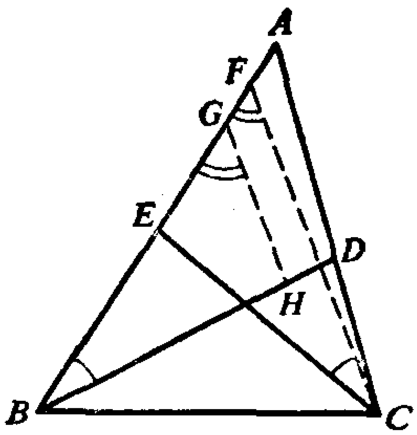


图 一

在 BF 上取 G 点，使 $BG=CF$。再作 $GH\parallel FC$，与 BD 交于 H。

那么在 $\triangle BGH$ 和 $\triangle CFE$ 中，$\angle GBH=\angle FCE$，$BG=CF$，$\angle BGH=\angle CFE$，因此 $\triangle BGH\cong\triangle CFE$，而得 $BH=CE$。

这和 $BD=CE$ 相矛盾。

因此不可能有 $AB>AC$。

同样，如果假定 $AB<AC$，那么也会产生矛盾，因此也不可能有 $AB<AC$。

这样就证明了 $AB=AC$。

2. 利用直接证法

已知：在 $\triangle ABC$ 中，内分角线 BD 和 CE 相等。求证：$AB=AC$。

证明：命 $\angle ABC=2\alpha$，$\angle ACB=2\beta$。

作 DF 使 $\angle BDF=\beta$，作 BF 使 $\angle DBF=\angle CEB$，如图二。设 DF 与 BF 交于 F。则在 $\triangle DBF$ 和 $\triangle CEB$ 中，$\angle BDF$

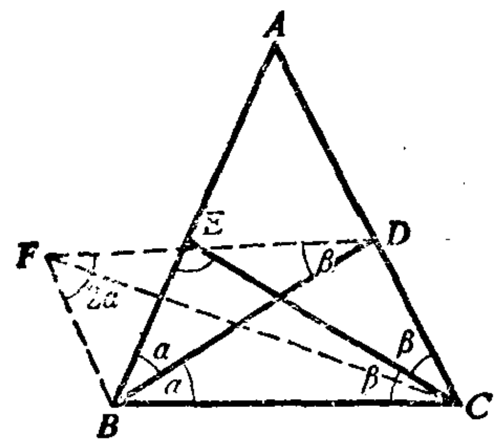


图　二

$=\angle ECB$, $\angle DBF=\angle CEB$, 且 $BD=EC$, 故$\triangle DBF\cong\triangle CEB$, 因此, $\angle BFD=\angle EBC=2\alpha$, $BF=EB$。

$$\angle FBC=\angle FBD+\alpha=\angle BEC+\alpha=180^\circ-(2\alpha+\beta)+\alpha$$
$$=180^\circ-(\alpha+\beta),$$

$\angle CDF=\angle CDB+\beta=180^\circ-(\alpha+2\beta)+\beta=180^\circ-(\alpha+\beta)$, 并且 $2\alpha+2\beta<180^\circ$, $\therefore\alpha+\beta<90^\circ$, $\therefore\angle FBC=\angle CDF>90^\circ$。又 $BC=DF$, $FC=CF$, $\therefore\triangle BCF\cong\triangle DFC$(两个三角形有两边及其中一边的对角分别相等, 且这个对角为钝角, 则两三角形全等)。$\therefore BF=DC$。

又因 $BF=EB$, 所以 $DC=EB$。又 $DB=EC$, $BC=CB$, 因此$\triangle DBC\cong\triangle ECB$。

$\therefore\quad\angle DCB=\angle EBC$, $\therefore\quad AB=AC$。

3. 代数证法

已知、求证同(1)、(2)。设 BC、CA、AB 的长分别为a、b、c。则由内分角线的长的公式, 根据 $BD=CE$ 可得

$$\frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)}=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)},\qquad(1)$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

由(1)可得 $(a+b)^2c(s-b)=(a+c)^2b(s-c)$,

化简, $a^2cs+b^2cs-2ab^2c-b^3c=a^2bs+c^2bs-2abc^2-c^3b$,

即 $a^2s(c-b)+bcs(b-c)-2abc(b-c)-bc(b^2-c^2)=0$,

$(b-c)(a^2s-bcs+2abc+b^2c+bc^2)=0$,

$(b-c)(a^2s-bcs+abc+bc\cdot 2s)=0$,

$\therefore\quad (b-c)(a^2s+abc+bcs)=0$。 (2)

因 $a>0$, $b>0$, $c>0$, $s>0$, 故(2)式左边第二个因式 $a^2s+abc+bcs>0$。

于是由(2)式可得 $b-c=0$,即$\triangle ABC$ 为等腰三角形。

二、传统证法与机器证法

上节我们提到了一个命题“等腰三角形两个底角的内分角线相等”和它的逆命题“两条内分角线相等的三角形是等腰三角形”。原命题容易证明，而这个逆命题很难证明，这个逆命题成为一个古老问题，很多人想了很多方法加以证明。

读者们也许都有这个经验，用传统方法证明每一个稍难的初等几何命题，都要经过一番巧思。有的要添这样的辅助线，有的要添那样的辅助线。不同的命题有不同的证法，也就需要不同的巧思。一个新的命题需要通过新的巧思，找到新的证法。

下面我们粗略介绍利用电子计算机来证明初等几何命题的方法，简称机器证法。这种方法不是特殊地适用于个别的命题，而是普遍地适用于初等几何的所有命题，至少是某一类的很多命题。只要按照这种方法机械地进行，在有限步之后，就可对这一类中的任何初等几何命题判定它是真是假。命题是真的，这个命题就得到了证明；命题是假的，这个命题就得到了否定。机器证明只需机械地进行，对于这类中的任何命题都是按照同样的步骤进行，不必对特殊的命题运用特殊的巧思。

初等几何的传统证明与机器证明之间的关系，就象应用题的算术解法与代数解法之间的关系。

为了通俗易懂，这本小册子只能对机器证明介绍一些大

致情况，读者如要了解它的详细情况以及基本原理，可请进一步参阅《几何定理机器证明的基本原理（初等几何部分）》（科学出版社出版，吴文俊著）等书。

三、机器证法举例

为了说明机器证法的大意，我们先举一个极简单的例子。这个例子用传统证法完全可以轻易地解决。以它为例，只是为了说明机器证法的大致情况，为下面进一步说明机器证法作些准备。

求证：平行四边形的对角线互相平分。

设 $ABCD$ 为平行四边形，求证 AC、BD 互相平分（图三）。

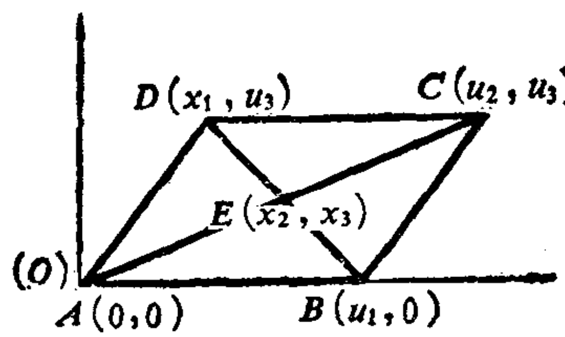


图　三

机器证法与解析几何方法相仿，也是先把几何问题化为代数问题。

以 A 点为原点 O，以 AB 为横轴，作成直角坐标系。

则 A 点的坐标为 $(0,0)$。设 B 点的坐标为 $(u_1,0)$，C 点的坐标为 (u_2,u_3)，D 点的坐标为 (x_1,u_3)，对角线 BD 与 AC 的交点 E 的坐标为 (x_2,x_3)。

这里 u_1, u_2, u_3 是独立坐标，而 x_1, x_2, x_3 是随着 u_1, u_2, u_3 而确定的，所以不是独立坐标。D 的纵坐标取得和 C 的纵坐标一样，都是 u_3，这是已经运用了 $DC \parallel AB$ 的条件。在这里，

这样做是为了使后面的说明更为简化而采取的特殊处理。实际上完全可以不必运用 $DC \parallel AB$ 的条件，而把 D 的坐标取作 (x_1, x_2)，E 的坐标取作 (x_3, x_4)，后面的说明仍能完全适用，不过略繁一些。

取好坐标以后，我们先把本题的题设部分表示成代数形式。

$AD \parallel BC$ 可以用 $\frac{u_3-0}{x_1-0}=\frac{u_3-0}{u_2-u_1}$ 表示(斜率相等)，但在机器证明中，不准许用分式，而把 $AD \parallel BC$ 用关于整式的等式来表示：

$$(u_3-0)(u_2-u_1)-(x_1-0)(u_3-0)=0,$$

即

$$u_3(u_2-u_1)-x_1u_3=0。\tag{1}$$

要注意等式(1)实际上并不只是表示一般的几何意义下的 $AD \parallel BC$，而是表示 $AD \parallel BC$，或 A 与 D 重合，或 B 与 C 重合，或 AD 与 BC 在同一条直线上等几种情况。这样做，虽然好象是扩大了我们原来关于平行的概念，但却有利于研究更为普遍的情况，并且也有利于找到关于机器证明的一个一般步骤。

E 点在 BD 上，在机器证明中可以用下面关于整式的等式来表示：

$$x_3(x_1-u_1)-u_3(x_2-u_1)=0。\tag{2}$$

同样，E 点在 AC 上，可以用下式表示：

$$x_3u_2-x_2u_3=0。\tag{3}$$

(1)、(2)、(3)三式表示本题的题设部分。(题设 $DC \parallel AB$ 已在取坐标时用过了。)

下面再把本题的终结部分表示成代数形式。

$EA=EC$ 就是(机器证明中不用根式,改用$EA^2=EC^2$,下同):

$$x_2^2+x_3^2=(u_2-x_2)^2+(u_3-x_3)^2,$$

即
$$u_2^2-2u_2x_2+u_3^2-2u_3x_3=0。\tag{4}$$

$EB=ED$ 就是

$$(x_2-u_1)^2+x_3^2=(x_1-x_2)^2+(u_3-x_3)^2,$$

即
$$-2u_1x_2+u_1^2-x_1^2+2x_1x_2-u_3^2+2u_3x_3=0。\tag{5}$$

现在的问题就是怎样从本题的题设部分(1)、(2)、(3)推出本题的终结部分(4)、(5)。

我们通常的做法是,从(1)、(2)、(3)中解出 x_1、x_2、x_3,得到,在 $u_1\neq0$,$u_3\neq0$ 的条件下❶,

$$\begin{cases}x_1=u_2-u_1,\\ x_2=u_2/2,\\ x_3=u_3/2。\end{cases}$$

把它们代入(4)式的左边,得

$$u_2^2-2u_2\cdot\frac{u_2}{2}+u_3^2-2u_3\cdot\frac{u_3}{2},$$

这个式子恒等于 0,所以(4)式成立。

把它们代入(5)式的左边,得

$$-2u_1\cdot\frac{u_2}{2}+u_1^2-(u_2-u_1)^2+2(u_2-u_1)\cdot\frac{u_2}{2}-u_3^2+2u_3\cdot\frac{u_3}{2},$$

---

❶ 从图三可以看到,$u_1\neq0$ 的几何意义是 B 点与 A 点不相重合;$u_3\neq0$ 的几何意义是 DC 与 AB 不在同一条直线上。对于我们所理解的平行四边形来说,这些条件显然是符合的。

这个式子也恒等于 0，所以(5)式也成立。

这就证明了在 $u_1 \neq 0$，$u_3 \neq 0$ 的条件下，本题中的命题是真的。

上面所说的是通常的做法，还不是机器证明。

机器证明用的是下面的方法。虽然对有些问题机器证明的方法似乎反而比通常的做法更繁，但是因为机器证明的方法有一定的步骤，可以通过一定的程序让机器来运行，而且对于较为复杂的问题通常的做法很难进行甚至无法进行，而机器证法则不管问题是简单的还是复杂的，都能同样按照一定的步骤进行，所以机器证明所用的下面的方法可以解决通常的做法不易解决或无法解决的问题。

方法如下。

第一步 先对命题的题设部分(1)、(2)、(3)三式，即

$$u_3(u_2 - u_1) - x_1 u_3 = 0, \tag{1}$$

$$x_3(x_1 - u_1) - u_3(x_2 - u_1) = 0, \tag{2}$$

$$x_3 u_2 - x_2 u_3 = 0, \tag{3}$$

进行整理，使其中一个式子只能包含一个 x，例如 x_1，一个式子只能包含这个 x 和另一个 x，例如 x_1 和 x_2(或 x_1 和 x_3)，而一个式子可以包含三个 x，即 x_1, x_2, x_3。

对于这里的(1)，(2)，(3)，这是很容易做到的。

(1)式中本来只含 x_1。在 $u_3 \neq 0$ 的条件下，(1)式就是

$$u_2 - u_1 - x_1 = 0,$$

我们把它的左边(右边是零，下同)叫做 f_1，那么(1)式就是(在 $u_3 \neq 0$ 的条件下)

$$f_1 = u_2 - u_1 - x_1 = 0. \tag{1'}$$

(2)、(3)两式都是既有 x_2，又有 x_3。我们可以从中消去 x_2。由(2)式减去(3)式，即得

$$x_3(x_1-u_1-u_2)+u_1u_3=0。$$

我们把它的左边叫做 f_2，就得

$$f_2=x_3(x_1-u_1-u_2)+u_1u_3=0。\tag{2'}$$

再把(3)式的左边叫做 f_3，就得

$$f_3=x_3u_2-x_2u_3=0。\tag{3'}$$

上面的(1′)只含 x_1，(2′)只含 x_1 和 x_3，(3′)含 x_1，x_2 和 x_3（实际上不含 x_1）。这就达到了整理的目的。这样的整理叫做**三角化**❶。意思就是化成

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_1,\ x_3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \end{matrix} \qquad \left(\text{或}\quad \begin{matrix} x_1 \\ x_1,\ x_2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \end{matrix}\right)$$

的形式。

把题设部分三角化以后，得到三个多项式：

$$f_1=u_2-u_1-x_1,$$
$$f_2=x_3(x_1-u_1-u_2)+u_1u_3,$$
$$f_3=x_3u_2-x_2u_3。$$

然后进行第二步。

第二步 把表示题目的终结部分的等式的左边（右边是0)用 g 表示。例如把(4)式的左边用 g_1 表示，即令

$$g_1=u_2^2-2u_2x_2+u_3^2-2u_3x_3。$$

((5)式的左边用 g_2 表示，以后再说。)

---

❶ 严格说来，三角化还有其他一些要求，这里从略。

再把 g_1 除以 f_3(两者都看作 x_2 的多项式)，所得的余式除以 f_2(两者都看作 x_3 的多项式)，又一次所得的余式除以 f_1(两者都看作 x_1 的多项式)，最后把所得的余式叫做 R，看 R 是不是恒等于零。

实际进行如下。

把 g_1 除以 f_3(都看作 x_2 的多项式)。为了避免分式，我们用 u_3g_1 除以 f_3，即

$$\begin{array}{r|l} & 2u_2 \\ \hline -u_3x_2+u_2x_3 & -2u_2u_3x_2-2u_3^2x_3+u_2^2u_3+u_3^3 \\ & -2u_2u_3x_2+2u_2^2x_3 \\ \cline{2-2} & \qquad -2u_3^2x_3-2u_2^2x_3+u_2^2u_3+u_3^3 \end{array}$$

这就得到

$$u_3g_1=2u_2f_3+R_3, \tag{6}$$

其中 $$R_3=-2(u_2^2+u_3^2)x_3+u_3(u_2^2+u_3^2)。$$

把 R_3 除以 f_2(都看作 x_3 的多项式)。得到(除法算式从略，下同)：

$$(x_1-u_1-u_2)R_3=-2(u_2^2+u_3^2)f_2+R_2, \tag{7}$$

其中 $$R_2=2u_1u_3(u_2^2+u_3^2)+u_3(u_2^2+u_3^2)(x_1-u_1-u_2)。$$

再把 R_2 除以 f_1(都看作 x_1 的多项式)。得到

$$R_2=-u_3(u_2^2+u_3^2)f_1+R, \tag{8}$$

而其中的 R 恒等于 0！

这就说明了在某些附加条件下，从本题的题设部分(1)、(2)、(3)三式可以推出本题的终结部分(4)式。

这是因为由(6)式可得

$$u_3(x_1-u_1-u_2)g_1=2u_2(x_1-u_1-u_2)f_3+(x_1-u_1-u_2)R_3,$$

以(7)式代入，得