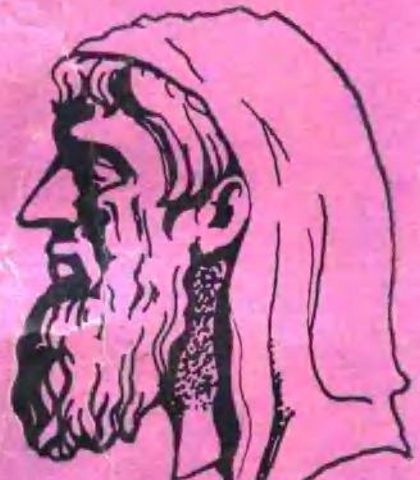
世界数学名题欣赏



欧几里得第五公设

辽宁教育出版社

世界数学名题欣赏丛书

欧几里得第五公设

蒋 声 著

辽宁教育出版社

1988年·沈阳

欧几里得第五公设

蒋 声 著

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号） 沈阳新华印刷厂印刷

字数：89,000 开本：787×1092 1/32 印张：5 3/4 插页：4
印数：1—1,000
1988年2月第1版 1988年2月第1次印刷

责任编辑：俞晓群 责任校对：王淑芬
封面设计：安今生 插 图：潘智倩

ISBN 7-5382-0310-9/G·257
定价：1.55 元

内 容 简 介

本书是"世界数学名题欣赏丛书"之一。欧几里得第五公设从何而来？为什么它是了解古典几何学平行理论的关键？怎样通过尝试证明第五公设而发现许多新的几何？这样的发现对现代数学和物理学有什么重要影响？许多杰出的数学思想又是怎样与研究第五公设的漫长岁月紧密联系在一起的？……所有这些有趣的问题，都将在本书中得到回答。一个陌生而美丽的几何世界将展示在你的眼前。

Summary

This book is one of "A Series of Appreciation of the Famous Mathematical Topics in World". Where does Euclid's fifth postulate come from? Why it is the key statement to understand of the parallel theory of classical geometry? How do the attempts to prove the postulate lead to the discovery of many new geometries? How important are the effects of the discovery for modern mathematics and physics? And, how many great mathematical thoughts are close relating with the very long process of research for it? ...... All these interesting questio ns will been answered in this book. A strange and beautiful geometric world will be showed to you

前　言

欧几里得是公元前三世纪希腊的一位数学家。欧几里得第五公设是欧几里得在他的名著《几何原本》中叙述的一个关键性的命题，列为五条公设中的最后一条。曾经有很多人认为这个命题或许没有资格作为公设，试图把它证明出来。研究了两千多年，虽然未能达到预期目的，却有了许多更加重要的意外收获。结果发现，除了欧几里得的那一套几何学而外，还有许许多多各种各样的几何学，因而对今天的数学和物理学产生了深刻的影响。有关欧几里得第五公设的故事，已成为数学史上的一段佳话。

欧几里得第五公设从何而来？有何作用？究竟能否把它从公设行列中拿掉？为什么通过对它的研究可以发现新的几何？这种发现对现代数学

和物理学有何影响？通过欧几里得第五公设问题的研究过程，可以反映出哪些重要数学思想？它们是怎样演变的？这一连串问题，构成了本书所要探讨的基本内容。探讨的重点，在于阐述数学思想，因而将尽可能绕过定义和定理的庞大体系，注重思路，略去细节。

欧几里得第五公设问题涉及多方面专门知识，要能用适当的词句，确切地把握住隐藏在庞大理论体系后面的思想实质，颇费周折。作者的水平和能力都很有限，拿起笔来，常常感到力不从心。所幸已有许多前辈做了大量出色工作，提供了丰富的资料和宝贵的经验，才使本书得以脱稿。恳切希望各有关方面的专家们和爱好者们对本书内容给予批评指正。

蒋　声

1987年7月

目 录

Contents

一 几何学的起源

问渠那得清如许？
为有源头活水来。
（宋）朱熹：《观书有感》

几何学是从制造器皿、测量容器、丈量土地等实际问题中产生和发展起来的.

早在几十万年以前，当原始人类为了采集食物而用石块制作简单的武器和工具时，就已开始出现形的观念. 这些石器往往被做成较为规则的几何形状，反映出当时人们的头脑中已初步确立了一些几何图形的形象。例如，在北京西南周口店的猿人遗址中，发现了五十万年前制作的石器，其中的石刀、石斧等的每一个面都近似于平面，尖状器的尖角近似于锥体. 在山西省襄汾县丁村发现了几万年前原始人用石块制成的球形工

具。原始人类还知道如何美化生活，创造了石像和绘画等艺术形式。在法国和西班牙发现了大约一万五千年前的地穴里的绘画。原始艺术的出现，反映出人们已能把简单图形组合成复杂形状，来表达某种内容，获得美的享受。

大约在一万年以前，覆盖在欧、亚大陆上的冰块开始融化，地面露出大片的森林和沙漠。以捕鱼和打猎为生的流动人群，大部分定居务农，开始了新石器时代。出现了陶器、木器和纺织品，发明了轮子。产品的几何形状更加准确和精致，并且常用各种几何图案加以装饰。产品的形状和装饰图案倾向于对称，很多陶器做成旋转体的形状，在装饰图案中出现平行线、相交线、垂直线，甚至还有球面上的大圆，以及全等形和相似形。

生产的进一步发展，使人们不仅关心物体的形状，而且对大小有更具体的要求，这就需要测量长度和容积，丈量土地，并且进行有关的计算，于是就出现了一些可直接应用于计算的几何公式和定理。但是在这些公式和定理开始出现时，往往不是象我们现在这样作为重要内容单独列出来，而多半是隐含在一些具体计算问题的解答过程中，靠我们去仔细揣摩。

古代埃及人把数学资料用墨水写在很薄的草片上，现在英国博物馆和苏联的莫斯科分别收藏了一批这样的草片，都是公元前1700年左右埃及人写成的，上面记载着一些数学问题和它们的解答。通过分析解答过程，可以推断出当时是依据什么法则进行计算的。例如，纸片上记载着一个求棱台体积的问题，大意为："若有人告诉你说：有一棱台，高为6，底为4，顶为2。你就要取这4的平方，得结果为16。你要把它加倍，得结果8。你要取2的平方，得4。你要把16、8和4加起来，得28。你要取6的三分之一，得2。你要取28的两倍，得56。你看，它等于56。你可以知道它是对的。"这段文字叙述，如果改用现在的数学符号，可以简洁地表达成

$$V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2),$$

其中 V 是四棱台的体积，棱台的两个底面是边长为a和b的正方形，棱台的高为h.在本题中 $h=6, a=4, b=2$。这是一个完全正确的公式。现在的中学生在高中一年级下学期才学习棱台体积的计算，这时早已学完平面几何，立体几何的学习也已接近尾声。但是在历史上，棱台体积计算却成为最早见于文字记载的几何内容之一。

另一方面，古代埃及人进行几何计算的法则也并不完全正确．例如，他们在一个庙宇的墙上刻着一个捐献给庙宇的田地表，这些田地一般有四条边．铭文中计算四边形田地面积的方法，用现在的符号可以写成

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2},$$

其中S是四边形的面积，a和b是四边形的一双对边，c和d是另一双对边，对于边长为a、b、c的三角形田地，他们认为$d=0$，因而

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c}{2}.$$

这些法则即使看成近似公式，误差往往也很大．

古代巴比伦人把他们的数学资料刻成泥版的形式．现在保存的泥版中，较早的一些是公元前2000年左右的，大部分是公元前600年到公元300年间制成的．这些泥版主要研究算术和代数，只在解决实际问题时搞一点几何．他们收集了一些计算简单平面图形面积和简单立体体积的法则，知道了三角形的相似，以及相似三角形的对应边成比例的性质．在一块制作于公元前2000年左右的泥版上，刻着一个特别的数表，根据专家考证，表中列出了十五组勾股弦数，即满足a^2+

$b^2=c^2$的自然数组a、b、c。据此，有人认为，可能巴比伦人已经知道了勾股定理，甚至还可能知道了求勾股弦数的一般公式。当然这只是一种推测。巴比伦人在几何问题中的图形画得并不精致，计算法则也未必正确。他们为着解决某些物理问题而计算的体积，有些算对了，有些算得不对。

无论从古代埃及的草片或是巴比伦的泥版，都找不到有关推理论证的记载。所采用的计算几何量的法则，都是通过数字计算的具体例题表现出来的。有些问题虽然涉及的道理比较复杂，所用的公式却完全正确；另一些问题虽然涉及的道理相对地简单一些，所用的计算法则却未必正确。有些法则在某种情形下是较好的近似，而在另一些情形下产生较大的误差。把这些现象联系在一起，自然会得出一个结论：在古代的埃及和巴比伦，人们都是从社会实践过程中逐步归纳、总结出一些计算法则，用来解决当时遇到的实际计算问题，边试算、边改进。如果一个法则试算的结果与实际情形相符，便认为有充分理由继续加以采用。

在古代的中国，从现存的一些较早的数学书籍来看，几何知识的积累，也是来源于社会实践

的推动。天文观测、兴修水利、丈量田亩等，都促进了几何学的发展。在《周髀算经》、《九章算术》等书中，往往也是通过具体数字计算问题反映出当时人们所掌握的几何知识；后代人注释这些书时，才补出有关定理的证明。但是中国古代的数学有着自己的特点。在约于公元前二世纪成书的《周髀算经》中，在进行具体数字计算的同时，还明确地叙述出在直角三角形中求斜边长的一般方法："勾、股各自乘，并而开方除之"。用现在的符号写出来，就是

$$c=\sqrt{a^2+b^2},$$

其中a和b是两条直角边的长度，c是斜边长。生活在公元前四、五世纪的墨子，在他的著作《墨经》中，甚至试图对一些几何概念给出逻辑的定义。其中，关于两线段相等、线段的中点、圆周等概念的定义，既清晰，又确切。例如，关于圆周的定义是这样的：

"圜，一中同长也。"

"圜"就是圆周。上面这句话，翻译成现代语言，意思就是：圆周是到一个中心点有相等距离的点所构成的图形。

《墨经》中还叙述了一个重要命题："穷，或有前不容尺也"，意思是：用一条线段去量另