Tu lun dao yin

图论导引

李修睦 著

华中工学院出版社

图论导引

李修睦著

华中工学院出版社

图 论 导 引

李修睦 著

责任编辑 彭守权

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行 各地新华书店经售

武汉市江汉印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：13.125 字数：331,000

1982年12月第1版 1982年12月第1次印刷

印数：1—10,000

统一书号：13255—002 定价：2.[illegible]0元

内容简介

本书共分十四章，前五章叙述图的一般概念与一般性质，后九章可以说是一些专门问题的讨论。本书语言通俗易懂，编排由浅入深，既可作为高等院校数学专业高年级图论选修课和研究生学习的教材，也很适宜为已学过普通高等代数知识的初学者自学图论的读本。书的每章都附有难易程度不同的较多的习题，供教学时选用。书中还介绍了一些最重要最新的成果，提出了若干有启发性的研究课题，引录了一定数量的有价值的中外文参考文献，为图论的深入研究指出了方向。

目　录

前言 …… (1)

第一章　基本概念 …… (3)

§ 1　图 …… (3)

§ 2　有向图与无向图 …… (4)

§ 3　图的顶与边(弧) …… (5)

§ 4　1——图 …… (5)

§ 5　平面图与非平面图 …… (6)

§ 6　顶点次数 …… (7)

§ 7　部分图与子图 …… (8)

§ 8　图的矩阵表示 …… (9)

§ 9　链与圈，路与回路 …… (11)

§ 10　图的同构 …… (13)

习题 …… (14)

第二章　树与树形图 …… (19)

§ 1　树 …… (19)

§ 2　跨顶树 …… (21)

§ 3　树形图 …… (24)

§ 4　联接图上的最短路 …… (28)

习题 …… (36)

第三章　圈和圈维数 …… (40)

§ 1　尤拉圈 …… (40)

§ 2　环和 …… (44)

§ 3　余圈 …… (45)

§ 4　向量空间 …… (49)

§ 5　圈维数 …… (50)

§ 6　圈的矩阵表示 …… (53)

§ 7　数树 …… (58)

习题 …… (68)

第四章　平面图 …………………………………………… (72)
§ 1　测地变换…………………………………………… (72)
§ 2　平面图的面…………………………………………… (72)
§ 3　尤拉公式…………………………………………… (74)
§ 4　对偶图…………………………………………… (78)
§ 5　库拉图斯基定理…………………………………………… (80)
§ 6　库拉图斯基定理充分性的证明…………………………… (82)
习题 …………………………………………… (86)
第五章　两分图（偶图） …………………………………… (89)
§ 1　基本概念与基本定理…………………………………… (89)
§ 2　两分图的矩阵表示…………………………………… (92)
§ 3　两分图的并列集…………………………………… (99)
习题 …………………………………………… (101)
第六章　网络上的流 …………………………………… (103)
§ 1　网络…………………………………………… (103)
§ 2　流量的调整…………………………………………… (106)
§ 3　极大流量——极小截量定理…………………………… (109)
§ 4　极大流量——极小截量定理的简单应用………………… (113)
§ 5　供求定理…………………………………………… (116)
§ 6　对称的供求定理…………………………………… (119)
§ 7　环流问题…………………………………………… (124)
§ 8　环流与势差…………………………………………… (130)
习题 …………………………………………… (136)
第七章　网络流理论在图论上的应用（具已知半次的图的存在性） …………………………………… (143)
§ 1　蒙格尔定理…………………………………………… (143)
§ 2　具已知半次的p——图的存在性…………………… (146)
§ 3　具已知半次的对称p——图的存在性………………… (151)
§ 4　具已知半次的无环p——图的存在性………………… (154)
§ 5　具已知半次的竞赛图的存在性………………………… (160)
习题 …………………………………………… (163)

第八章　图的联接性 ………………………………………… (167)

§ 1　断集、断量与断量的基本性质 ………………………… (167)

§ 2　集块 ……………………………………………………… (173)

§ 3　蒙格尔定理在图的联接性上的应用 …………………… (176)

§ 4　断量与边数 ……………………………………………… (181)

§ 5　极小 2 ——联图的结构 ………………………………… (185)

§ 6　3 ——联图的结构 ……………………………………… (193)

习题 ………………………………………………………… (200)

第九章　尤拉圈与哈密尔顿圈 …………………………… (203)

§ 1　尤拉圈 …………………………………………………… (203)

§ 2　哈密尔顿问题 …………………………………………… (204)

§ 3　图成 H——型的充分条件 ……………………………… (206)

§ 4　图成 H——型的必要条件 ……………………………… (217)

§ 5　有向图的哈密尔顿回路 ………………………………… (223)

§ 6　哈密尔顿链与哈密尔顿路 ……………………………… (231)

§ 7　竞赛图上 H——路的求法 ……………………………… (237)

习题 ………………………………………………………… (244)

第十章　并列集（对集） ………………………………… (248)

§ 1　极大并列集 ……………………………………………… (248)

§ 2　极小覆盖 ………………………………………………… (253)

§ 3　两分图上的极大并列集 ………………………………… (255)

§ 4　两分图上顶点的配对 …………………………………… (257)

§ 5　最优安排问题 …………………………………………… (262)

§ 6　完美并列集 ……………………………………………… (266)

习题 ………………………………………………………… (276)

第十一章　稳固集（独立集） …………………………… (280)

§ 1　稳固集与径集 …………………………………………… (280)

§ 2　极大稳固集 ……………………………………………… (281)

§ 3　涂兰定理及其有关问题 ………………………………… (288)

习题 ………………………………………………………… (295)

第十二章　图的着色 ………………………………………………… (298)
（一）　边的着色……………………………… … (298)
§ 1　着色指数 ……………………………………………… (298)
§ 2　图的分类 ……………………………………………… (313)
§ 3　边临界图 ……………………………………………… (318)
（二）　点的着色……………………………… … (319)
§ 1　图的色数 ……………………………………………… (319)
§ 2　临界图 ………………………………………………… (327)
§ 3　着色多项式 …………………………………………… (333)
§ 4　平面图的可——5 着色 ……………………………… (337)
习题 ………………………………………………………… (339)
第十三章　拉姆绥定理与拉姆绥数 …… ……………………… (344)
§ 1　拉姆绥定理 …………………………………………… (344)
§ 2　拉姆绥定理的应用 …………………………………… (349)
§ 3　拉姆绥定理在图论上的应用 ………………………… (352)
§ 4　$N(\underbrace{3,3,3,\cdots,3}_{t};2)$ 的确定……………………… (359)
习题 ……………………………………………………… … (362)
第十四章　超图 ………………………………………… … (364)
§ 1　基本概念 ……………………………………………… (364)
§ 2　超图的链和圈 ………………………………………… (367)
§ 3　超图的代表图 ………………………………………… (371)
§ 4　超图的并列集 ………………………………………… (375)
§ 5　超图的径集 …………………………………………… (376)
§ 6　超图的着色 …………………………………………… (385)
§ 7　超图的集团 …………………………………………… (390)
§ 8　平衡超图 ……………………………………………… (393)
习题 ………………………………………………………… (405)
参考书目 ………………………………………………… (408)
名词索引 ………………………………………………… (408)

前　　言

由于计算机的出现，图论获得了迅速的发展。近十几年来，图论逐渐受到国内学者的重视，从事图论研究的人日益增多，不少院校增设了图论课程。流行的图论书籍目前已有好几种，但对于数学专业至今似乎还没有合适的教材。国外的几本书，有的内容过于艰深，有的内容已经陈旧，有的内容过于简单，均不适于作教材之用。为了适应目前开设图论课程的需要，既照顾到教学的要求，能由浅入深，循序渐进，又照顾到学科的发展，介绍新成果及新动向，以指明今后研究的方向，使学生在学习完毕之后能打下进一步研究文献、开展科学研究工作的基础，作者编写了《图论导引》这本书。称为"导引"，就是把它作为一本入门书的意思。正因此，本书也很适宜作自学教材。作者希望用较通俗的语言写这样的书，使图论这门学科能走出科学院与高等院校，到广大的数学爱好者和实际科技工作者中间去，让这门学科在我们国家应用更广，扎根更深，能更好地得到茁壮发展，较快地赶上或超过世界先进水平。

全书共分十四章，前五章叙述了图的一般概念与性质，其第一章是基本概念，介绍了研究图论时所遇到的最基本的一些名词术语，也初步显示了图论中的论证方法。这是全书的基础。其后各章是分别论述各个专题，介绍了在各专题方面的一些最重要的成果，也有些是最新的成果，还有的则指出了进一步研究的方向。在章节顺序的编排上，也有一定的理论联系。

每章后面均附有难易程度不同的较多的习题，供教学时选用。习题中一部分是巩固性的，一部分是发展性的，为了掌握图论的研究方法，作一定数量的习题是十分必要的，特别是有些图论的研究方向，可以由习题中进一步引伸出去。

图论的研究，时至今日其内容已相当庞大，在一本书内综述其所有方面是不可能的。加之作者学识浅陋，在编写过程中对内容虽经反复推敲与修改，但错误与遗漏之处在所难免，极望读者不吝赐玉提出宝贵意见。又书名叫做导引，能不能起到导引的作用，也望读者提出意见，有机会时，作者一定乐于吸取大家提出的意见，修改补充，让这本书在群众的帮助下得到改进，也让本书的作者有幸在群众的帮助下得到提高，特此预致谢意。

本书的初稿经华中师范学院数学系毛经中同志试教后，提出了很多很宝贵的意见，配备了很多有价值的习题，并积极协助本书的出版，在此表示诚挚的谢意！同时，本书的出版还得到彭守权、代志松以及华中工学院出版社的同志们大力帮助，在此也一并致谢！

作者

一九八二年元月于武汉

第一章 基本概念

§1 图

什么是图？这是首先要加以说明的。客观世界里若干事物（有限或无限）或社会上若干现象，事物与事物之间，现象与现象之间，或事物与现象之间有某种联系。我们要研究这些联系，从中找出规律，这就是所谓**图论**的研究内容。那么，什么是图呢？用点表示事物或现象，若事物之间、现象之间或事物与现象之间有某种联系，便用一条线把它们联系起来。这样便形成一个**图**，表示所要研究的对象及其内在的联系。下面举几个例来说明这个问题。

例1 七桥问题 可以说这是一个最古老的例。哥尼斯堡（Königsberg，现在叫加里宁格勒）有一条河，河中有一个岛，共建七座桥联系被河隔开的四块陆地（见图1.1）。当时这个城里的人希望能做一次散步，从一点出发，经过每座桥一次且仅一次，再回到原出发点。很多人不断探索，但都未能成功，便去请教当时的大数学家尤拉（Euler）。尤拉的回答（1736）是否定的，认为那样的要求是办不到的。为什么？这个问题可以转化为一个图论问题。首先将四块陆地表成四个点，各块陆地之间有桥相联的，便将那两点之间联一条线。这样便画出一个图（如图1.2)代表原来的四块陆地用桥相联的情况。想想为什么尤拉说这是不可能的呢？

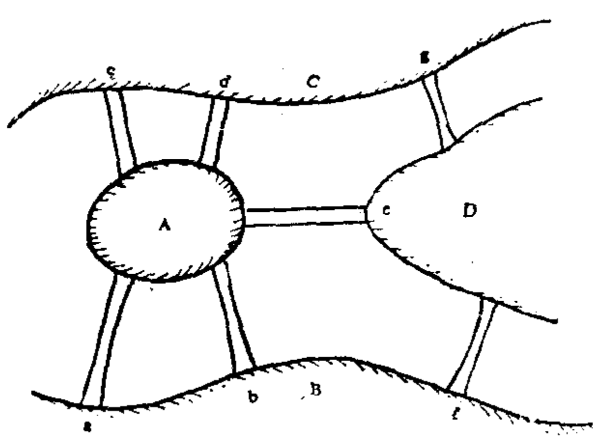


图 1.1

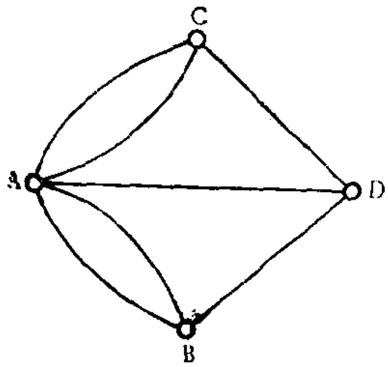


图 1.2

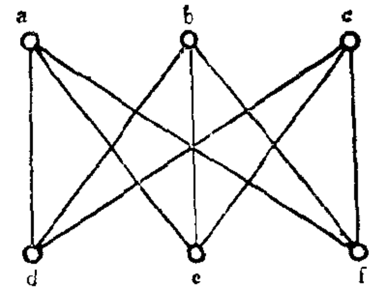


图 1.3

例 2 水电供应问题 有三户人家接受水、电、煤气供应，用管道输送。若将人家与水、电、煤气厂用点表示，管道用线表示，便可画出如图1.3那样的图。

例 3 循环球赛 设有六个球队进行循环比赛，每个队都有胜有负。如何把这场比赛简单地表示出来？用六点表示六个球队，两队比赛、一胜一负，我们便用一条带箭头的线，从胜队引向负队。这也是一个图（叫做**有向图**，见后），这场比赛便全部用这个图表示出来了（这叫做**竞赛图**，见图1.4）。

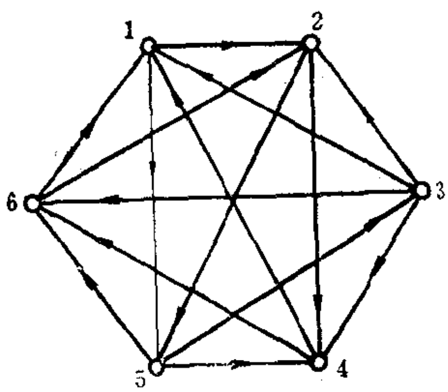
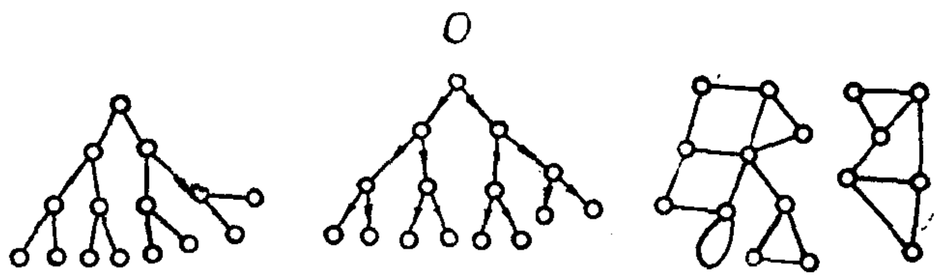


图 1.4

§2 有向图与无向图

一般地讲，在某一情况下，两个事物或两种现象其间的联系是带有倾向性的。画出图来，线上再加上箭头表示这些倾向性，这样的图叫做**有向图**，如上节的图1.4。下面的图1.5(二)也是有向图。图1.2、图1.3和图1.5里的(一)与(三)都是无向的。假使把图1.5(二)的顶O看成一棵树的根，带箭头的线表示这棵树向上生长的枝桠，或者把线上的箭头表示父子关系，对一个家族画出图来便是这样的图。在一个图里，线都不带方向的叫做**无向图**。



(一)　　　　(二)　　　　(三)

图 1.5

§3　图的顶与边(弧)

图里的点叫做图的**顶**，线叫做图的**边**。顶集用X表示，边集用E表示。一个无向图可写成 $G=(X, E)$。设顶集仍用X表示，带箭头的线叫做图的**弧**，弧集用U表示，一个有向图便可写成 $G=(X, U)$。

在一个无向图上，一条自顶x到顶y的边通常写成$[x, y]$，有向图上的弧写成(x, y)。

§4　1——图

当一个有向图里两顶之间按一个方向最多只有一条弧时，这样的有向图平常记作 $G=(X, \Gamma)$，称作**1——图**。其中X是顶集，Γ实际上表示一种函数关系。比如图1.6，两点之间按一个方向只有一条弧。弧$\overrightarrow{x_1x_2}$，$\overrightarrow{x_1x_3}$，$\overrightarrow{x_1x_6}$都是从x_1出发的，可以把x_2、x_3、x_6看作顶x_1的后继顶，记作

$$\Gamma x_1=\{x_2, x_3, x_6\}$$

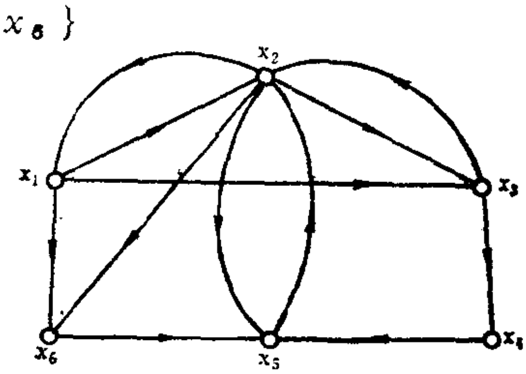


图 1.6

在一个无向图$G=(X, E)$里或有向图$G=(X, U)$里，除所给的顶集X里的顶之外，G不再有其他的顶，除E里或U里的边

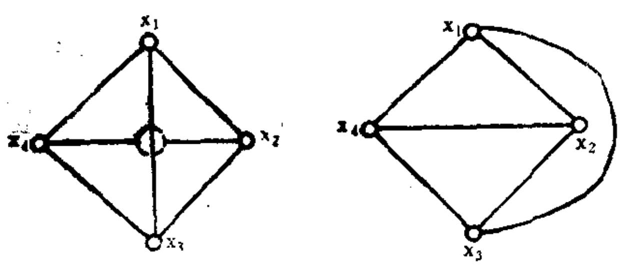
或弧之外也不再有其他的边或弧。当我们把一个图画在平面上时，图里所用的线当然不一定全是直线。也可能出现边与边（或弧与弧）之间再有其他非顶点的交点，我们决不能把这些点也看作是图的顶。一个图，顶点的个数记为$n=|X|$或$|G|$，称为图的**阶**。边数记为$m=|E|$。这里的“$|S|$”表示集合S里所含元素的个数。

§5 平面图与非平面图

一个图$G=(X, E)$本身就是一个想像中的图。为了直观，便于研究，往往把一个图画在平面上（比如一张纸上）。在画的时候往往产生边与边（或弧与弧）之间有非顶点的交点。这种点，有时可以避免，有时不能避免。

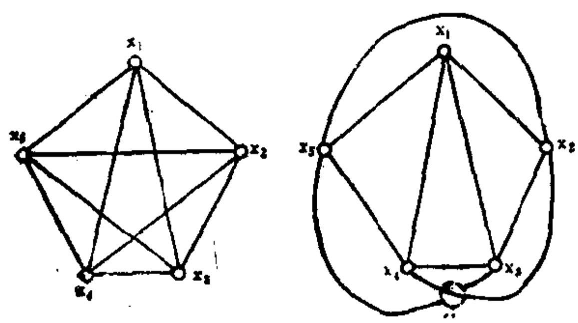
例如完全四点形，照平常的画法似乎边$[x_1, x_3]$与边$[x_2, x_4]$之间必有交点，如图1.7(一)那样。不过，当我们把图画成(二)那样时，那个交点就避免了。

可是有些图，当画在平面上的时候，非顶点的交点无法避免。例如完全五点形（记作K_6。一般，n个顶点、顶点之间一切可能连的边都存在的图称为**完全n点形**，记作K_n），当把它画在平面上的时候，边与边之间非顶点的交点是无法避免的（见图1.8）。又如上面讲的那个水电供应图(图1.3)也是这样，画在平面上的时候，边与边之间的



(一)　　(二)

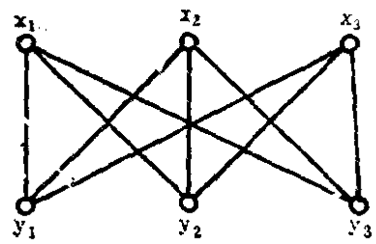
图 1.7



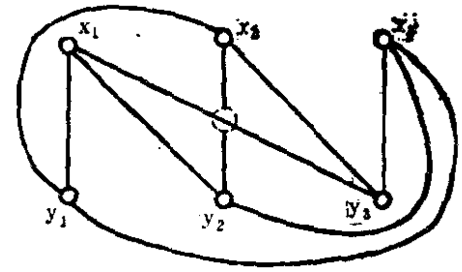
(一)　　(二)

图 1.8

非顶点的交点也是无法避免的（见图1.9）。



（一）



（二）

图 1.9

由此可知，我们想像中的图有些可以画在平面上，使边与边（或弧与弧）之间不再有非顶点的交点；有些这样的交点却无法避免。前一类的图我们说它可以嵌在平面上，称为**平面图**。后者，叫做**非平面图**，也就是说这类图是不能嵌在平面上的。一个图究竟是平面的还是非平面的，是有一定的规律的（见第四章）。

§6 顶点次数

已给图$G=(X, E)$，在一顶x上边的个数记为$d_G(x)$，称为顶x的**次数**。于此，有下

定理1.1 $\sum_{x\in X} d_G(x) = 2|E| = 2m$。 （1）

证 每条边有二顶，计算次数时，每条边在其端点各记一次，故上式成立。 （证毕）

若已给有向图$G=(X, U)$，在任一顶x上的弧有的自x向外发出，有的自其他顶发入顶x。自x发出的弧的个数一般记作$d_G^+(x)$，称为**出次**，自外面发向x的弧数记作$d_G^-(x)$，称为**入次**。但下式是成立的

$$d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$$

在有向图上对于这个$d_G(x)$，（1）式总是成立的。

仿此，自顶x_i到顶x_j的弧的条数记作$d_G^+(x_i, x_j)$。

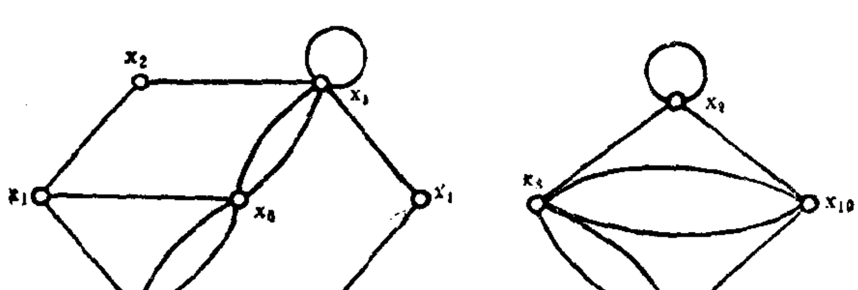
推理1.1a 在一个图$G=(X,E)$里，奇次顶的个数是偶数。

证 自(1)式来看，右端是一偶数，故自左端来看，奇次顶的个数应是偶数。因为只有偶数个奇数的和才能是偶数。

(证毕)

§7 部分图与子图

一个图当已知其顶集$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$时，任取点对$(x_i, x_j)$，可能在二顶$x_i$，$x_j$之间有边相联，或有若干条边联此二顶。也可能顶集$X$分成若干组，每一组中的顶可以相联，即自一点到另外任一点总可有边，一边一边地联下去；但组与组之间的点则不能如此。如图1.10所示，其中(一)是相联的，(二)也是相联的。比如在图1.10的(一)中，自x_1到x_4，由x_1到x_7有边相联，x_7到x_5、x_5到x_4都有边相联，这样便可自x_1一边一边地联到x_4。在图1.10的(二)里每两点之间也可以这样一边一边地联过去。但(一)中任一点到(二)中的任一点便不可能一边一边地联接起来。在图1.10里还出现这样的边，它起于一个顶又回到这个顶。这样的边叫做**环**。又在图1.10里有的两点之间出现不只一条边，我们把这种图叫做**多重图**。如果两点之间最多有p条边，我们就把这样的图叫做**p——重的多重图**。或简称**p——图**。



(一)　　　　(二)

图 1.10

若一个图无环，又$p=1$，则我们称这样的图为**单纯的**。

若在顶x上有环，那么这个顶的次数便多计算两次。

一个图假使其中任意二顶x、y，总可陆续有边自x联到y，这样的图称为是**联接的**。如图1.10的（一）和（二）分别都是联接的。但若把（一）和（二）合成一个图看，则这个图便是**不联接的**。

一个图$G=(X, E)$分成几部分，每部分都是联接的，但部分与部分之间不相联接，每个联接的部分称为原图G的**联接的分子图**。如图1.10中的（一）和（二）都是这个图的联接分子图。

在一个图$G=(X, E)$里任意取出顶集$A\subset X$，及顶集A里出现的所有的边，则顶集A和这些边也构成一个图。其顶和边都含在原图G内，称为原图的**子图**，一般记作G_A。若任取边集E的一个子集$F\subset E$，作图(X, F)，则这个图称为原图的**部分图**。子图是就顶而言的，部分图则以边集为主。子图的部分图或部分图的子图称为原图的**部分子图**。

二顶之间有边相联，则这二顶称为**相邻**。二边如有公共的顶点，则这二边也称相邻。

§8　图的矩阵表示

已给图$G=(X, E)$，可作出所谓图G的相邻矩阵来表达这个图，即取图的n个顶作为行与列，作n阶矩阵(a_{ij})如果在顶x_i与顶x_j之间有r条边，即$m(x_i, x_j)=r$，便在矩阵的(i, j)位置上写上r，即矩阵的元素$a_{ij}=r$。这样的矩阵充分表达了图上顶点相邻的关系，称为图G的**相邻矩阵**。例如图1.10，它的相邻矩阵便是如下示之矩阵A。这是一个对称的非负整矩阵，其元素的值不超过p，主对角线上的元素表示环的个数。如果图无环，主对角线上的元素便全都是0。如果图分成几个不相联接的联接分子图，它的相应的相邻矩阵便分成互不相交的几块。