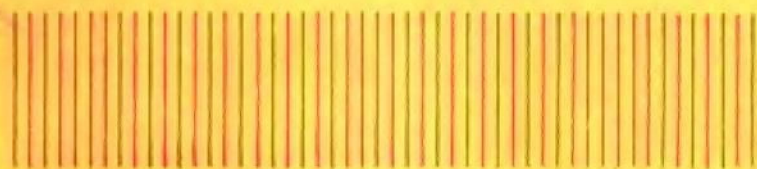


# 并行计算方法



(下 册)

王嘉谟 沈 毅 主编

国防工业出版社

# 并行计算方法

(下 册)

王嘉谟 沈毅 主编

国防工业出版社

(京)新登字106号

## 内 容 简 介

本书较深入、系统地介绍了单指令流多数据流(SIMD)并行机特别是纵横加工向量机的并行算法,并且结合科学和工程技术领域中一些典型问题介绍了如何构造相应的并行算法。对于多处理机(MIMD)并行算法也作了简要介绍。

全书分上、下两册。本书为下册,共分七章,内容包括:插值和样条函数;非线性方程组;常微分方程的初、边值问题;偏微分方程;蒙特卡洛方法及多处理机并行算法。

本书可供从事并行算法研究及使用并行机工作的广大工程技术人员参考,亦可作为大专院校计算数学专业高年级学生、研究生的教学参考书。

### 并行计算方法(下册)

Bing Xing Ji Suan Fang Fa

王嘉谟 沈毅 主编

责任编辑 陈洁

\*

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码 100044)

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

\*

850×1168 1/32 印张 11 281千字

1992年3月第一版 1992年3月北京第一次印刷 印数:0,001—1,000册

---

ISBN 7-118-00857-5/TP·112 定价:10.10元

## 致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分，又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展，加强社会主义物质文明和精神文明建设，培养优秀科技人才，确保国防科技优秀图书的出版，国防科工委于1988年初决定每年拨出专款，设立国防科技图书出版基金，成立评审委员会，扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是：

1. 学术水平高，内容有创见，在学科上居领先地位的基础科学理论图书；在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖，内容明确、具体、有突出创见，对国防科技发展具有较大推动作用的专著；密切结合科学技术现代化和国防现代化需要的高科技内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值，密切结合科学技术现代化和国防现代化需要的新技术、新工艺内容的科技图书。

4. 填补目前我国科学技术领域空白的薄弱学科的科技图书。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展评审工作，职责是：负责掌握出版基金的使用方向，评审受理的图书选题，决定资助的图书选题和资助金额，以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书，由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承担着记载和弘扬这些成就，积累和传播科技知识的使命。在改革

#### IV

开放的新形势下，国防科工委率先设立出版基金，扶持出版科技图书，这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物，是对出版工作的一项改革。因而，评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进，这样，才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授，以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来，为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗！

国防科技图书出版基金  
评审委员会

# 国防科技图书出版基金

## 第一届评审委员会组成人员

**主任委员：**邓佑生

**副主任委员：**金朱德 太史瑞

**委员：**（按姓氏笔划排列）

尤子平 朵英贤 刘琯德

何庆芝 何国伟 张汝果

范学虹 金 兰 柯有安

侯 迁 高景德 莫梧生

曾 铎

**秘书长：**刘琯德

## 序 言

近十几年来，计算机趋于向微型、巨型和网络化三个方向发展。巨型机方面，美、日、英、苏和我国相继研制成各种型号的亿次级并行机。到目前为止，世界上投入运行的亿次级并行机已超过130台。高度并行的、超高速的新一代并行机研制工作，正在世界各国蓬勃开展。科学家们预测，到1992年将出现第五代计算机——人工智能计算机。

并行机具有精度高、速度快、容量大、输入输出吞吐率高，系统软件功能强和完善等特点。我国自行研制的银河（YH）机就是这种具有超高性能的并行机之一，它专门用来计算那些在一般计算机上不能计算的大型和超大型科学计算和工程设计问题。该机自国家鉴定以来，运行情况良好，在国防和国民经济建设中已初步发挥了效益。

为了发挥现有并行机的并行处理能力和探讨新一代并行机的系统结构，需要大力开展并行处理和并行算法研究。充分发掘体系结构和计算问题本身的内在并行性，已成为当今世界上一个崭新的研究课题。由此可见，开展并行处理和并行算法研究的深远意义。

为了推动我国并行处理和并行算法研究工作的开展，推广并行机的应用，由国防科学技术大学、核工业部、航天工业部、复旦大学和国防科工委的有关单位联合成立了并行处理和并行算法丛书编辑委员会，拟组织出版一套丛书。决定由国防工业出版社出版《并行计算方法》上、下册。该套丛书将于1986年起陆续出版发行。

丛书编委会的工作受到国防科工委有关方面的高度重视，编委会的成员单位给予了大力支持和帮助，因而使本书能早日与

## Ⅶ

读者见面。在此，我代表丛书编委会表示衷心的感谢。同时，也欢迎国内各大专院校和研究所对我们的工作给予帮助和指导，并欢迎来稿，以扩充和丰富该丛书的内容，共同推动我国并行机事业的发展。

该书可作为大学计算数学专业和计算机专业的教材或参考书，也可作为并行机使用者的参考书。由于我们经验不足，错误和缺点在所难免，欢迎读者批评指正。

慈云桂

1985年2月4日于长沙



## 编者的话

并行算法是随着并行机的出现和发展在计算数学领域新发展起来的一门新学科。国内外的实践证明，它在提高并行机的使用效率方面起着重要的作用。

当今，并行机正在向高度并行和小型化方向发展，它为并行机的推广应用开创了广阔的前景。国际科技界高度重视并行算法研究，它反映了对并行算法需要的紧迫性。

本书是一本综合性的并行算法著作，重点介绍了寄存器-寄存器型向量机的并行算法。在内容上尽可能注意到系统性、全面性、实用性和理论上的严谨性，并力图反映这门学科的最新成果和发展趋势。为此，该书也介绍了异步并行算法的有关知识。

全书分上、下两册，本书为下册，共分七章。第八章插值与样条函数的并行计算，杨声振编写。第九章非线性方程组并行求解法，沈毅、蔡放、熊跃山编写。第十章常微分方程初值问题的并行计算，第十一章常微分方程边值问题的并行计算，费景高编写。第十二章偏微分方程的并行计算，马寅国、王嘉谟编写。第十三章蒙特-卡罗方法及其并行计算，陈四清、王嘉谟编写。第十四章多处理机上的并行算法，李晓梅，吴功广编写。

由于并行算法涉及的面很广，且编者水平有限，所以本书在内容上难免有错误和不当之处，欢迎读者批评指正。

本书在编写过程中，得到国防科技大学慈云桂教授，陈火旺教授的直接指导和帮助；为本书的出版和审稿，吴功广副教授给予很多帮助；袁仙春、廖振民、郑国铭同志为第十二章的编写提供了有益的资料。编者谨在此致以诚挚的谢意。

## 目 录

第八章 插值与样条函数的并行计算	1
8.1 分段插值的并行计算	1
8.1.1 分段三次拉格朗日插值公式的向量表示	2
8.1.2 分段三次拉格朗日插值公式的并行计算	3
8.2 分段三次埃尔米特插值的并行计算	7
8.2.1 分段三次埃尔米特插值公式	7
8.2.2 分段三次埃尔米特插值公式的向量表示	8
8.2.3 分段三次埃尔米特插值公式的并行计算	9
8.3 三次插值样条的并行计算	11
8.3.1 三次样条函数的定义和插值问题的提法	11
8.3.2 三次样条函数的矩阵表示式	11
8.3.3 三次插值样条的并行计算	17
8.4 双三次样条函数的并行计算	20
8.4.1 双三次样条函数的定义和插值问题的提法	20
8.4.2 双三次样条函数的矩阵表示形式	21
8.4.3 双三次样条函数的并行计算	24
8.5 累加弦长三次参数样条曲线的并行计算	27
8.5.1 累加弦长三次参数样条曲线的矩阵表示	27
8.5.2 累加弦长三次参数样条插值公式的并行计算	30
8.6 样条磨光方法的并行计算	32
8.6.1 样条磨光方法	32
8.6.2 盈亏修正的样条磨光方法的并行计算	33
第九章 非线性方程组并行求解法	39
9.1 牛顿迭代法	39
9.2 部分修正方法	41
9.2.1 部分修正算法	41
9.2.2 部分修正方法并行计算的复杂性	47
9.3 并行牛顿——SOR 迭代方法	50
9.3.1 线代数问题的多分裂并行算法	51
9.3.2 非线性问题的并行牛顿——SOR 方法	52

9.4 一类特殊非线性方程组的并行算法	56
9.4.1 特殊方程的串行算法	57
9.4.2 特殊方程的并行算法	59
<b>第十章 常微分方程初值问题的并行数值计算方法</b>	<b>67</b>
10.1 传统方法的向量化处理	68
10.2 预估-校正并行计算格式	72
10.3 应用理查森外插的梯形公式的并行计算	84
10.3.1 梯形公式的并行计算方法	84
10.3.2 理查森外插过程	87
10.3.3 林德伯格内插法求中间点上的精确值	88
10.3.4 算法	91
10.3.5 算法的稳定性	95
10.4 线性多步公式的平均算法	96
10.5 插值分解算法	114
10.5.1 插值分解方法的一些理论结果	115
10.5.2 插值分解异步并行迭代算法	129
10.5.3 插值分解异步并行向前算法	139
10.6 块方法	142
10.6.1 块单步方法	143
10.6.2 并行块预估校正方法	149
10.6.3 并行多块方法	156
10.7 多重内插法	163
<b>第十一章 常微分方程边值问题的并行数值计算方法</b>	<b>164</b>
11.1 一般打靶法的并行计算	164
11.1.1 线性问题的一般打靶法	165
11.1.2 非线性问题的打靶法	168
11.2 并行打靶法	171
11.2.1 线性问题的并行打靶法	172
11.2.2 非线性问题的并行打靶法	174
11.3 最优控制问题的并行计算	175
11.3.1 最优控制问题	175
11.3.2 最优控制问题的并行打靶法	177
11.3.3 算例	179
11.4 自动变阶变步长的有限差分方法	182
11.4.1 误差的延期校正方法	186
11.4.2 线性方程组的直接求解方法	192

11.4.3	自适应变阶变步长方法	193
11.5	纽面洛夫方法	195
11.6	求解两点边值问题的高阶差分方法	201
11.6.1	四阶公式	203
11.6.2	六阶公式	205
11.6.3	八阶公式	207
11.6.4	自适应格点延期校正并行迭代算法	209
<b>第十二章 偏微分方程的并行计算</b>		<b>215</b>
12.1	椭圆型方程差分格式的并行计算	215
12.1.1	简单迭代及其超松弛方法的并行计算	217
12.1.2	逐次超松弛迭代方法的并行计算	218
12.1.3	线迭代及其超松弛方法的并行计算	221
12.1.4	交替方向隐式迭代法的并行计算	223
12.1.5	预条件迭代方法的并行计算	225
12.2	椭圆型方程有限元方法的并行计算	226
12.2.1	有限元分块并行算法的基本思想	227
12.2.2	构造不相关的单元子集合	228
12.2.3	并行构造单元的线性插值函数	229
12.2.4	单元刚度阵和向量的并行计算	230
12.2.5	总体装配总刚度阵和总向量的并行计算	231
12.3	抛物型方程差分格式的并行计算	232
12.3.1	显式格式的并行计算	234
12.3.2	隐式格式的并行计算	235
12.3.3	六点格式的并行计算	235
12.3.4	交替群显式格式的并行计算	236
12.4	输运方程差分格式的并行计算	239
12.4.1	拉克斯格式的并行计算	239
12.4.2	偏心格式的并行计算	239
12.4.3	拉克斯-文卓夫格式的并行计算	240
12.4.4	中子输运方程的并行计算	241
12.5	可压缩流体动力学欧拉方法的并行计算	246
12.5.1	可压缩流体动力学方程	246
12.5.2	差分的并行计算	248
12.5.3	输运的并行计算	251
12.5.4	并行计算的效率	256
12.6	理想气体超音速轴对称钝体绕流的并行计算	257
12.6.1	亚跨音速区的流动方程	257

## XIV

12.6.2	内点的并行计算	260
12.6.3	激波点的并行计算	262
12.6.4	物面点的并行计算	265
12.6.5	并行计算的效率	267
<b>第十三章 蒙特卡罗方法及其并行计算</b>		<b>268</b>
13.1	蒙特卡罗方法概述	268
13.1.1	基本内容	268
13.1.2	蒙特卡罗方法的特点	269
13.1.3	随机变量抽样	271
13.2	乘同余法及并行计算	272
13.2.1	乘同余法	272
13.2.2	乘同余法的并行计算	275
13.3	离散型随机变量抽样	278
13.3.1	抽样方法的一般描述	278
13.3.2	抽样方法的并行实现	279
13.3.3	快速并行抽样	282
13.4	连续型随机变量抽样	283
13.4.1	直接抽样方法	283
13.4.2	舍选抽样方法	284
13.4.3	复合抽样方法	292
13.4.4	近似抽样方法	294
13.5	随机向量抽样	297
13.6	马尔科夫链模拟	299
13.6.1	基本概念	300
13.6.2	马尔科夫链的模拟	301
13.6.3	模拟的并行实现	301
13.7	泊松方程第一边值问题 MC 解法	307
13.7.1	MC 解法的一般描述	307
13.7.2	MC 解法的并行实现	311
<b>第十四章 多处理机并行算法</b>		<b>315</b>
14.1	前言	315
14.2	基本概念	316
14.2.1	多处理机并行算法定义	316
14.2.2	并行算法所需时间	317
14.3	并行算法的基本概念	318
14.3.1	同步并行算法	318

14.3.2 加速因子和罚因子 .....	319
14.3.3 异步并行算法 .....	321
14.4 并行算法的正确性与效率.....	322
14.4.1 并行算法正确性 .....	322
14.4.2 并行算法的效率 .....	326
14.5 创建最优的进程数.....	329
参考文献 .....	333

## 第八章 插值与样条函数的并行计算

在数值计算或工程设计中，常会遇到插值问题，即通过曲线  $Y = f(x)$  上一组离散点  $(x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ )，求作一条简单的代数曲线  $Y = p(x)$  作为曲线  $Y = f(x)$  的近似。由于高次插值的计算过程不稳定，实用时通常先将插值区间划分为若干段，然后再在每个分段上采用低次插值（即所谓分段插值法）。本章首先讨论分段插值的并行计算。

不少实际问题，不但要求插值函数  $p(x)$  在节点处的值与  $f(x)$  在相应节点的值相等，而且要求  $p(x)$ 、 $f(x)$  在节点处的一阶导数值也相等。本章也将介绍分段三次埃尔米特(Hermit)插值的并行计算。

分段插值法的不足之处是：虽然插值曲线在各个分段是衔接的，但在联结点处不能保证曲线的光滑性。样条插值，对比于其它分段插值的主要优点是：它保证了直到二阶导数的连续性，因此，光滑度较高。样条函数是现代函数逼近的一个十分活跃的分支，是计算方法的重要基础，它在飞机、船舶、汽车等外形设计中都有重要应用。本章将简略介绍样条函数的一些基本方法的并行算法。

### 8.1 分段插值的并行计算

高次多项式插值不稳定现象是由于局部误差在全实轴上传播所引起的，采用分段低次多项式插值可以限制局部误差的传播范围，从而保证计算的稳定性。本节以分段三次拉格朗日插值为例来分析分段插值的并行计算。

### 8.1.1 分段三次拉格朗日插值公式的向量表示

假定在区间  $[a, b]$  上给定节点  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , 它们所对应的函数值分别为  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . 其中节点的间距  $h = \frac{b-a}{n}$ . 过四个点  $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})$  作三次插值多项式:

$$p(x) = c_{i-1}y_{i-1} + c_i y_i + c_{i+1}y_{i+1} + c_{i+2}y_{i+2} \quad (8-1)$$

其中

$$c_{i-1} = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})(x_{i-1}-x_{i+2})}$$

$$c_i = -\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})}$$

$$c_{i+1} = \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})}$$

$$c_{i+2} = \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_{i-1})(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}$$

令

$$x = x_i + ht$$

则 
$$t = \frac{1}{h}(x - x_i) = \frac{1}{h}(x - a) - i \quad (8-2)$$

节点下标可按下列方式选取:

先计算  $\frac{x-a}{h}$  的整数部分, 即  $i^* = \left[ \frac{x-a}{h} \right]$ , 然后取

$$i = \begin{cases} 1, & i^* \leq 1 \\ i^*, & 1 < i^* < n-2 \\ n-2, & i^* \geq n-2 \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} p(x) = & -\frac{1}{6} t(t-1)(t-2)y_{i-1} + \frac{1}{2}(t+1) \\ & \times (t-1)(t-2)y_i - \frac{1}{2} t(t+1)(t-2)y_{i+1} \\ & + \frac{1}{6} t(t+1)(t-1)y_{i+2} \end{aligned} \quad (8-3)$$



$p(x)$ 的系数可表示成

$$[c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, c_{i+2}] = [1, t, t^2, t^3]$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad (8-4)$$

故

$$p(x) = [c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, c_{i+2}] \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \end{pmatrix} \quad (8-5)$$

### 8.1.2 分段三次拉格朗日插值公式的并行计算

#### 一、一个自变量每次插出一个函数值

设节点等距, 并令  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + h$ ,  $x_2 = a + 2h$ ,  $\dots$ ,  $x_n = a + nh = b$ , 其中  $h = \frac{b-a}{n}$ , 对应的函数值分别为  $y_0, y_1, \dots, y_n$ .



图 8-1

按图 8-1 的划分, 在区间  $[a, b]$  上插值, 最多需计算  $n-2$  个不同的一元三次插值多项式。这组多项式可以写成下列向量形式:

$$P = At^3 + Bt^2 + Ct + D$$

其中  $t$  的表示式同式 (8-2)。由式 (8-4)、(8-5) 可知