混凝土现代技术丛书

混 凝 土 力 学

江见鲸 冯乃谦 编

中 国 铁 道 出 版 社

1 9 9 1 年 · 北京

混凝土现代技术丛书

混 凝 土 力 学

江见鲸　冯乃谦　编

中 国 铁 道 出 版 社

1 9 9 1 年·北京

内 容 提 要

本书可概括地分为混凝土流变理论和混凝土断裂力学理论两部分。主要介绍了混凝土强度、流变、变形理论，混凝土性能的测试，混凝土断裂韧度理论，利用断裂力学对混凝土结构裂缝的发展与扩展进行分析测试。本书对工程实践中有关混凝土技术有重要的指导作用。

本书还可作为大专院校研究生教材。

读者对象：从事混凝土教学、科研、设计、施工、生产的工程技术人员，大专院校有关专业师生。

混凝土现代技术丛书
混 凝 土 力 学
*
中国铁道出版社出版、发行
（北京市东单三条14号）
责任编辑 徐建平 张苍松 封面设计 刘景山
各地新华书店经售
北京顺义燕华营印刷厂印

开本：787×1092mm 1/32 印张：9.375 字数：209千
1991年 2月 第1版 第1次印刷
印数：1—3,000册

ISBN7-113-00960-3/TU·212 定价：4.60元

序

自从波特兰水泥问世以来，混凝土与钢筋混凝土很快就成为主要的建筑材料，广泛地应用于各种建筑工程中。第二次世界大战以后，水泥混凝土的用量迅速增加。目前世界混凝土年产量已达60亿吨左右，不仅是用量最多的建筑材料，而且也是当代最大量的人造材料。对于这样的大宗材料进行有效的研究开发工作，致力于增加品种、改进工艺、提高性能、降低成本、节约能耗，不断扩大其应用范围，充分发挥其社会效益与经济效益，已成为混凝土科技工作者的光荣职责。

我们正处于新的技术革命的伟大时代，各项技术都在互相渗透、互相促进，形成日新月异之势。混凝土技术也不例外，新技术新成就不断涌现。本丛书为了加速混凝土科学技术水平的提高，使混凝土这种主要材料在我国经济建设中发挥更大作用，对于实用意义较大的混凝土现代技术，分期分批出版专册（著）。近期内将陆续出版的有：

1. 新品种与特种混凝土方面

《膨胀混凝土》，《流态混凝土》，《三向应力混凝土》，《沸石混凝土》，《粉煤灰混凝土》，《轻骨料混凝土》，《聚合物浸渍混凝土》，《高强度混凝土》，《防腐蚀混凝土》，《碾压混凝土》，《大体积混凝土》等。

2. 新工艺、新设备方面

《混凝土养护节能技术》，《混凝土真空脱水密实新工艺》，《混凝土修补新技术》，《混凝土中钢筋腐蚀与防护》，

《混凝土冬季施工》，《混凝土快速硬化》等。

3．性能与测试技术方面

《混凝土力学性能测定》，《混凝土质量非破损检验技术》等。

4．应用理论方面

《混凝土材料科学》，《数理统计在混凝土试验中的应用》，《混凝土的徐变》，《混凝土的收缩》，《混凝土的耐久性》，《混凝土力学》等。

本丛书除了传播新知识以外，还将发挥宣传教育的作用。解放以来，我国混凝土科学技术进步很快，混凝土工程数量庞大，混凝土构件与各种水泥制品品种繁多，满足了基本建设与国民经济发展的需要，成绩是巨大的。但也不能否认，混凝土新技术的开发和普及工作还不能令人满意。至今我国高中标号混凝土用得不多，外加剂使用得还很少，商品混凝土还刚刚起步，而混凝土工程质量问题，尤其是耐久性问题，还亟待唤起重视。总的来说，当前我国混凝土技术水平还落后于发达的工业国家，因此，必须加速信息的传播，加强宣传教育工作，尽快赶上国际先进水平，保证我国高速度的建设事业对混凝土的需要。

随着科学技术的进步与我国在混凝土科研与生产经验的积累，本丛书的选题范围将继续扩大；希望同行专家与广大读者，给予支持，共同为加速混凝土新技术的发展贡献力量。

吴中伟　姚明初

一九八八年元月

《混凝土现代技术丛书》

编委会名单

顾　　问：黄蕴元

主任委员：吴中伟

副主任委员：姚明初

编委会委员（以姓氏笔划为序）：

冯乃谦　吴中伟　沈旦申　洪定海

姚明初　龚洛书　蒋家奋　甄永严

蔡正咏

前　言

混凝土是一种多相复合材料，它的原料有水泥、水、集料等。这些材料的形状、尺寸和密度存在着很大的差异，并且，混凝土材料的形成要经过搅拌、输送、灌筑、养护硬化等过程，其形态由流态变为固态，因而要用解析方法来描述混凝土在各个阶段的性态是十分困难的。长期以来，混凝土工学是作为一门实用工程学而发展起来的。

最近几十年来，现代力学，特别是流变力学与断裂力学的发展很快，并且随着高速电子计算机的发展而日益广泛地进入各个领域。这也为混凝土工学的发展提供了有力的解析手段。实验研究的同时，理论分析和数值分析方法也在混凝土技术中迅速发展起来。为此，近年来清华大学土木工程系给研究生开设了混凝土力学课程，本书就是根据该课程的讲义补充、修订成的。

本书共有十二章，按内容可以分为三部分：

第一部分包括第一、二章，主要介绍与混凝土力学有关的部分基础理论知识和混凝土强度理论。

第二部分包括第三章至第七章，主要内容是混凝土实用流变学。本部分内容叙述了新拌混凝土各种流变性能的测定，并用流变学理论分析新拌混凝土的流动与变形问题，从而对混凝土施工过程中的工作度、稠度等性能作了合理的说明。

第三部分为混凝土断裂力学，包括第八章至第十二章。本部分对线性、非线性断裂力学的基本概念作了介绍，侧重

目　　录

第一章 基础知识

1.1 张 量

1.1.1 张量的基本概念

张量是表征一些物理量或几何量的有效数学工具，但是它的严格定义比较难懂。为此我们先从向量的数学定义说起。在这里我们只限于介绍有关笛卡尔张量的基本概念。

向量是有大小、有方向的量。在空间直角坐标系中，它可以用坐标轴的3个分量来表示。我们选择的坐标系 x_i（$i=1$，2，3），坐标轴的单位向量为e_i（$i=1$，2，3）。有一向量u，在坐标轴方向的分量为u_i，向量u可表示为

$$u=u_ie_i$$

然后转动坐标轴得新坐标系x'_i（$i=1$，2，3），其相应的坐标轴向量为e_i'，如图1—8。向量u在x_i'坐标系中的3个分量为u_i'，于是向量u又可表示为

$$u=u_i'e_i' \qquad (a)$$

坐标系虽然不同，但表示的是同一向量u，所以应有

$$u=u_ie_i=u_i'e_i' \qquad (b)$$

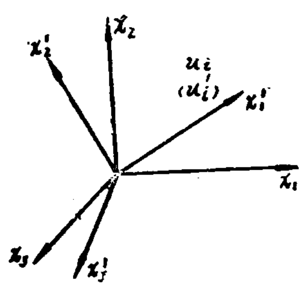

图 1—1

我们再看一下e_i与e_i'之间有什么关系。首先把e_i'看作是在坐标系x_i中的一个矢量，设e_1'与x_1、x_2、x_3的方向余弦分别为l_{11}、l_{12}、l_{13}，由于e_1'为单位向量，因而其在x_i坐标轴

方向的分量即为l_{11}、l_{12}、l_{13}，或者说

$$e_1'=l_{11}e_1+l_{12}e_2+l_{13}e_3$$
$$=l_{1i}e_i$$

同理，e_2'在x_i中的方向余弦为l_{2i}（$i=1, 2, 3$）；

e_3'在x_i中的方向余弦为l_{3i}（$i=1, 2, 3$）

并且有

$$e_2'=l_{2i}e_i$$
$$e_3'=l_{3i}e_i$$

3个式子可用一个简洁式子表示，即

$$e_j'=l_{ji}e_i \tag{c}$$

l_{ji}有9个元素，写成矩阵形式为

$$[T]=\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

称为坐标转换矩阵。

将式1.1代入b式可知

$$u_j=u_i'\cdot l_{ij} \tag{1.2a}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} \tag{1.2b}$$

这样我们可以给出向量的解析定义为：向量由 3 个分量所确定，在坐标转动时，其分量之间的关系服从坐标转轴公式 1.2。这一定义当然不如通常给出的定义直观明了，但对于引出张量的定义很有用。向量就是 1 阶张量。下面推广到2阶。

设在坐标系x_i中有一量具有9个分量a_{ij}（这可以想象为3个互相垂直面上各有1个向量，每一向量有3个分量），当坐标轴转动后为新坐标系x_i'，该量的9个分量变为a_{ij}'。若这些分量满足下列转换关系

$$a_{ij}=a_{mn}'l_{mi}l_{nj}$$

则这9个分量构成一个2阶张量。式中l_{mi}，l_{nj}是x_i'的坐标轴在x_i坐标系中的方向余弦。

当然，我们还可以推广到3阶（有27个分量）或更高阶的张量。但在力学分析中常用的是1阶（向量）和2阶张量。下一节我们将要说明，物体内一点的应力状态，可用2阶张量来表示。

张量a_{ij}，若其分量满足$a_{ji}=a_{ij}$，则称该张量为对称向量。下一节将会看到，应力张量、应变张量都是对称张量。

张量a_{ij}，若其分量满足$a_{ij}=-a_{ji}$，则称为反对称张量。显然，在反对称2阶张量中必有$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$。

一般张量a_{ij}为非对称张量，若有另一张量a_{ij}'，其分量满足$a_{ji}'=a_{ij}$，也即a_{ij}与a_{ij}'所对应的矩阵互为转置，则这张量a_{ij}'称为张量a_{ij}的共轭张量。

1.1.2 张量的基本运算

（1）张量相等

设张量a_{ij}与张量b_{ij}，其对应的分量一一相等。

$$a_{ij}=b_{ij} \tag{1.3}$$

则称两张量相等。

（2）张量的加法

张量a_{ij}与张量b_{ij}，将其相应的分量相加或相减，可得到一个新的张量，称为两张量的和或差。

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij} \tag{1.4}$$

（3）张量的数乘

张量a_{ij}用一标量α乘其各分量，得同阶张量b_{ij}

$$b_{ij}=\alpha a_{ij} \tag{1.5}$$

（4）矢量的并乘，张量的升阶

矢量a与b的并乘用ab表示，它定义为

$$ab=a_ib_j \tag{1.6}$$

用矩阵的形式表示则为

$$ab=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\left[b_1b_2b_3\right]=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

矢量并乘后得一个 2 阶张量。它和矢量的点积和矢积都不同，点积结果为一个数，矢积结果为一向量。

矢量是一阶张量，并乘后升阶为 2 阶张量（1+1=2)。这种运算可以推广到 2 阶和高阶张量，张量的并乘也称为张量的外积。设有m阶和 n 阶两个张量并乘，结果得一新的张量，其阶数等于原两张量阶数之和，即等于 $m+n$。例如：a_{ij}、c_{ij}为 2 阶张量，b_i为一阶张量（矢量），则

$$d_{ijk}=a_{ij}b_k$$

为3阶张量，

$$d_{ijkl}=a_{ij}c_{kl}$$

为4阶张量。这种过程也可称为张量的升阶。

（5）张量的缩并和张量的点积

如果上述张量并乘运算式中，取任意两个标号重复，则可以得到（$m+n-2$）阶新张量，m、n为原来两个张量的阶数。例如a_i、b_i为 1 阶张量（矢量），则

$$c_i=a_ib_i$$

的阶数为$1+1-2=0$，即c为 0 阶张量，也就是一个标量。

这和两矢量的点积运算一样。这一点可推广到高阶张量。如a_{ij}、b_{ij}为2阶张量，则

$$c_{ij}=a_{ik}b_{kj}$$

的阶数为2＋2－2＝2，即c_{ij}为 2 阶张量。这种过程又称张量的降价。与矢量点积相类似，我们定义2阶张量的点积为

$$c_{ij}=a_{ik}b_{kj}$$

两个2阶张量的点积仍为2阶张量。

对2阶张量，还有一个2阶张量的数量积，它用双点号表示，即

$$c=a:b=a_{ij}b_{ij}$$

2 阶 张量的双点积为一个标量，故又称为数量积。例如线弹性的应变比能可以用应力张量 σ_{ij} 和应变张量 ε_{ij} 的双点积表示，即

$$W=\frac{1}{2}\sigma:\varepsilon=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$

张量分析在推导公式中书写方便，表达简洁，因而在力学中的应用日益广泛。

1.2 应力分析

1.2.1 一点应力状态的表示法

一般情况下，截面上各点的应力不一定相同。此外，即使对物体内同一点，其截面方向不同时，其应力的大小和方向也会不同。为了分析这一点的应力状态，即分析同一点不同方向截面上的应力大小和方向，我们在物体内部取出包括该点在内的一个微小的正六面体，其各面与相应的坐标面相平行，平行于坐标轴的各棱边之长分别为Δx、Δy 和 Δz，见图1—2。将每一面上的应力分解为1个正应力和 2 个 剪 应

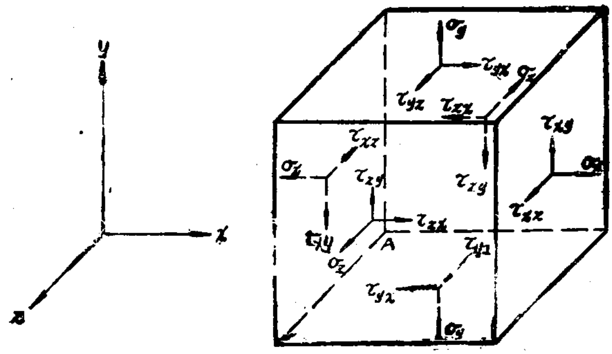

图 1—2

力，每一个应力有两个下标，第一个下标表示作用在哪一个面，后一个下标表示应力平行于哪一个坐标轴，例如 σ_{xy}、σ_{xx}。我们称截面外法线方向与某一坐标轴方向一致的面为正面，正面上的应力分量以沿坐标轴正方向的为正，反之为负。相反，若某一截面的外法线方向与坐标轴方向相反，称为负面，负面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向的为负。图1—2中所示的应力分量全是正方向的。

六面体的两两对面，即平行于同一坐标面的两个面在棱长趋于零时，变为同一截面，但外法线方向相反，因而这两面上的应力或应力分量必然大小相等，方向相反。故此一点的应力状态可用 3 个相邻面上的9个应力分量来表示。下面将表明这9个应力分量附合张量的定义，即一点的应力状态可用一个 2 阶张量表示。

这9个应力分量中6个剪应力分量有互等关系。例如，以六面体前后两面中心的连线为轴，列出力矩平衡方程，得

$$2\cdot\sigma_{23}\cdot\varDelta x_3\cdot\varDelta x_1\cdot\frac{\varDelta x_2}{2}$$

$$-2\sigma_{32}\cdot\Delta x_2\Delta x_1\cdot\frac{\Delta x_3}{2}=0$$

于是

$$\sigma_{23}=\sigma_{32}$$

同样可以求得

$$\sigma_{21}=\sigma_{12}\qquad\sigma_{31}=\sigma_{13}$$

这就证明了剪应力互等性，所以应力张量是一个对称张量。由此可见，如果已知某一点的六个应力分量，这点的应力状态就可确定。用张量符号表示一点应力状态

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}$$

其中两下标同号者均为正应力，下标不同号者为剪应力。在工程应用中经常用σ表示正应力，τ表示剪应力，并取XYZ为坐标轴，因此一点的应力状态又常表示为

$$[\sigma_{ij}]=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{pmatrix}$$

由于应力张量是对称张量，只有6个分量是独立的，因之又常将一点的应力状态用一列矩阵来表示

$$[\sigma]=\{\sigma_x\ \ \sigma_y\ \ \sigma_z\ \ \tau_{xy}\ \ \tau_{yz}\ \ \tau_{zx}\}^T$$

或

$$[\sigma]=\{\sigma_{11}\ \ \sigma_{22}\ \ \sigma_{33}\ \ \tau_{12}\ \ \tau_{23}\ \ \tau_{31}\}^T$$

这种表示法在计算力学和编制计算机程序中应用很广。

1.2.2 任意斜面上的应力

若经过某一点的应力分量为已知，则可以求出经过该点