# 热传导

高等学校教学参考书——传热学丛书

屠传经　沈珞婵　吴子静　编

高等教育出版社

高等学校教学参考书——传热学丛书

# 热传导

屠传经　沈珞婵　吴子静　编

高等教育出版社

## 内 容 简 介

本书是与传热学教材配套的教学参考丛书之一。

热传导(又称导热)是三种基本传热方式之一。书中分章详细介绍了导热的物性参数、稳态导热、非稳态导热及导热问题的数值解法。为便于读者扩大知识面,每章末列有大量参考文献。本书内容比传热学教材中的导热部分更广泛、更深入,并着重于物理概念的阐述及应用基本原理求解实际导热问题。

本书可作为热工类和机械类动力机械各专业及有关专业的大学生、教师的教学参考书,也可供高等教育自学及有关工程技术人员参考。

(京)112号

高等学校教学参考书——传热学丛书

热 传 导

屠传经 沈珞婵 吴子静 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.625 字数 230 000

1992 年 8 月第1版 1992 年 8 月第 1 次印刷

印数0001— 1 724

ISBN7-04-003047-0/TH·238

定价 6.15 元

# 序

传热学是一门重要的工程技术基础理论学科，与工程技术的各个部门有十分密切的关系。在动力工程及工程热物理各专业的教学计划中，传热学历来是一门重要的技术基础课程。本书是大学传热学课程的教学参考书，介绍三种基本传热方式之一——热传导的有关内容。

本书分章讨论了稳态导热、非稳态导热及导热问题的数值解法。内容比传热学教材中的导热部分更广泛、更深入，并着重于物理概念的阐述及应用基本原理求解实际导热问题。作为本科生课外自学的教学参考书，其数学要求不超过本科生的水平。本书与传热学教材配合使用，叙述面更宽一些，内容略有重叠，但不重复。本书与研究生导热教材的内容基本上没有重复，但略有交错。近年来，计算机技术在导热领域内得到广泛应用，因此本书适当地介绍了计算机求解导热问题的程序。全书文字叙述力求明白，便于自学。

本书第一～四章由屠传经编写，第五、六章由吴子静编写，第七～十章由沈珞婵编写。

本书由清华大学热工教研室任泽霈教授审稿，在此谨表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中缺点和错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

1989年7月

# 目　　录

# 第一章　绪　论

热传导简称导热，是传热的三种基本方式之一。导热过程是由微观粒子（分子、原子、电子等）的热运动引起的，可以发生在物体中具有不同温度的部分之间，也可以发生在直接接触的两个不同温度的物体之间。导热现象可以发生在固体中，也可以发生在气体或液体中，但在气体和液体中常与对流现象同时存在。单纯的导热现象仅发生在密实的固体中或静止的液膜中。

研究导热问题的关键是求物体（主要指固体）中的温度分布。本书仅讨论均匀的各向同性物体的导热问题。

## 1-1　傅里叶定律

### 1. 温度场

工程数学场论中规定了场的定义：如果在全部空间或部分空间里的每一点，都对应着某个物理量的一个确定的值，就说在此空间确定了该物理量的场。如果物理量是数量，就称这个场为数量场（标量场）；若是向量，就称这个场为向量场。温度场是数量场。温度 $t$ 这一个数量通常是空间坐标 $(x, y, z)$ 和时间变量 $\tau$ 的函数，即 $t=f(x, y, z, \tau)$。这是三维非稳态温度场，在此温度场中发生的导热为三维非稳态导热。不随时间而变的温度场称为稳态温度场，即 $t=f(x, y, z)$，此时为三维稳态导热。对于一维和二维温度场，稳态时可分别表示为 $t=f(x)$ 和 $t=f(x, y)$，非稳态时则分别表示为 $t=f(x, \tau)$ 和 $t=f(x, y, \tau)$。

场论中，对数量场论述了以下两个重要概念[1]。

（1）数量场的等值面或等值线　场中物理量的数值相同的各

点组成的面(或线)称为等值面(或线)。等值面(或线)充满整个数量场所在的空间,而且互不相交,通过数量场的每一点只有一个等值面,即一个点只在一个等值面上。温度场也存在着等温面(或线),其性质与上述相同。等温面(或线)可以直观地帮助我们了解温度在场中的分布状况,这是一种整体性的了解。

(2) 数量场的方向导数和梯度 研究数量场的另一个重要方面就是还要对它作局部性的了解,即还要考察数量(如温度)由场中各点向其邻域内沿每一方向的变化情况。为此,要研究温度方向导数及温度梯度。

**2. 温度方向导数及温度梯度**

由图 1-1 可见,由温度场内的点$M$出发,在空间可以引向不同的方向。现研究点$M$的温度沿确定的 $l$ 方向对距离的变化率,此变化率即点$M$沿 $l$ 方向的温度方向导数,表示为

$$\left(\frac{\partial t}{\partial l}\right)_M=\lim_{M'\to M}\frac{t(M')-t(M)}{MM'}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta l} \tag{1-1}$$

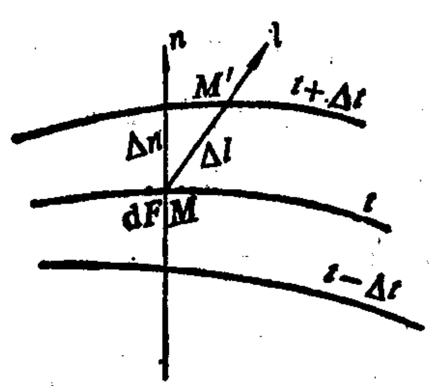



图 1-1 温度方向导数及温度梯度间的关系[见式(1-4)]

由此定义可知,温度方向导数解决了温度在给定点处沿某个方向的变化率问题。然而从场中的给定点出发有无穷个方向,除了沿点$M$所在的等温面之外,在其它方向上温度都是变化的。

温度梯度是一个向量,它的方向朝着温度变化率最大的方向;它的值等于该方向的方向导数,用$\frac{\partial t}{\partial n}$表示,即

$$\frac{\partial t}{\partial n}=\lim_{\Delta n\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta n}=\lim_{\Delta n\to 0}\frac{(t+\Delta t)-t}{\Delta n} \tag{1-2}$$

温度梯度这一向量,用符号 grad$t\equiv\nabla t$ 表示,其方向(温度变

化率最大的方向)即是等温面法线方向，指向温度增加的方向 $\boldsymbol{n}$ (即数学上的外法线方向)时为正值，反之为负值，即有

$$\mathrm{grad}\,t=\boldsymbol{n}\frac{\partial t}{\partial n} \tag{1-3}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 是法线方向上的单位向量。

点 $M$ 沿 $l$ 方向的温度方向导数 $\frac{\partial t}{\partial l}$ 的数值，等于点 $M$ 处的温度梯度在 $l$ 方向的投影，表示为

$$\frac{\partial t}{\partial l}=\frac{\partial t}{\partial n}\cos(n,l) \tag{1-4}$$

式中，$(n,l)$ 为等温面外法线与 $l$ 方向间的夹角。

温度梯度与温度沿坐标轴 $x$、$y$ 和 $z$ 方向的变化率间的联系，数值上可用相同的方式表示为

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial t}{\partial n}\cos(n,x)$$

$$\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial t}{\partial n}\cos(n,y)$$

$$\frac{\partial t}{\partial z}=\frac{\partial t}{\partial n}\cos(n,z)$$

温度梯度在直角坐标中可写成分量和的形式，即

$$\mathrm{grad}\,t=\boldsymbol{i}\frac{\partial t}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial t}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial t}{\partial z} \tag{1-5}$$

式中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 及 $\boldsymbol{k}$ 分别为沿 $x$、$y$ 及 $z$ 轴的单位向量。

**3. 傅里叶定律**

1804 年，法国科学家毕渥[3]提出假设：在固体、静止液体或气体中，从任何一个等温面到另一个等温面所传导的热量，正比于时间间隔、等温面的面积及两等温面之间的温差，反比于两等温面之间的距离，即为

$$\mathrm{d}Q_{\tau}=-\lambda\frac{\partial t}{\partial n}\mathrm{d}F\mathrm{d}\tau \qquad \mathrm{J} \tag{1-6}$$

式中：$d\tau$ 为时间间隔；$dF$ 为等温面上的微元面积；$\lambda$ 为比例常数；负号表示热流方向与温度梯度方向相反。

1822 年，法国科学家傅里叶根据大量实验结果，经过科学抽象，确认比例常数 $\lambda$ 是反映物体导热性能的一个参数，称为导热系数，单位是 $W/(m\cdot{}^\circ C)$。

单位时间内，通过单位等温面面积传导的热量称为热流密度，以 $q$ 表示，数值上

$$q=\frac{dQ_\tau}{dFd\tau}$$

热流密度 $q$ 是向量，表示为

$$q=-\lambda n\frac{\partial t}{\partial n}=-\lambda \mathrm{grad}\,t \qquad W/m^2 \tag{1-7}$$

上式称为傅里叶定律，用文字表达为：温度场内任一点的热流密度 $q$，其方向与温度梯度方向相反，大小等于材料导热系数与温度梯度的乘积。

通过温度场中的点 $M$，沿非等温面在各个方向上都有热量传递，其数值互不相等。热流密度 $q$ 与温度梯度方向相反，热流线上每一点的切线方向表示热流密度 $q$ 的方向。单位时间内通过与等温面成 $\varphi$ 角的任一单位面积(外法线方向为 $l$) 的热量 $q_l$(有时亦称热流密度)，数值上是热流密度 $q$ (即最大热流密度)在所考虑方向上的投影，表示为

$$q_l=-\lambda\frac{\partial t}{\partial l}=q\cos\varphi \tag{1-8}$$

式中，$\varphi$ 是 $q_l$ 所在方向 $l$ 与 $q$ 所在方向 $n$ 之间的夹角，见图 1-2。

在直角坐标中，热流密度可写成分量和的形式：

$$q = iq_x + jq_y + kq_z \qquad (1\text{-}9)$$

式中

$$q_x = -\lambda\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$q_y = -\lambda\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$q_z = -\lambda\frac{\partial t}{\partial z}$$

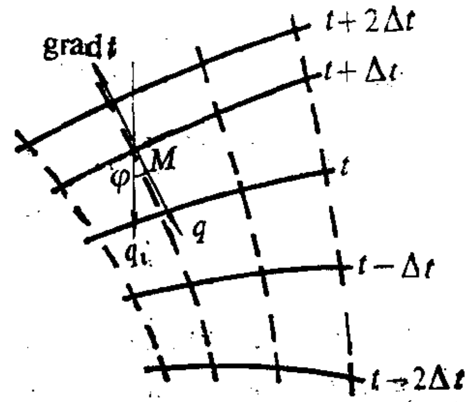



图 1-2 等温线及热流线

傅里叶定律表达式(1-7)的适用条件如下:

(1) 均匀的连续材料 对于密实的固体材料而言，只要被研究的物体尺寸相对于分子间的距离足够大，就可以视为连续体。隔热保温材料等一般都是含有空气的多孔性、纤维性或颗粒性材料。严格地说，这类材料不是均匀的连续介质，此时需要采用将其当作连续介质时的折算导热系数（也可称为表观导热系数或有效导热系数），才能应用傅里叶定律。

λ

(2) 各向同性材料 即要求导热系数与方向无关。然而，在工程实际中遇到的材料有很多是各向异性的，即使是各向同性的材料，有时在使用时也会出现各向异性的性质，如迭合的硅钢片。此时，不能简单地使用式(1-7)，因为物体内任一点处的温度梯度与热流密度不再共线，导热系数是一个与方向有关的量，在求解过程中傅里叶定律要写成比较复杂的形式。

傅里叶定律表达式——式(1-7)适用于稳态及非稳态导热。

引起物体内部某一点发生导热现象的根本原因，是该点存在着温度梯度。应用式(1-7)时，热流密度及温度梯度必须是对于同一点而言的，如果该点的温度梯度消失，那么该点的导热现象也就不存在了。

应用傅里叶定律可以求出单位时间内通过等温面$F$所传导的热量，称为热流量，表示为

$$Q=\int_F q\mathrm{d}F=-\int_F \lambda\frac{\partial t}{\partial n}\mathrm{d}F \qquad \mathrm{W} \qquad (1\text{-}10)$$

在 $\tau$ 时间间隔内通过等温面 $F$ 所传导的热量为

$$Q_\tau=-\int_0^\tau\int_F \lambda\frac{\partial t}{\partial n}\mathrm{d}F\mathrm{d}\tau \qquad \mathrm{J} \qquad (1\text{-}11)$$

由上述两式可见，求解导热量首先需要知道温度场。因此，确定温度场是求解导热问题的主要任务。

## 1-2 导热微分方程

傅里叶定律的作用，在于揭示连续的温度场中每一点的温度梯度与该点的热流密度之间的关系。而导热微分方程进一步解决了在连续的温度场中每一点的温度与相邻点的温度之间的关系，以及每一点的温度与时间的关系。导热微分方程的推导要应用能量守恒定律(热力学第一定律)及傅里叶定律。针对固体内的一个微元体进行分析，其能量守恒表达式如下：

| 单位时间内通过微元体界面导热得到的净热量 | + | 单位时间内由微元体的内热源生成的热量 | = | 单位时间内微元体的内能增加量 |
|---|---|---|---|---|
| ↑ | | | | |
| 应用傅里叶定律 | | | | |

上式整理后即可得到导热微分方程。

通过求解导热微分方程，可以求出物体内各点温度随时间及空间坐标的变化情况，即可以求出 $t=f(x,y,z,\tau)$ ——各个瞬时物体内的温度分布。

### 1. 导热微分方程表达式

对于均匀连续、各向同性的静止固体，在具有内热源 $q_v$(核加热、电加热、化学反应、$\gamma$ 射线加热或其它内热源)时，可以得到如

下的导热微分方程:

$$\mathrm{div}(\lambda \mathrm{grad}\, t)+\dot{q}=\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{1-12}$$

式中:$\mathrm{div}(\lambda \mathrm{grad}\, t)$为$\lambda \mathrm{grad}\, t$ 的散度;$\dot{q}$ 为内热源，单位为 $W/m^3$;$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}$含有密度 $\rho$ 及比热容 $c$,是单位体积内热量的变化率。对于直角坐标系,$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, t)$可以表示为

$$\mathrm{div}(\lambda \mathrm{grad}\, t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right)$$

因此直角坐标系的导热微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{1-13}$$

式中:内热源 $\dot{q}$ 可以是正值或负值,可以是常量或是坐标和时间的函数;物性参数 $\lambda$、$\rho$ 及 $c$ 可以是常量,也可以是温度的函数。一般地说，固体的 $\rho$ 及 $c$ 可认为是常量，$c\approx c_p\approx c_V$，而导热系数 $\lambda=f(t)$。

当导热系数 $\lambda$ 作常量看待时，$\mathrm{div}(\lambda \mathrm{grad}\, t)$可以表示为

$$\lambda \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, t)=\lambda\nabla^2 t$$

式中 $\nabla^2$ 为拉普拉斯算子。此时导热微分方程简化为

$$\nabla^2 t+\frac{\dot{q}}{\lambda}=\frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{1-14}$$

式中,$a=\frac{\lambda}{\rho c}$为热扩散率,单位为 $m^2/s$。对于直角坐标系

$$\nabla^2 t=\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

由式(1-14)可得

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{\lambda}=\frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{1-15}$$

上式是一个二阶非齐次偏微分方程，式中内热源$\frac{\dot{q}}{\lambda}$ 是非齐次项。

如果内热源为零，则式(1-15)成为齐次方程。当物性参数 $\lambda$、$\rho$ 及 $c$ 都是常量(即$\lambda$和 $a$ 是常量)，内热源 $\dot{q}$ 是常量或是坐标与时间的函数时，式(1-15)为线性偏微分方程。当物性参数 $\lambda$、$\rho$ 及 $c$ 是温度 $t$ 的函数，或者内热源 $\dot{q}$ 是温度 $t$ 的函数时，式(1-15)为非线性偏微分方程。一般地说，当 $\lambda$、$\rho$ 及 $c$ 可看作常量，$\dot{q}$ 是常量或是坐标与时间的函数时，属线性方程；如果 $\lambda$ 是温度 $t$ 的函数，则属非线性方程。

**2. 有内热源的稳态导热微分方程**

稳态导热时，$\frac{\partial t}{\partial \tau}=0$。此时导热微分方程为

$$\nabla^2 t+\frac{\dot{q}}{\lambda}=0 \tag{1-16}$$

对于直角坐标系，上式为

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{\lambda}=0 \tag{1-17}$$

式(1-16)及(1-17)称为泊松方程式，用于求解有内热源的稳态导热问题。式(1-15)是通用导热微分方程，用于求解有内热源时的非稳态导热问题。

**3. 无内热源的非稳态导热微分方程**

无内热源时，$\dot{q}=0$。此时导热微分方程为

$$\nabla^2 t=\frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{1-18}$$

对于直角坐标系，上式为

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{1-19}$$

式(1-18)及(1-19)称为傅里叶方程。

4. **无内热源的稳态导热微分方程**

在无内热源及稳态导热时，$\dot{q}=0$、$\frac{\partial t}{\partial \tau}=0$，可得

$$\nabla^2 t=0 \tag{1-20}$$

对于直角坐标系，上式为

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0 \tag{1-21}$$

式(1-20)及(1-21)称为拉普拉斯方程。

5. **其它坐标系的导热微分方程**

在导热微分方程中，温度的拉普拉斯算子在正交曲线坐标系中可以表示为[6]

$$\nabla^2 t=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\ \frac{\partial t}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\ \frac{\partial t}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\ \frac{\partial t}{\partial x_3}\right)\right] \tag{1-22}$$

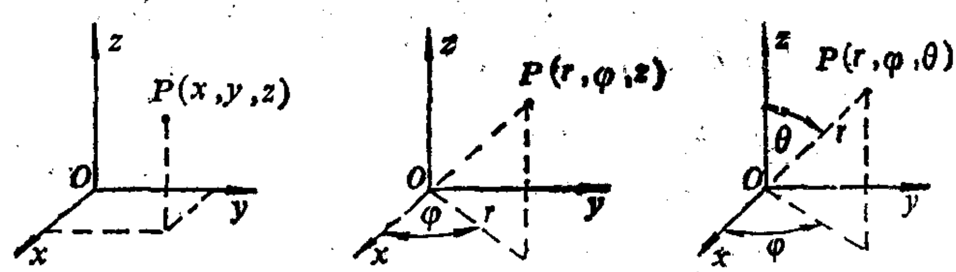
式中，$x_1$、$x_2$ 及 $x_3$ 是坐标量，$h_1$、$h_2$ 及 $h_3$ 是拉梅系数，见表 1-1。三种常用坐标系(见图 1-3)中的 $\nabla^2 t$ 数值列于表 1-2。

**表 1-1 在三种坐标系中式(1-22)的系数**

| | 直角坐标系<br>$x$<br>$y$<br>$z$ | 圆柱坐标系<br>$x=r\cos\varphi$<br>$y=r\sin\varphi$<br>$z=z$ | 球坐标系<br>$x=r\sin\varphi\cos\theta$<br>$y=r\sin\varphi\sin\theta$<br>$z=r\cos\varphi$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x$ | $r$ | $r$ |
| $h_1^2$ | 1 | 1 | 1 |
| $x_2$ | $y$ | $\varphi$ | $\theta$ |
| $h_2^2$ | 1 | $r^2$ | $r^2\sin^2\varphi$ |
| $x_3$ | $z$ | $z$ | $\varphi$ |
| $h_3^2$ | 1 | 1 | $r^2$ |

表 1-2　$\nabla^2 t$ 的数值

| 坐标 | 直角坐标系 | 圆柱坐标系 | 球坐标系 |
|---|---|---|---|
| 三维 | $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$ | $\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$ | $\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial t}{\partial \theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2}$ |
| 二维 | $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$ | $\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2}$ | $\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial t}{\partial \theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2}$ |
| 一维 | $\frac{d^2 t}{dx^2}$ | $\frac{d^2 t}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dt}{dr}$ | $\frac{d^2 t}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dt}{dr}$ |




(a) 直角坐标系　(b) 圆柱坐标系　(c) 球坐标系

图 1-3　三种坐标系

### 6. 导热微分方程的分类[4]

导热微分方程是二阶偏微分方程。二阶偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial^2 t}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial t}{\partial x_i}+Ct+D=0 \tag{1-23}$$

式中，$x_i$ 表示 $x$、$y$、$z$ 及 $\tau$。如果上式中的 $A_i$、$B_i$、$C$ 及 $D$ 只是 $x_1$、$x_2$、…、$x_n$ 的函数，则称为线性方程。如果上式中的 $D$ 为零，则称为齐次方程。如果上式中所有的 $A_i$ 不为零，并且具有相同的正负号，则上式为椭圆方程。拉普拉斯方程及泊松方程均属椭圆方程。