高等数学

董加礼　施光燕　主编

大连理工大学出版社

改革试点教材

高等数学

董加礼
施光燕　主编

大连理工大学出版社

内容简介

本教材对经典高等数学内容、结构，以及问题的提出、教学重点等方面作了重新的考虑。适当加强了分析基础，突出微分学、淡化积分学；加强教学和工程技术应用界面部分的学习，增加了数值计算方法和优化方法等新数学技术内容。全书包括微积分、数值计算方法、最优化方法三部分，共八篇计二十六章。各部分均具有相对独立性，可根据实际情况进行取舍而不会对教学产生影响。各章均留有精编的习题，答案附于书末。

本书可作为高等工业院校高等数学课改革试用教材，也可供工程技术人员选做自学用书或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/董加礼，施光燕主编. 一大连：大连理工大学出版社，1997.6
ISBN 7-5611-1168-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①董…②施… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 20830 号

高等数学

董加礼
施光燕
主编

* * *

大连理工大学出版社出版发行
(大连市凌水河　邮政编码 116024)
大连业发印刷厂印刷

* * *

开本：787×1092　1/16　　印张：26.25　　字数：605 千字
1997 年 6 月第 1 版　　1997 年 6 月第 1 次印刷
印数：1－6000 册

* * *

责任编辑：方延明　　责任校对：宋玉珠
封面设计：孙宝福

* * *

ISBN 7-5611-1168-1
O·150

定价：25.00 元

前　言

我们编写这本教材的指导思想是，加强分析基础，同时在强调微积分基本思想的前提下，尽量淡化各种运算技巧，腾出时间，增设数值计算方法和优化方法，以适应未来高科技发展的需要。数值方法和优化方法的设置是模块式的，不同的专业可有所选择。

所谓分析基础主要是指极限理论及有关问题。我们认为这部分内容不仅是现代数学和科学技术的基础，同时也是培养学生数学素养最重要的途径，是使学生有个数学头脑的关键，因此只能加强而不能削弱。本教材除原有的极限理论之外，增加了确界及确界公理、单调有界原理和 Cauchy 准则等，并且都给予了证明，一致连续和一致收敛等也都作为正式内容讲授，如此等等。

由于计算机的高度发展和广泛应用，现在的科学工作者和工程技术人员在应用数学时，已很少手算各种题目，而是尽量运用现成的软件。正如美国著名数学家 P. D. 拉克思指出的："现在标准的微积分课程与数学家们应用和思考微积分的方式大相径庭……，把微积分课程的大部分用于过时的技巧有多么愚蠢，用这种技巧来解决上面提到的问题（积分函数，求函数的最大值、最小值及零点，以及解微分方程等）比计算机能做的要差得多，甚至根本解不了。现在我们有机会清除把微积分弄得如此杂乱的那些僵死和陈腐的材料了。"根据这一新的特点，本教材尽可能淡化各种运算技巧，特别是积分技巧。例如，不定积分我们只讲 3 个学时，重积分和第一类线面积分是利用几何形体统一给出的，至于计算则处理得相当简单，并舍去了场论部分。又比如，导数应用部分去掉了连我们自己也不用的函数作图法。相反，突出了函数的增减性与极值、凸函数及曲率等重要内容，增加了向量值函数的微分法，强调了 Taylor 公式、方向导数和梯度。而将各种近似计算归并到数值方法中，多元函数的极值放到优化方法里。经过这样处理，使内容精练、紧凑，节省很多篇幅。

我们知道，计算机的应用主要靠软件，据说我国计算机软件的开发率不足 10%，浪费十分严重，究其原因主要是使用计算机的人数学技术跟不上。大型的科学计算离不开数值方法，成功的优化设计离不开优化方法。据联合国教科文组织的调查，在经济发达国家的大企业中，用数学解决实际问题时，有半数以上用数学规划（优化方法）。因此，日本对企业中的技术人员普遍进行优化技术的培训。可见，面向 21 世纪的大学毕业生掌握初步的数值方法和优化方法就如同有没有文化一样重要。

教学内容的改革需要教学方法的改革。本教材在讲法上突出了以下几个特点。

第一，强调发散思维。方法论认为，发明创造始于感性的不严格的发散思维，终止于理性的严格的收敛思维。传统的数学教材通常都是按照定义、定理、证明和例题的模式讲"是什么"，这样收敛思维固然得到了充分的训练，但"为什么"的所谓发散思维却几乎荒废了。从而导致学生只会考试，而创造能力并不强。本教材试图改变这种传统讲法，充分展示发散思维。对诸如微分中值定理，牛顿—莱布尼兹公式等重要概念和定理，尽量从几何或物理的直观背景出发，提出问题，然后再进行抽象分析和论证，最后得到所需要的结论，而较少地直接给出定义和定理。这样处理问题可以使学生看到数学家是如何想问题和发现问

题的，对培养学生的创造思维无疑会有帮助的。

第二，加大信息量。本教材力图写得简练，有不少问题有意留给那些确有余力的学生课下去思考或查阅参考书。例如，关于函数极限，我们先讲海因定理，之后很多问题就不再给出证明了。关于二元函数的二重极限与二次极限涉及到极限换序的重要问题，我们将此问题提出，但不去展开。至于数值方法和优化方法中的不少算法只介绍了主要思路。如此等等。

第三，适当介绍数学史。实践表明，在教材中的适当地方介绍一点数学家的故事和数学史，对培养学生的科学兴趣是十分重要和有效的。本教材在讲微积分学基本定理时，就简述了牛顿和莱布尼兹的工作。

第四，渗透现代数学的观点。同一问题，用不同的观点去讲授效果是不一样的。实际上，高等数学中的很多地方是可以渗透的，诸如逼近、离散化、线性化、数值化和抽象概括等现代数学的观点和思想。例如，用差商代替导数就是一种最简单的数值化，Taylor 公式和函数展开都体现了用多项式逼近函数的思想。向量的加法和纯量乘法及其运算性质正是线性空间的直观背景。这些问题在本教材中都有所体现。

第五，注意应用和建模。数学建模是培养学生综合运用所学知识解决实际问题能力的最好方法和途径。数学建模的初等形式就是解应用题。过去高等数学中的应用题大都是几何和物理中的经典问题，内容太古老。因此，如何精选一些确有意思的问题是很重要的。尽管本教材注意了这个问题，但还很不够。

教学改革无疑要有一本教材做蓝本，但再好的教材也得教师去讲授，因此教师对改革的认识和对教材的理解是至关重要的。必须充分发挥广大教师的积极性，改革才能成功。

本教材已在吉林工业大学和大连理工大学部分班级使用了两轮。吉林工业大学是以 150 学时讲完微积分部分，数值计算方法和优化方法采用专业选学的办法，大连理工大学是以 190 学时讲完全书。使用情况正常、良好，试点是成功的。

本书由董加礼和施光燕主编，参加编写和试点的同志有高文森、罗远诠、邹春玲、黄万风和张士科。在本书的编写过程中得到全国高等院校工科数学教学指导委员会、吉林工业大学和大连理工大学的领导和教务处的大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于水平所限，问题和错误在所难免，诚恳欢迎批评指正。

编　者

1996.8

目　录

第一篇 分析引论

本篇主要介绍函数概念、函数的极限以及函数的连续性。这里重点是极限，因为它不仅是本课程的需要，同时也是现代数学的基础。

第一章 函 数

函数是客观世界中量与量之间相依关系的一种数学抽象，因此在科学技术中广泛存在和使用，同时也是高等数学研究的主要对象。本章将先介绍集合，特别是点集的有关概念和性质，在此基础上，从映射的观点出发介绍函数概念。

§1.1 集 合

集合是数学中最基本的概念，它在现代数学中起着非常重要的作用，也是数学在各个领域中应用的出发点。

1. 集的概念与记号

我们将具有某种性质的事物的全体叫做一个集合，简称集。组成集的事物称为该集的元素或点。例如，教室中所有的学生组成一个集，它的元素是学生；实数的全体组成一个实数集，它的元素是实数，等等。

通常用拉丁文大写字母 $A,B,C,\cdots,M,N,\cdots,X,Y,Z$ 等表示集；用小写字母 $a,b,c,\cdots,m,n,\cdots,x,y,z$ 等表示集的元素。不含任何元素的集称为空集，用 $\varnothing$ 表示。

若 x 是集 A 的元素，则说 x 属于 A，记作 $x\in A$，否则说 x 不属于 A，记作 $x\notin A$ 或 $x\overline{\in} A$。若集 A 的元素都是集 B 的元素，则说 A 含于 B 或 B 包含 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。若 $A\subset B$，且确有元素 $a\in B$，但 $a\notin A$，则说 A 是 B 的真子集。对任何集 A，均有 $A\subset A$；若 $A\subset B$，$B\subset C$，则有 $A\subset C$。我们规定空集属于任何集。

用记号

$$A=\{x|x\text{ 具有性质 }P\}\quad\text{或}\quad A=\{x;x\text{ 具有性质 }P\}$$

表示 A 是由具有性质 P 的元素组成的集。例如

$$N=\{n|n=1,2,3,\cdots\}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

表示由自然数 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 组成的自然数集或正整数集，而

$$X=\{x|x^2-1=0\}=\{-1,1\}$$

表示由 -1 和 1 组成的集。又如

$$D=\{(x,y)|-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\}$$

表示 xoy 平面上以原点为心，边长为 2 的正方形内的所有点（包括边界上的点）组成的集。

2. 集合的运算

我们先给出集的相等概念，然后再引进并、交、余、差等运算。

设 A,B 为二集，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则说 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

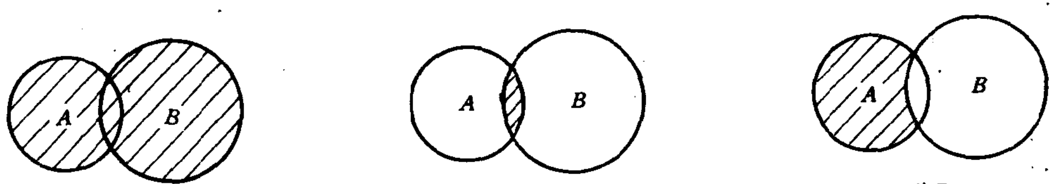
这个概念很重要，很多复杂的集合等式都是用它来验证的。

设 A,B 为二集，我们规定

$$A\cup B \triangleq \{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$
$$A\cap B \triangleq \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$
$$A\backslash B \triangleq \{x \mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}$$

分别为 A 与 B 的并集、交集、差集。这里记号“$\triangleq$”表示“被定义作”(以下同)。

实际上 A 与 B 的并集就是 A 和 B 的所有元素放在一起做成的集，而交集则是 A 与 B 共同的元素做成的集，差集是属于 A 而不属于 B 的元素做成的集，如图 1-1 所示。



$A\cup B$　　　　$A\cup B$　　　　$A\backslash B$

图 1-1

例如，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\},A\cap B=\{3,4\},A\backslash B=\{1,2\}$$

差集 $A\backslash B$ 并不要求 $A\supset B$。如果 $A\supset B$，则称 $A\backslash B$ 为 B 在 A 中的余集，记作$\mathscr{C}_A B$。在不至于引起混乱时，可简记为$\mathscr{C}B$(图1-2)。

类似地，可将并与交推广到任意多个集的并与交。

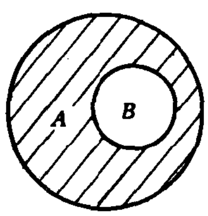


图 1-2

3. 并与交的性质

性质 1

(1) $A\cup A=A, A\cap A=A, A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing$;

(2) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(3) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

性质 2

(1) $A\cap B\subset A\subset A\cup B$;

(2) 若 $A_i\subset C(i=1,2,\cdots)$，则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\subset C$;

(3) 若 $A_i\supset C(i=1,2,\cdots)$，则$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\supset C$。

性质 3　$\mathscr{C}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$，$\mathscr{C}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$。

以上性质，只要根据集的定义即可验证。我们只验证性质3中的$\mathscr{C}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$，其余留给读者作练习。

设 $x\in$ 左边，则 $x\notin\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，从而 $x\notin A_i(i=1,2,\cdots)$。这说明 $x\in\mathscr{C}A_i(i=1,2,\cdots)$，于是 $x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$，即左$\subset$右。

反之，若 $x\in$ 右边，则 $x\in\mathscr{C}A_i$，从而 $x\notin A_i(i=1,2,\cdots)$。这说明 $x\notin\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，于是 $x\in\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)$，即右$\subset$左。

4. 集合间的映射

设有 A,B 两个集合，若存在一个对应关系 f，使得对 A 中的每个元素 a，通过 f，在 B 中有唯一的一个元素 b 与之对应（如图1-3），则说 f 是由 A 到 B 的一个映射，或变换，或算子，记作

$$f: A\mapsto B \quad 或 \quad f: A\to B$$

并称 b 为 a 在映射 f 下的像，a 为 b 在映射 f 下的原像。集合 A 称为映射的定义集合，而 $f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}$ 为映射的像集合。

如果映射 f 将 A 中不同的元素映射到 B 中时有不同的像，则称映射 f 为一对一的映射（如图1-4）。

如果 A 与 B 间存在一对一的映射，则称 A 与 B 是一一对应的，记作 $A\sim B$。

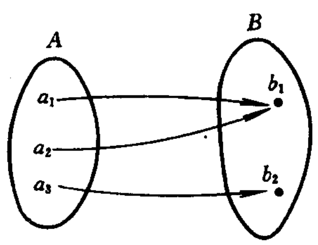


图 1-3

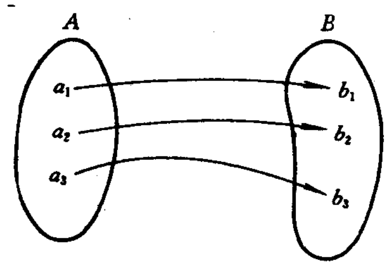


图 1-4

例 1 设 $A=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$，$B=\{2,4,\cdots,2n,\cdots\}$，则只要令

$$f: n\mapsto 2n \quad (n=1,2,\cdots)$$

便知 $A\sim B$。但值得注意的是：B 是 A 的真子集。

例 2 设 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$，则只要从原点出发引射线（如图1-5），便知 $A\sim B$。

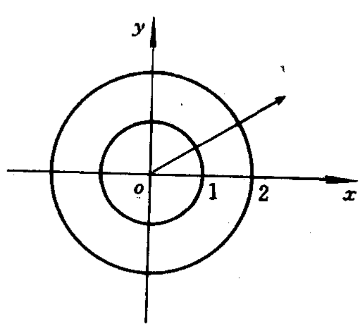


图 1-5

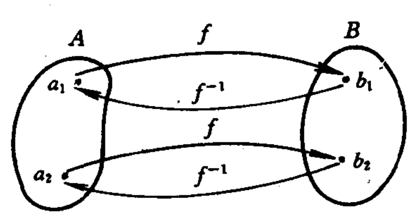


图 1-6

这是一个非常有趣的问题，因为直观上看，小圆 $x^2+y^2=1$ 上的点比大圆 $x^2+y^2=4$ 上

的点少得多，但它们是一一对应的。这是无限集合的特性。

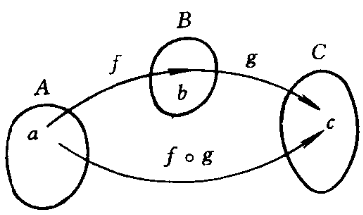


图 1-7

如果 f 是 $A \to B$ 的一对一的映射，则对于每一个 $b \in B$，在 A 中存在唯一的 a，使 $a \xrightarrow{f} b$。这样就产生了一个从 B 到 A 的映射，我们称这个映射为 f 的逆映射，记为 f^{-1}（如图1-6）。

设有映射

$$g: A \to B \quad , \quad f: B \to C$$

则对每一个 $a \in A$，有

$$a \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} c \quad (b \in B, c \in C)$$

这说明，对每一个 $a \in A$，通过 $b(b \in B)$，都有唯一的 $c \in C$ 与 a 对应，因此产生了一个从 A 到 C 的新映射，记为 $f \circ g$，并称之为 A 上的复合映射（如图1-7）。

§1.2 实数集——一维点集

1. 实数集及其性质

我们将全体实数构成的集合叫做实数集，记作 R^1 或 R。

由于任何一个实数都对应数轴（如图1-8）上唯一的一个点；反之，数轴上任何一个点都有唯一的一个实数与之对应，因此实数集 R 与数轴 ox 上的点是一一对应的。这一性质称为实数集的连续性。正因为这样，今后我们将对实数与数轴上的点不加区分。实数集也叫一维点集，R 中的集合称为点集或数集。

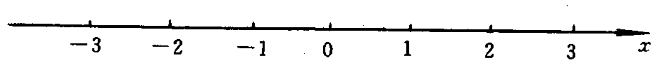


图 1-8

实数集具有下述性质：

(1) 实数集是有序集，即对任意两个实数 a 与 b，必满足且仅满足下列关系之一

$$a < b \ , \ a = b \ , \ a > b$$

且若 $a<b$，$b<c$，则 $a<c$。

(2) 实数集对代数运算（即加、减、乘、除）是封闭的，即任意两个实数进行加、减、乘、除运算，其结果仍是实数。

(3) 实数集是稠密集，即任意两个不同的实数之间仍有实数。特别地，有理数和无理数在实数集中是稠密的，即任何两个不同的实数之间，必存在有理数和无理数。

2. 区间集

设 a,b 为二实数，我们将满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数 x 或点 x 作成的集合叫做闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$$

类似地，分别称

$$(a,b) = \{x | a < x < b\}$$

$$[a,b) = \{x | a \leqslant x < b\} \text{ 或 } (a,b] = \{x | a < x \leqslant b\}$$

为开区间及半开半闭区间。

以上统称为有限区间。此外还有无限区间：

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = R$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leqslant b\}$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$$
$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$$

等等。这里，$-\infty$与$+\infty$分别称为“负无穷大”与“正无穷大”。

3. 邻域、内点与开集

设 x_0是一个给定的点（即实数），δ 是某一正数，则称点集

$$O(x_0,\delta) \triangleq \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

为 x_0的 δ 邻域，它是以 x_0为心，δ 为半径的开区间（如图1-9）。

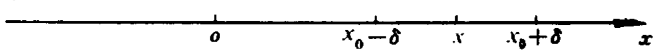


图 1-9

$O(x_0,\delta)$有时简记为$O(x_0)$。

设 E 是 R 中的非空点集，$x_0 \in R$。如果存在 x_0的某个邻域 $O(x_0)$，使 $O(x_0) \subset E$，则说 x_0是 E 的内点。显然 E 的内点属于 E。

如果非空点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集。例如

$$E_1 = \{x \mid 0 < x < 1\}\ ,\ E_2 = \{x \mid -1 < x < 0\}$$

等都是开集，而

$$E_3 = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}\ ,\ E_4 = \{x \mid 0 < x \leqslant 1\}$$

等都不是开集。规定空集为开集。

4. 聚点与闭集

设 $E \subset R$，$x_0 \in R$。若 x_0的任何邻域，除 x_0外至少还包含 E 的一个点，则说 x_0是 E 的聚点。

显然，E 的内点必是 E 的聚点。值得注意的是，E 的聚点不一定属于 E。例如，$E=\{1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots\}$有一个聚点0，但$0 \notin E$。

如果 E 包含它的所有聚点，则称 E 为闭集。例如，所有的闭区间集都是闭集，而开区间集和半开半闭区间集都不是闭集。

5. 有界集及确界

设 $E \subset R$，若存在某个数 M（或 m），使得对一切 $x \in E$，都有

$$x \leqslant M（或\ x \geqslant m）$$

则说点集 E 有上界（或下界），数 M（或 m）叫做 E 的上界（或下界）。否则说 E 无上界（或下界）。

如果 E 既有上界又有下界，则说 E 有界。否则说 E 无界。

显然，一个点集如果有上界（或下界），则必有无穷多个上界（或下界）。现在我们提一个问题：这无穷多个上界（或下界）中是否存在一个最小的上界（或最大的下界）？为此，我们引进一个概念：

定义 设 E 为非空的数集，如果存在一个数 β(或 α)满足条件：

(1) 对一切 $x\in E$，都有 $x\leqslant\beta$(或 $x\geqslant\alpha$)，即 β 是 E 的一个上界(或 α 是 E 的一个下界)；

(2) 对任给的 $\varepsilon>0$(不管它多么小)，必有 $x_0\in E$，使

$$x_0>\beta-\varepsilon(\text{或 } x_0<\alpha+\varepsilon)$$

即从 β 中去掉(或加到 α 上)一个不论多么小的正数 ε，$\beta-\varepsilon$(或 $\alpha+\varepsilon$)都不再是上界(或下界)，则称 β 为数集 E 的上确界，α 为下确界，分别记作

$$\beta=\sup E\ ,\ \alpha=\inf E$$

对有界集来说，上确界就是最小的上界；而下确界则是最大的下界。对无上界和无下界的数集 E，则规定

$$\sup E=+\infty\ ,\ \inf E=-\infty$$

例如，集合 $E=\left\{\frac{1}{n}\middle|n=1,2,\cdots\right\}$，显然上确界为1，下确界为0。

下面给出一条很容易接受的所谓确界公理。

确界公理 非空有上(下)界的数集必有上(下)确界。

§1.3 函　　数

1. 函数概念

我们将从数集 X 到实数集 R 的映射 $f: X\to R$ 叫做函数。

由于对任何 $x\in X$，按对应关系 f，有唯一的一个数 $y\in R$ 与之对应，因此人们习惯地将 $f: X\to R$ 记作

$$y=f(x)$$

并将 x 叫做自变量，因变量 y 叫做函数，X 叫做函数 y 的定义域，$Y=f(X)=\{f(x)|x\in X\}$叫做函数 y 的值域。

由这个定义可以看出，两个变量 x 和 y 是否具有函数关系，关键在于是否存在 X 到 R 上的一个对应关系 f。

从几何上看，在平面直角坐标系中，点集

$$\{(x,y)|y=f(x)\ ,\ x\in X\}$$

称为函数 $y=f(x)$的图像(如图1-10)。一个函数的图像通常是一条曲线，$y=f(x)$也叫这条曲线的方程。这样，函数的一些特性常常可借助于几何直观来发现。相反，一些几何问题，有时也可借助于函数来做理论探讨。

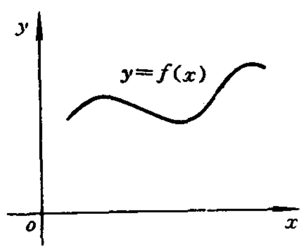


图 1-10

下面将给出一批今后常引用的函数。

例 1 初等数学中学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数，等等，是最基本的一些函数。下面就将知道，常见的函数都是由它们“构成”的，所以把它们叫做基本初等函数。它们的一些性质、定义域、值域，以及图像等都要熟练掌握，这里就不再赘述了。

例 2 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $Y=[0,+\infty)$，如图1-11。

例 3 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

的定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $Y=\{-1,0,1\}$，如图1-12。

例 4 最大整数函数：对任意实数 x，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。例如

$$\left[-\frac{1}{3}\right] = -1\ ,\ [-\pi] = -4\ ,\ [\sqrt{2}\,] = 1\ ,\ [2] = 2\ ,\ [3.9] = 3$$

等。函数 $y=[x]$ 的定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $Y=\{整数\}$，实际上

$$y = [x] = n\ ,\ n \leqslant x < n+1\ ,\ n = 0\ ,\ \pm 1\ ,\ \pm 2\ ,\cdots$$

如图1-13。

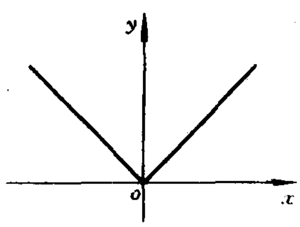


图 1-11

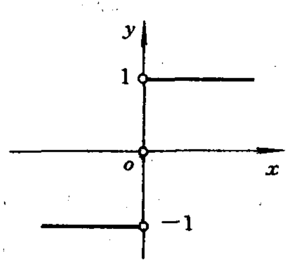


图 1-12

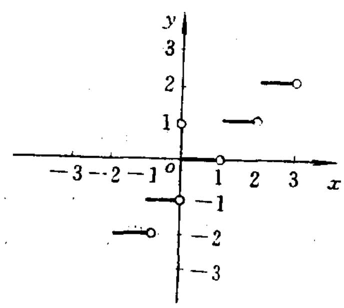


图 1-13

例 5 狄立克莱(Diriclet)函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x\ 为有理数 \\ 0, & x\ 为无理数 \end{cases}$$

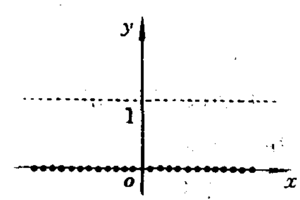


图 1-14

的定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $Y=\{0,1\}$，由于有理数和无理数在实数中稠密，因此只能画出它的象征性图像，如图1-14。

例2到例5中的函数称为分段函数。

由上述例中可看出，函数 $y=f(x)$ 中的 f 实际上只表示 x 与 y 之间的对应关系，用什么符号表示是无关紧要的，因此对同一函数，可用不同的符号 f,g,φ 等表示。例如，$f(x)=|x|$，$g(x)=|x|$ 都表示同一函数。

2. 反函数

我们已经知道，函数是一种特殊的映射，即映射的原像(自变量)和像(因变量)都是实数。类似地，对于函数 $y=f(x)$ 作为映射 $f: X\to R$，我们将 f 的逆映射 f^{-1} 叫做 $y=f(x)$ 的反函数。具体地说，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X，值域为 Y，如果对每一个 $y\in Y$，都有唯一的 $x\in X$，使 $y=f(x)$，则说 x 也是 y 的函数，我们将这个函数记作 f^{-1}，即 $x=f^{-1}(y)$，并把它叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数。

从图像上看，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 为同一图像。

人们习惯用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=$