中学数学基础

ZHONGXUE SHUXUE JICHU

解析几何习题解答

史素　任学

人民教育出版社

中学数学基础

解析几何习题解答

史素　任学

人民教育出版社

内 容 提 要

本书是《中学数学基础·解析几何》（人民教育出版社 1981 年 2 月第一版）的习题解答。为了便于查对，在练习、习题和复习题的标题后和题号前面的括号内列出了原书上的页次。

中学数学基础

解析几何习题解答

史素 任学

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 11.5 字数 235,000

1981 年 4 月第 1 版 1981 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—315,000

书号 7012·0125 定价 0.84 元

目　录

上篇　平面解析几何

下篇　空间解析几何

上　篇

第一章　平面直角坐标系 曲线与方程

第一节　平面直角坐标系

练　习(第 5 页)

〔 5 〕　1. 如图,试求

(1) AB, BC, CD, DA 各等于什么?

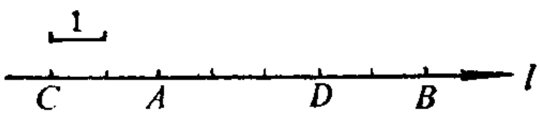
(2) $AB+BC+CD=$?

$AB+BC+CD+DA=$?

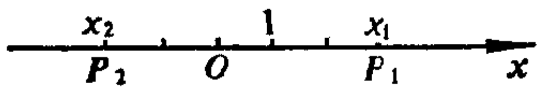
解: (1) $AB=5, BC=-7, CD=5, DA=-3$;

(2) $AB+BC+CD=AD=3$,

$AB+BC+CD+DA=0$.



(第 1 题)



(第 2 题)

〔 6 〕　2. 如图,试求

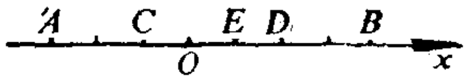
(1) $x_1=$? $x_2=$? (2) $P_1P_2=$? $P_2P_1=$?

解: (1) $x_1=3$, $x_2=-2$;

(2) $P_1P_2=x_2-x_1=5$, $P_2P_1=x_1-x_2=-5$.

〔 6 〕　3. 如图, x 轴上每一格等于一个单位长度,写出有向

线段AB、BC、CD、DE、EA 的数量和长度.



(第 3 题)

解：设 A、B 两点的坐标分别为 x_A、x_B，有向线段 AB的数量:

$$AB=x_B-x_A=4-(-3)=7.$$

有向线段 AB 的长度:

$$|AB|=|x_B-x_A|=|4-(-3)|=7.$$

同理，有向线段 BC、CD、DE、EA的数量和长度分别为:

$$BC=-1-4=-5,\quad |BC|=5;$$

$$CD=2-(-1)=3,\quad |CD|=3;$$

$$DE=1-2=-1,\quad |DE|=1;$$

$$EA=-3-1=-4,\quad |EA|=4.$$

〔6〕 4. 设P是A、B、C三点所在的直线上任意一点，求证不论它们的位置如何，总有

$$PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB=0.$$

证明：取 A、B、C、P 所在的直线为数轴，以A为原点，设B、C、P 的坐标分别为 b、c、p. 根据有向线段数量的计算公式，有

$$\begin{aligned}&PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB\\&=-p(c-b)+(b-p)(0-c)+(c-p)b\\&=-pc+pb-bc+cp+bc-pb\\&=0.\end{aligned}$$

习 题(第 18 页)

〔18〕 1. 在直角坐标系中描出下列各点:

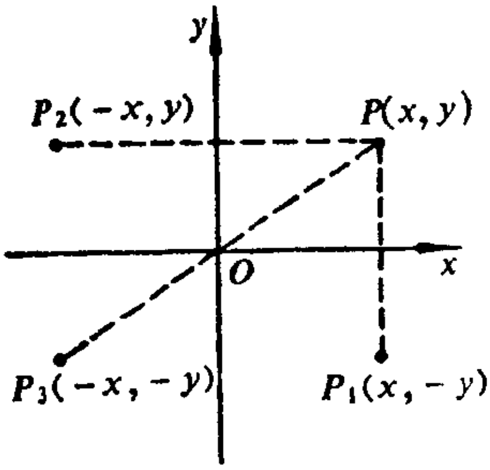
$(1, 3)$; $(1, -3)$; $(-1, 3)$; $(-1, -3)$;

$(0, 4)$; $(0, -4)$; $(4, 0)$; $(-4, 0)$.

作图略.

〔18〕 2. (1) 求 $P(x, y)$ 关于 x 轴、y 轴的对称点的坐标;

(2) 求与 $P(x, y)$ 对称于原点的点的坐标. 并指出第1题中哪些点是互相对称的 (关于 x 轴、y 轴或原点).



(第 2 题)

解: 如图.

(1) $P_1(x, -y)$ 点与 $P(x, y)$ 点关于 x 轴对称. $P_2(-x, y)$ 与 $P(x, y)$ 关于 y 轴对称.

(2) $P_3(-x, -y)$ 与 $P(x, y)$ 关于原点对称.

第一题中, $(1, 3)$ 与 $(1, -3)$、$(-1, 3)$ 与 $(-1, -3)$、$(0, 4)$ 与 $(0, -4)$ 关于 x 轴对称. $(1, 3)$ 与 $(-1, 3)$、$(-1, -3)$ 与 $(1, -3)$、$(4, 0)$ 与 $(-4, 0)$ 关于 y 轴对称. $(1, 3)$ 与 $(-1, -3)$、$(-4, 0)$ 与 $(4, 0)$、$(0, 4)$ 与 $(0, -4)$、$(-1, 3)$ 与 $(1, -3)$ 关于原点对称.

〔18〕 3. y 轴上 A、B 两点的纵坐标分别是 y_1 和 y_2, 设

(1) $y_1 = 8$, $y_2 = 6$; (2) $y_1 = 5$, $y_2 = -3$;

(3) $y_1 = -4$, $y_2 = 0$; (4) $y_1 = -9$, $y_2 = -11$.

求 AB、BA 和 $|AB|$.

解: (1) $AB = y_2 - y_1 = 6 - 8 = -2$,

$BA = y_1 - y_2 = 8 - 6 = 2,$

$|AB| = 2.$

(2) $AB = -3 - 5 = -8,$

$BA = 5 - (-3) = 8,$

$|AB| = 8.$

(3) $AB = 0 - (-4) = 4,$

$BA = -4 - 0 = -4,$

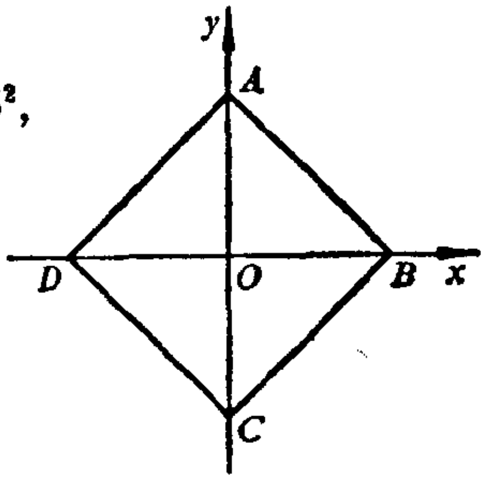
$|AB| = 4.$

(4) $AB = -11 - (-9) = -2,$

$BA = -9 - (-11) = 2,$

$|AB| = 2.$

〔19〕 4. 正方形的边长为 5，以两条对角线为坐标轴，写出四个顶点的坐标。



(第 4 题)

解：$\because \quad |OA|^2 + |OB|^2 = 5^2,$

$|OA| = |OB|,$

$\therefore \quad |OA| = \dfrac{5\sqrt{2}}{2},$

$|OB| = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}.$

又 A、C 关于 x 轴对称，B、D 关于 y 轴对称，A、B、C、D 四点的坐标分别为

$A\left(0, \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right),\qquad B\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}, 0\right),$

$C\left(0, -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right),\qquad D\left(-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}, 0\right).$

〔19〕 5. 边长为 5 的菱形，有一条对角线的长为 6，如果把菱形的两条对角线作为坐标轴，求它各个顶点的

坐标.

解: (1) 以长为 6 的对角线为 x 轴(图 1).

∵ $\triangle AOD$ 是直角三角形, $|AD|=5$, $|AO|=3$,

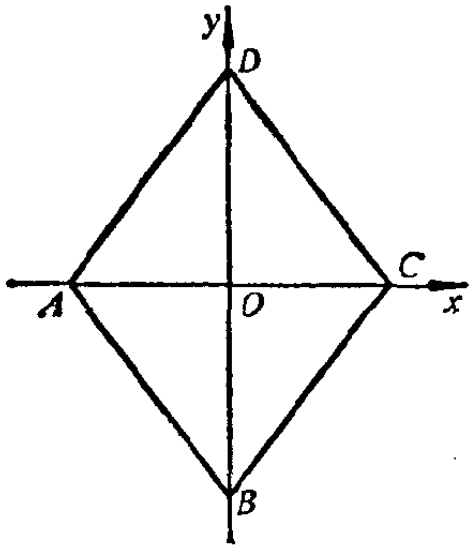
∴ $|OD|=4$.

由菱形的对称性, 得 A、B、C、D 的坐标分别是

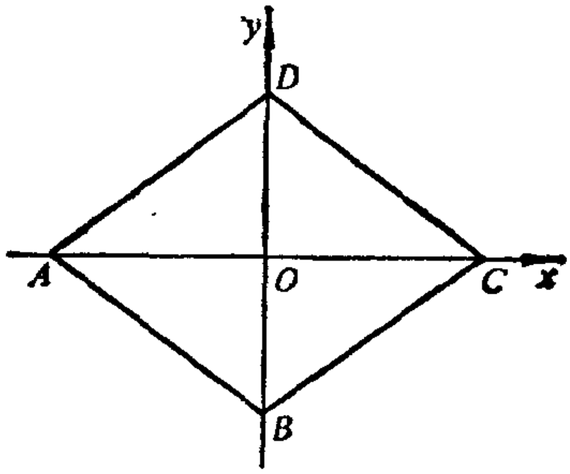
$A(-3,0)$, $B(0,-4)$, $C(3,0)$, $D(0,4)$.

(2) 以长为 6 的对角线为 y 轴(图 2), 同理可得各点坐标分别是

$A(-4,0)$, $B(0,-3)$, $C(4,0)$, $D(0,3)$.



(1)



(2)

(第 5 题)

〔19〕 6. 一个质点从 $A(-3,2)$ 点到 $B(4,5)$ 点作直线运动, 求它经过的距离.

解:
$$
\begin{aligned}
|AB| &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\
&= \sqrt{(4+3)^2+(5-2)^2} \\
&= \sqrt{58}.
\end{aligned}
$$

〔19〕 7. 求证: 以 $A(0,0)$、$B(3,1)$、$C(1,7)$ 为顶点的三角形是直角三角形.

证明：∵ $AB^2=(3-0)^2+(1-0)^2=10$,

$BC^2=(1-3)^2+(7-1)^2=40$,

$AC^2=(1-0)^2+(7-0)^2=50$,

∴ $AB^2+BC^2=10+40=50=AC^2$.

因此，$\triangle ABC$ 是直角三角形.

〔19〕 8. 已知 $A(3,-4)$、$B(a,3)$ 两点间的距离为 $7\sqrt{2}$，求 a.

解：∵ $|AB|=7\sqrt{2}$,

即 $(a-3)^2+(3+4)^2=98$,

∴ $a_1=10$, $a_2=-4$.

〔19〕 9. 在 x 轴上有一点 P，它和 $A(1,-3)$ 点的距离等于 5，求 P 点的坐标.

解：设 P 点的坐标是 $(x,0)$.

由 $\sqrt{(x-1)^2+(0+3)^2}=5$,

得 $(x-1)^2+9=25$,

$x-1=\pm 4$,

∴ $x_1=5$, $x_2=-3$.

因此，所求的点是 $P_1(5,0)$，$P_2(-3,0)$.

〔19〕 10. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(-a,0)$、$B(a,0)$、$C(0,\sqrt{3}a)$，求证这个三角形是等边三角形.

证明：∵ $|AB|=\sqrt{(a+a)^2+(0-0)^2}=2|a|$,

$|BC|=\sqrt{(0-a)^2+(\sqrt{3}a-0)^2}=2|a|$,

$|CA|=\sqrt{(0+a)^2+(\sqrt{3}a-0)^2}=2|a|$.

∴ $|AB|=|BC|=|CA|$,

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

〔19〕11. 三角形的三个顶点是 $A(2,1)$、$B(-2,3)$、$C(0,-1)$，求三条中线的长.

解：AB、BC、AC 三边中点 E、F、D 的坐标分别为

$$x_E=\frac{2+(-2)}{2}=0,$$

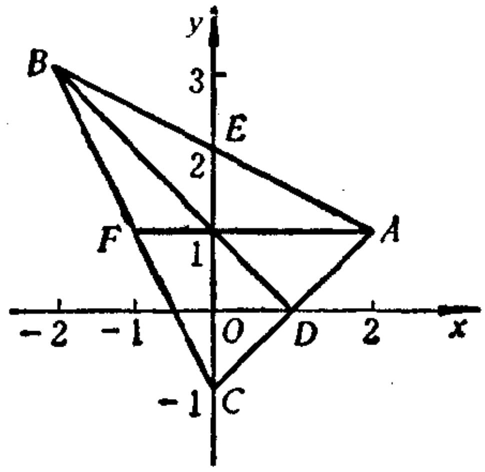
$$y_E=\frac{1+3}{2}=2;$$

$$x_D=\frac{2+0}{2}=1,$$

$$y_D=\frac{1+(-1)}{2}=0;$$

$$x_F=\frac{-2+0}{2}=-1,$$

$$y_F=\frac{3+(-1)}{2}=1.$$



(第 11 题)

$$\therefore \quad |AF|=\sqrt{(1+2)^2+(1-1)^2}=3,$$

$$|BD|=\sqrt{(1+2)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2},$$

$$|CE|=\sqrt{(0-0)^2+(2+1)^2}=3.$$

〔19〕12. 连结 $P_1(2,y)$ 和 $P_2(x,6)$ 两点的线段的中点是 $P(3,2)$，求 x 和 y.

解：$\because$ P 点是 P_1P_2 的中点，

$$\therefore \quad 3=\frac{2+x}{2}, \qquad 2=\frac{6+y}{2}.$$

即 $\quad x=4,\ y=-2.$

〔19〕13. 设有 $P_1(-2,4)$ 和 $P_2(5,3)$ 两点，P 点在 P_1P_2 的延长线上，且 $|P_1P|=2|P_2P|$，求 P 点的坐标.

解法 1：设 P 点的坐标为 (x,y).

∵　P在P_1P_2的延长线上，且$|P_1P|=2|P_2P|$，

∴　P_2为P_1P的中点.

由线段中点坐标公式，有

$$5=\frac{-2+x}{2},\qquad 3=\frac{4+y}{2}.$$

解得　　　$x=12,\ y=2.$

所以P点的坐标为$(12,2)$.

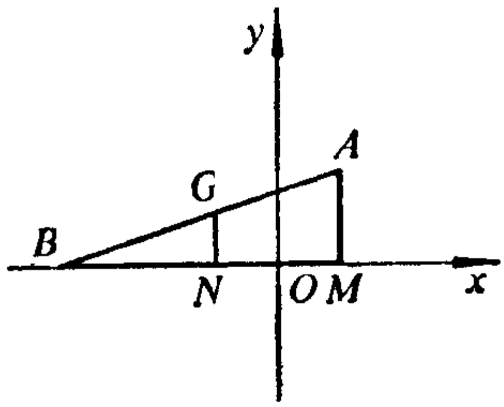
解法2：因为P在P_1P_2的延长线上，所以P为P_1P_2的外分点，由$|P_1P|=2|P_2P|$可知外分比$\lambda=-2$，

$$\therefore\quad x=\frac{-2+(-2)\times 5}{1-2}=12,\quad y=\frac{4+(-2)\times 3}{1-2}=2.$$

即点P的坐标是$(12,2)$.

〔19〕14. 在$A(2,3)$和$B(-7,0)$处，分别有重量是5克和4克的两个质点，求它们的重心坐标.

解：如图，设$G(x,y)$为两质点A、B的重心．因为两质点对重心的力矩大小相等，所以有



(第14题)

$$5|GA|=4|BG|,$$

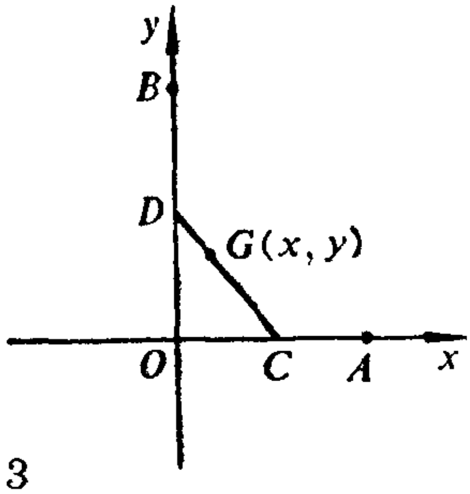
即重心G分BA为定比λ，$\lambda=\frac{5}{4}$.

$$\therefore\quad x=\frac{-7+\frac{5}{4}\times 2}{1+\frac{5}{4}}=-2,\quad y=\frac{0+\frac{5}{4}\times 3}{1+\frac{5}{4}}=\frac{5}{3},$$

即重心G的坐标为$\left(-2,\frac{5}{3}\right)$.

〔19〕15. 两条均匀细棒，各长6厘米和8厘米，连结成直角，求它们的重心.

解：细棒 OA、OB 的位置如图. 设 OA 长6厘米，OB 长8厘米，取 O 为坐标原点，OA、OB 所在直线分别为 x 轴、y 轴，则细棒 OA、OB 的重心分别是 $C(3,0)$、$D(0,4)$. 设细棒 OA、OB 的质量分别为 $6k$、$8k$，求细棒 OA、OB 的重心，相当于求 C、D 处质量分别为 $6k$、$8k$ 的两个质点的重心.



(第 15 题)

设重心 G 的坐标为 (x,y)，同前题一样，有

$$6k\cdot|GC|=8k\cdot|DG|,$$

$$\frac{|DG|}{|GC|}=\frac{6k}{8k}=\frac{3}{4},$$

即重心分 DC 为定比 λ，$\lambda=\frac{3}{4}$.

$$\therefore\quad x=\frac{0+\frac{3}{4}\times 3}{1+\frac{3}{4}}=\frac{9}{7},\qquad y=\frac{4+\frac{3}{4}\times 0}{1+\frac{3}{4}}=\frac{16}{7},$$

即重心 G 的坐标为 $\left(\frac{9}{7},\frac{16}{7}\right)$.

如果 OA 长为8厘米，OB 长6厘米，则重心坐标为 $\left(\frac{16}{7},\frac{9}{7}\right)$.

〔19〕16. 在 $P_1(2,3)$、$P_2(-3,8)$、$P_3(-5,0)$ 处，分别有重量是2克、3克和5克的三个质点，求它们的重心.

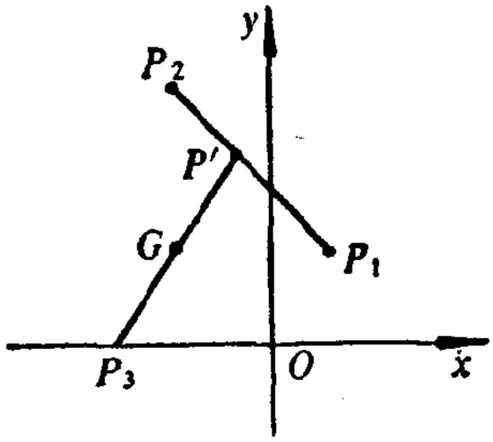
解：先求在 P_1、P_2 处两质点的重心.

设重心为 $P'(x', y')$,

$\because \quad \dfrac{P_1P'}{P'P_2}=\dfrac{3}{2}=\lambda,$

$$\therefore \quad x'=\frac{2+\frac{3}{2}\times(-3)}{1+\frac{3}{2}}=-1,$$

$$y'=\frac{3+\frac{3}{2}\times 8}{1+\frac{3}{2}}=6,$$



（第 16 题）

所求重心 P' 的坐标是$(-1, 6)$.

再求在 P'、P_3 处两质量分别为 $2+3$、5 的两个质点的重心. 设重心 G 的坐标为(x, y),

$\because \quad \dfrac{P'G}{GP_3}=\dfrac{5}{5}=1$, $\therefore$ G 是 P'、P_3 的中点.

$$\therefore \quad x=\frac{-1+(-5)}{2}=-3, \qquad y=\frac{6+0}{2}=3.$$

即 P_1、P_2、P_3 处三个质点的重心坐标是$(-3, 3)$.

［19］17. 求以 $A(0, 1)$、$B(3, 4)$、$C(-1, -1)$ 为顶点的三角形的面积.

解：$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-3,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}.$$

〔19〕18. 求以(1, 1)、(3, 4)、(5, −2)和(4, −7)为顶点的四边形的面积.

解: 四边形的面积相当于以 (1, 1)、(3, 4)、(5, −2)为顶点和以(1, 1)、(5, −2)、(4, −7) 为顶点的两个三角形面积的和.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -18, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = -23,$$

$$\therefore \quad S_{\text{四边形}} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 9 + 11.5$$

$$= 20.5.$$

〔19〕19. 证明三角形三边中点所成三角形的面积等于原三角形面积的四分之一.

证明: 设三角形三个顶点的坐标（按逆时针顺序）为 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$, 则 AB、BC、CA 中点的坐标分别为 $D\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$、$E\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$、$F\left(\frac{x_3+x_1}{2}, \frac{y_3+y_1}{2}\right)$, 并且 D、E、F 也是逆时针排列.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2),$$

$$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1\\ \frac{x_2+x_3}{2} & \frac{y_2+y_3}{2} & 1\\ \frac{x_3+x_1}{2} & \frac{y_3+y_1}{2} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{vmatrix}x_1+x_2 & y_1+y_2 & 1\\ x_2+x_3 & y_2+y_3 & 1\\ x_3+x_1 & y_3+y_1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}[(x_1+x_2)(y_2-y_1)+(x_2+x_3)(y_3-y_2)$$

$$+(x_3+x_1)(y_1-y_3)]$$

$$=\frac{1}{8}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2),$$

$\therefore\quad S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}.$

〔19〕20. 检查(2,3)、(5,7)、(11,15)三点是否在一直线上?

解: 因为$\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 5 & 7 & 1\\ 11 & 15 & 1\end{vmatrix}=0$,所以由三点(2,3)、(5,7)、(11,15)为顶点的三角形的面积等于零. 即此三点在一条直线上.

〔19〕21. 用解析法证明:

(1) 直角三角形斜边中点到三个顶点的距离相等;

(2) 平行四边形的对角线互相平分;

(3) 平行四边形各边平方的和等于各对角线平方的和.