

应用数学和力学讲座丛书

弹性稳定理论

周承侗 编著



四川人民出版社

《应用数学和力学》讲座丛书

弹性稳定理论

周 承 侗 编著

3

四川人民出版社

一九八一年·成都

责任编辑：崔泽海

封面设计：李文金

弹 性 稳 定 理 论 周承倜 编著

四川人民出版社出版 重庆印制一厂印刷
四川省新华书店重庆发行所发行

开本787×1092毫米 1/16 印张10.5插页1 字数110千
1981年9月第1版 1981年9月第1次印刷
印数：1—3,170 册

书号：7118·532 定价：0.94 元

内 容 简 介

本书通过基本的结构元件（压杆、矩形板、圆柱壳）的稳定性性质来叙述近代稳定性理论的基本概念和基本计算方法。全书包括稳定性理论基本概念，杆件与杆系的稳定性，矩形薄平板的屈曲，圆柱形薄壳和球壳以及锥壳的弹性稳定性和弹塑性稳定性等内容。

本书可作为理工科院校的航空、造船、土建、机械、工程力学等有关专业的教学参考书，也可供稳定性理论研究人员和从事工程结构稳定性设计的有关工程技术人员参考。

《应用数学和力学》讲座丛书序

《应用数学和力学》编委会为了适应四化建设的需要，推动应用数学和力学方面的学术交流，自去年五月起在全国各地举办不定期的《应用数学和力学》讲座，由本刊编委同志义务分任主讲，讲授有关专题，介绍最新成就，深得各方同志支持和欢迎。去年已举办讲座五期，今后将继续举办。由于场地、名额所限，希望能参加听讲而向隅的同志很多，纷纷提出要求。为此，在四川人民出版社马骏副总编的建议下，特将讲座材料内容，编成丛书，陆续分册出版，以供读者。

长期以来，应用数学和力学是相辅相成的。晚近的发展更加如此。例如：由于人类生产活动的飞速发展，生产材料的日益更新，我们要处理比弹性、塑性、不可压缩流体、非粘性流体等更为复杂的介质，从而要研究有记忆性能的材料、有极化性质的材料和有非局部性质的材料等的力学性质。为了描述这些力学性质，人们就要求大量使用泛函分析和群论的方法。又例如：为了处理巨型的机械、特大的载荷和高速的运动，人们面对着大量的非线性问题。为了处理这些非线性问题，二十年来，力学界开发了奇异摄动理论的研究。又例如：计算机的发展，提供了力学原理直接用于工程上复杂结构物强度计算的可能性，从而开创了近代的有限元理论，以及和有限元理论密切相关的广义变分原理。其它如嘉当张量之用于极化材料的分析，突变理论之用于处理稳定性问题，沃尔函数之用于映象理论等，也无不如此。此外，随机过程和模糊数学等学科的发展，也正深刻地反映在力学原理处理真实生产问题的过程之中，从而使生产问题的处理更真实地反映了现实。

《应用数学和力学》讲座和讲座丛书，将尽可能地反映这种日新月异的发展情况。

《应用数学和力学》编委会谨藉丛书发行之际，向主讲的编委同志和编辑部的工作同志们致谢，由于他们的无私劳动和辛勤努力，讲座才能办成，丛书才得出版。

恳请读者不吝指教，对本丛书的任何意见，都将是对《应用数学和力学》编委会工作的支持和爱护。

钱 伟 长

一九八一年元月二十九日于北京清华园照澜院

序 言

工程结构的弹性和弹塑性稳定性理论是近代力学研究领域中最活跃的课题之一。虽然，经典的弹性稳定性的概念早在 18 世纪中叶就已由奥埃拉 (Euler) 所建立，但是工程结构在失稳时的实际表现却是在临界状态附近发生错综复杂的广泛变化，这些复杂的失稳现象仅用经典的稳定性概念是不能解释的。近代稳定性理论就是在分析这些复杂的失稳现象而发展起来的。

本书希望通过工程结构中最基本的结构元件 (压杆、矩形板、圆柱壳) 来叙述近代稳定性理论的一些基本概念。本书的内容系根据 1980 年 9 月在成都举办的“应用数学和力学”第二期讲座：“弹性稳定理论”的讲义整理补充而成。讲授时数为 40 学时。这本讲义的部分内容也曾在 1980 年 7 月由教育部在大连主办的“工科高等学校力学暑期讲习班”中应用过。全书共包括稳定性基本概念，杆件与杆系，平板，薄壳等四章。在第一章基本概念中概述了稳定性理论的分类和几种基本的失稳准则。由于在本书中没有包括结构动力稳定性理论和随机缺陷理论，所以在第一章中对于动力稳定性和随机缺陷问题等也作一简略介绍。从本章内容大致可以了解到近代稳定性理论的概貌和进展。

在第二章杆件和杆系的稳定性中，将通过简单压杆稳定性问题来叙述分支性 (分叉性) 失稳，渐近性屈曲，和极值性失稳等一些近代稳定性理论的基本概念。用最简单的一个自由度的“单一屈曲型”模型来介绍初始后屈曲理论的基本概念。通过一维压杆问题来说明稳定性理论中的变分法和能量法，条件极值变分问题和瑞利-里兹法、迦辽金方法。介绍了湘利 (Shanley) 理论的弹塑性稳定性概念。在杆件和杆系的应用问题中，给出了刚架、各种弹性固定端条件的单跨压杆、多跨弹性支承连续压杆以及交叉梁系 (平面板架) 的稳定性计算方法。

第三章考虑了在各种载荷条件和边界条件下矩形薄平板的屈曲问题，讨论了组合载荷条件下的不稳定性区域和稳定性区域的边界。分析了用非线性大挠度理论处理薄板问题时，考虑“面内边界条件”和“面外边界条件”所得到的不同结果。

第四章以圆柱形薄壳为中心考虑了几种基本载荷条件下的弹性和弹塑性临界压力的计算方法。介绍了同时考虑初始缺陷，几何非线性和物理非线性的薄壳稳定性的计算方法。给出了球壳弹塑性稳定性的计算公式。作为本章的补充内容，在附录中讨论了薄壳弹性稳定性理论的基本方程式和锥壳稳定性的计算方法。

从本书的内容来看，这本讲义可以作为理工院校的航空、造船、土建、机械等有关专业的高年级学生和研究生的教学参考书，也可供稳定性理论研究人员和从事工程结构的稳定性设计的工程技术人员参考。

由于编者的水平所限，书中难免存在不足和错误之处，望读者予以批评指正。

编 者

目 录

第一章 弹性稳定性的基本概念	1
§ 1. 基本概念	1
§ 2. 近代稳定性理论	4
§ 3. 稳定性问题的分类	5
§ 4. 动力稳定性	7
第二章 杆件和杆系的弹性稳定性	9
§ 1. 直柱的弹性屈曲	9
§ 2. 细压杆的大挠度失稳 (奥埃勒问题)	12
§ 3. 初始挠度对于屈曲的影响	18
§ 4. 能量准则	19
§ 5. 弹性支承的压杆稳定性问题 (条件极值变分问题)	21
§ 6. 里兹方法 (瑞利-里兹法)	23
§ 7. 伽辽金方法	26
§ 8. 弹性铰悬臂杆 (对称型稳定临界点)	31
§ 9. 弹性支承压杆 (对称型非稳定性临界点)	33
§ 10. 弹簧斜拉压杆 (非对称型的稳定或不稳定临界点)	35
§ 11. 两端弹性固定的压杆弯曲	39
§ 12. 框架的稳定性	41
§ 13. 压杆的塑性屈曲, 湘利 (Shanley) 理论	46
§ 14. 复杂杆端条件的压杆稳定性	50
§ 15. 弹性基础上压杆的稳定性	56
§ 16. 双跨连续压杆的稳定性	59
§ 17. 弹簧支座单跨度压杆的稳定性	62
§ 18. 有中间弹簧支座的双跨压杆的稳定性	68
§ 19. 等跨弹簧支座上连续压杆的稳定性	71
§ 20. 交叉梁系 (平板架) 的稳定性	81
第三章 平板的屈曲	86
§ 1. 基本方程式	86
§ 2. 大挠度板的基本方程	90
§ 3. 单向轴压的铰支矩形板的稳定性	91
§ 4. 两边简支两边固定矩形板的屈曲	94
§ 5. 一边自由的矩形板的稳定性	97
§ 6. 矩形板的剪切屈曲	101

§ 7. 矩形板非均匀压缩失稳 (纯弯失稳)	105
§ 8. 复合应力下矩形板屈曲	106
§ 9. 轴压矩形板的后屈曲变形	111
第四章 薄壳的稳定性	114
§ 1. 薄壳稳定性理论的基本公式	114
§ 2. 在轴压下圆柱形薄壳的稳定性	117
§ 3. 轴压柱壳的非线性稳定性理论的进展	120
§ 4. 在横向外压力作用下的圆柱壳	123
§ 5. 同时在轴向和横向载荷作用下的圆柱壳; 静水压力下的柱壳	124
§ 6. 圆柱壳的扭转失稳	124
§ 7. 环肋圆柱壳在静水外压力下的稳定性	125
§ 8. 环肋圆柱壳的弹塑性稳定性	129
§ 9. 在均匀外压力作用下的球形薄壳稳定性	140
附录: 薄壳基本方程和锥壳稳定性	145
一、薄壳基本方程式	145
二、锥壳稳定性	150
参考文献	158

第一章 弹性稳定性的基本概念

§ 1. 基 本 概 念

任何物体的平衡状态可能具有三种形式：稳定平衡状态、不稳定平衡状态（失稳状态）和随遇平衡状态。

设物体在其平衡位置附近作无限小偏离后，如果物体仍然能够回复到它原来的平衡位置，则这种平衡状态称为稳定平衡；如果物体在微小偏离其平衡位置后，不能再回复到它的原来位置，反而继续偏离下去，则这种状态称为不稳定平衡状态或者失稳状态。随遇平衡状态则往往是从稳定平衡状态向不稳定平衡状态过渡的一种中间状态，在这种状态中，物体在平衡位置上的势能没有极值。

在一般情况下，物体可能在某些方向运动时，平衡位置是稳定的，而在另外一些方向运动时，其平衡位置却是不稳定的。这就是说，从平衡位置的不同的偏离方向可能出现不同的稳定性性质。例如，将一个刚性小球放在一个正负双曲抛物面（鞍形曲面）的中央点上，就会出现这种稳定性性质。

事实上，在以上的稳定性概念的叙述中，我们已经提出了一种稳定性的判别准则（里雅普诺夫准则）：“在一个有限自由度的广义坐标内，有一个以坐标系 $u_i (i=1, 2, \dots, n)$ 描述其位置的系统，在平衡状态时 $u_i=0$ ，系统随时间而变化的速度为 $\dot{u}_i$ ；如果系统偏离其平衡位置，而总可以找到这样的初始特征值 u_i^0 和 $\dot{u}_i^0$ ，使在以后的运动中 $|u_i|$ 和 $|\dot{u}_i|$ 不超出某些予先所规定的界限，则此界限可以判别系统是稳定平衡的。否则系统是不稳定平衡的”。

在薄壳结构的稳定性问题中，如果壳体结构所承受的是与某一特征参数 λ 成比例的载荷系统，并且系统是保守的，则这时存在两种基本类型的失稳形态：分支点（或分叉点）失稳和极值点失稳（图1和图2）。两种类型失稳的临界载荷值分别为 λ_c 和 $\lambda_{\max}$ 。分支点（分叉点）失稳状态的特征是在稳定平衡的基本状态 I 附近存在着另一个相邻的平衡状态，而在分支点处将要发生稳定性的变换。在图1中示出实曲线的稳定分支与虚曲线的不稳定分支在分支点处的变换。极值点的失稳过程没有明显的分支点（分叉点），但是在变形途径中存在一个最大载荷值（极值点），达到最大载荷值后，变形会迅速增大，而载荷反而下降（图2）。分支点和极值点都称为临界点，相应的载荷值 λ_c 和 $\lambda_{\max}$ 称为结构屈曲时的临界载荷。与它相对应的状态称为临界状态。在到达临界状态之前的平衡状态（又称为平衡位形）^① 称为前屈曲平衡状态或前屈曲平衡位形^②。在超过临界状态之后的平衡状态（平衡位形）称为后屈曲平衡状态或后屈曲平衡位形^③。

① Equilibrium configuration

② Pre-buckling equilibrium configuration

③ Post-buckling equilibrium configuration

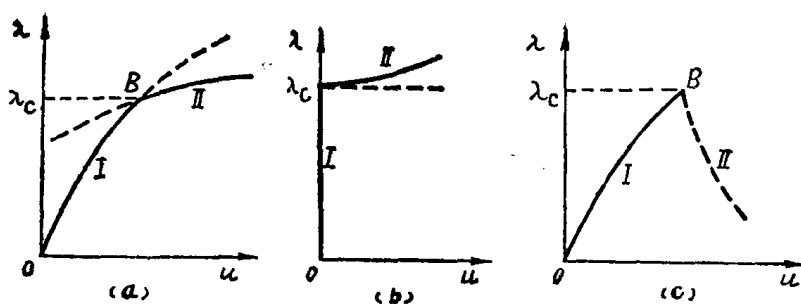


图1 分支点失稳

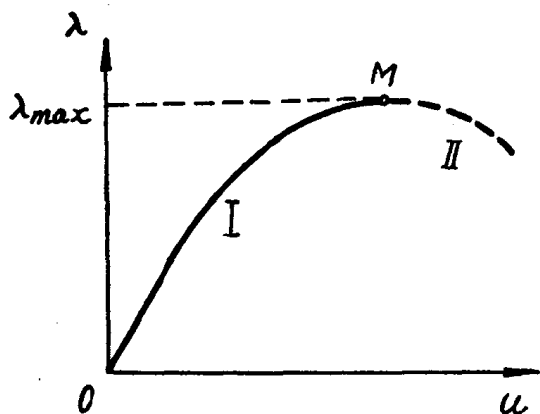


图2 极值点失稳

判别临界状态（临界点）的稳定性准则可以区分为两大类，即平衡的小稳定性准则和平衡的大稳定性准则^[1]。前者以小挠度线性理论为基础，后者则是研究后屈曲平衡位形的非线性（大挠度）理论。薄壳的弹性稳定性问题就其实质来说应该属于弹性力学非线性理论的范畴之内，但是薄壳稳定性的许多重要的基本结果却可以从线性的小挠度理论获得。

用小稳定性准则判别分支点（分叉点）失稳问题可以用三个等价的判别准则：即动力学准则，能量准则和静力学准则。静力学准则或者微扰动准则就是认为在分支点附近可以存在一种无限小的相邻平衡状态，列出微扰动的平衡微分方程式，这时问题就归结为求解线性微分方程式的本征值问题。当微扰动的平衡微分方程式不能积分成有限的形式时，则可以寻求无穷级数形式的解，而特征方程式也将由这些级数所组成，临界载荷的计算虽然没有原则性的困难，但是计算量很大，尤其是对于比较复杂而收敛很慢的级数，就应该应用现代的高速电子计算机。有时代替列出特征方程式的方法还可以用附加微载荷方法。这就是在所要求的临界载荷上再附加一个微量载荷，然后考察当原载荷等于多少时，由附加载荷所引起的挠度将无限制地增加，这时所对应的原载荷就是临界载荷。

能量准则认为在变形结构及其外载荷的力学系统中必定存在一个总势能 Π ，如果它对于所有相邻状态的能量值来说是最小的，则可以判别基本状态是稳定平衡的。按照狄里赫里定理，在平衡位置上，势能有极值，而当势能有极小值时，平衡是稳定的，当势能有极大值时，平衡是不稳定的。

由于系统的总势能函数 Π 是一个泛函，所以系统在平衡位置上时，泛函的一阶变分 $\delta\Pi$ 等于零 ($\delta\Pi = 0$)，势能有极值，如果泛函的二阶变分大于零，即 $\delta^2\Pi > 0$ ，势能有极小值，基本状态是稳定平衡的。如果泛函的二阶变分小于零，即 $\delta^2\Pi < 0$ ，势能有极大值，状态是不稳定平衡的。当泛函的二阶变分等于零时，系统处于从稳定平衡状态向不稳定平衡状态过渡的中间状态，这也就是临界状态，于是 $\delta^2\Pi = 0$ 表征临界状态。如果要在临界状态的无限邻近研究其初始后屈曲平衡位形的性能，由于这时一阶变分和二阶变分都等于零 ($\delta\Pi = 0$, $\delta^2\Pi = 0$)，所以就必須考察势能泛函的三阶和四阶或更高阶的变分。这就是近代稳定性理

论,即柯依脱(Koiter)的初始后屈曲理论的出发点^[2]。由此引出了结构对于“初始缺陷敏感度”的概念。

上述小稳定性准则除了在数学上作了线性化处理外,还需要假定结构系统是完善的,所谓“完善结构”^①就是结构系统在几何上是无初始缺陷的,在载荷系统上是理想的(无偏心)。然而,实际工程结构总是在不同程度上存在着各种各样的缺陷因素,理想的完善结构只具有理论上的意义。一个结构只要具有初始缺陷,一般就不再是平衡分支问题,它们大多数以极值点的形态失稳;或者,当结构具有一定程度的初始缺陷时,它们在缺陷的影响下就可能从失稳问题转化为一个具有梁柱效应^②的弯曲问题(强度问题)。需要正确处理这种失稳和强度的相互影响和互相转化的问题,例如轴向载荷 P 具有一定偏心度的弹性压杆,对于所有的 P 值都存在唯一的非平凡解(弯曲强度问题),而当 P 值趋近于该“完善”压杆的本征值时,弯曲挠度将趋向无限。但是实际上由于压杆材料的物理非线性性的影响,挠度事实上不可能无限扩展,于是最后形成极值点形式的失稳。对于这一问题,勃列赫(Bleich)^[6]曾经指出:“偏心受压杆子的破坏载荷不是由于纤维应力达到某一临界值的结果而是由于在某一临界载荷下,内外弯矩之间的稳定平衡成为不可能,企图把偏心柱子问题作为应力问题来考虑肯定是会失败的,因为这样完全误解了问题的主要性质”。这里说明了非完善压杆按极值点失稳的规律性。极值点失稳问题的特征是载荷位移曲线具有强烈的非线性性质,因而对于处理极值点失稳的基本平衡位形问题遇到了很大困难,这就形成了近代稳定性理论发展的一个主要方向。

虽然分支点失稳一般都可以由线性本征值问题表示其特征,但是实际结构的表现却是在临界载荷(分支性载荷)邻近发生范围十分广泛的变化。早在三十年代就在实验中观察到四边简支矩形薄平板在其板平面内可以承受的压力远远超过其临界载荷。后来又在理论上加以论证,说明受压薄平板发生屈曲的过程十分缓慢,初始屈曲状态甚至不能察觉。当超过临界载荷时,屈曲波形逐渐明显,而随着屈曲波形的发展,载荷仍然可以继续增大。这就是图1(a)类型的分支点失稳的典型例子,在这里,表征结构承载能力的临界载荷的设计概念事实上失去了意义。对于此例采用经典的线性理论所算出的平衡分支载荷作为设计载荷是偏于保守的。当然,由于矩形薄板的材料本身的物理非线性影响,最后仍然可能转化为极值点失稳。在另一方面,薄壳结构实验(例如受轴压的圆柱薄壳,受均匀外压的薄球壳)又表明这些结构在线性稳定性理论的预测值的几分之一就已经屈曲破坏了。这是图1(c)类型的分支点失稳的典型例子。当然,这时应用线性理论的临界载荷作为轴压柱壳的设计载荷是比较危险的。要了解临界载荷对于各种类型结构所具有的这种巨大差别的离散现象的原因,就必须在其临界状态(临界点)附近对其平衡的所有相邻状态进行深入的研究分析。显然,这就需要应用比线性本征值问题更为复杂得多的分析方法。近代的稳定性理论:非线性(大挠度)理论,前屈曲一致理论(斯坦因理论)^[4],初始后屈曲理论(柯依脱理论)^[2]等就是在这样的背景下发展起来的。

① Perfect structure

② Beam column effect

§ 2. 近代稳定性理论

近代稳定性理论可以分为以下三种:

- (1) 非线性大挠度稳定性理论^①,
- (2) 非线性前屈曲一致理论 (斯坦因理论)^②,
- (3) 初始后屈曲理论 (柯依脱理论)^③。

非线性稳定性理论应该包含两种因素, 即材料的物理非线性和几何非线性。如果结构在失稳之前已经发生塑性变形, 则在失稳时物理因素和几何因素这两种非线性因素互相影响, 使结构的屈曲过程十分复杂。对于薄板和薄壳的弹性失稳问题来说, 非线性影响主要是通过大挠度 (大位移) 所引起的, 这就是几何非线性影响。早期的轴压薄柱壳和均匀外压薄球壳的实验临界压力只有经典线性理论预测值的五分之一到二分之一。这一差别引起了许多研究者的重视和努力。从四十年代以来, 在非线性稳定性理论和实验方面进行了大量的研究工作。直到最近, 这一研究课题仍然是薄壳稳定性理论的研究领域中最重要、最基本的研究方向之一^[5~9]。现在已经明确了这一经典难题的困难在于超临界的后屈曲状态存在一种对应于最低载荷的平衡位形。这种后屈曲平衡位形是在远低于临界载荷的情况下存在的, 其结果就是使轴压圆柱形薄壳和均匀外压薄球壳对于任何微小扰动和初始几何缺陷都表现出极度敏感。关于这一问题将在后面第四章薄壳稳定性理论中再作详细讨论。

非线性前屈曲一致理论是斯坦因 (Stein) 在六十年代中期提出来的^[4, 10, 11]。由于近代薄壳稳定性实验技术的进展, 用电沉积和电解铜等方法^④可以制造出“接近完善”的薄壳实验模型^⑤。这种模型在很大的程度上能够排除初始缺陷对于稳定性实验结果的干扰。由近代轴压柱壳实验所获得的实验临界压力大部份都高于 1961 年以前的许多实验结果^[12~14]。以阿木罗斯 (Almroth)^[12]的实验结果为例, 其中制造得最优良的圆柱薄壳模型的轴压实验临界应力可高达 0.82 的经典线性临界应力。为解释这些实验现象, 斯坦因提出在薄壳前屈曲状态采用无力矩状态假定与边界条件是不一致的 (不协调的)。为此, 他用非线性有力矩方程来准确地描述前屈曲状态, 于是前屈曲方程组与边界条件是一致的 (相容的)。用这种前屈曲一致理论解出的柱壳轴压临界应力仅比经典线性临界应力低百分之十几。这样, 理论结果就与近代实验结果有了较好的符合。这一理论将在薄壳稳定性一章中再作较详细介绍。

非线性大挠度理论和前屈曲一致理论所考虑的薄壳结构是“完善结构”, 也就是没有初始缺陷的理想结构。柯依脱 (Koiter) 提出的初始后屈曲理论能够分析由于初始缺陷因素所造成的实际结构的屈曲强度降低的数量, 并由此提出了“初始缺陷敏感度”^⑥的概念。柯依脱理论集中于研究无限邻近临界点附近的后屈曲初始阶段的性质。柯依脱提出的是一种普遍理论, 这种理论将实际结构的缺陷敏感度与理想的完善结构的初始后屈曲性能联系起来了。

-
- ① Non-linear large deflection theory of stability
 - ② Non-linear prebuckling consistent theory (Stein's Theory)
 - ③ Initial post-buckling theory (Koiter's Theory)
 - ④ Electroforming method
 - ⑤ Near-perfect specimens
 - ⑥ Initial imperfection sensitivity

柯依脱理论用临界点附近的高阶变分分析方法而将结构的缺陷敏感度在对应于初始后屈曲性质的渐近准确解的意义上求得的。这一理论将在第二章中通过几个基本的压杆模型进行介绍。

§ 3. 稳定性问题的分类

结构的稳定性问题可以按照稳定性的性质分成以下十二类。

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------|
| 1. 保守系统, | 非保守系统; |
| 2. 弹性失稳, | 弹塑性失稳; |
| 3. 线性小挠度失稳, | 非线性大挠度失稳; |
| 4. 分支性(分叉性)失稳, | 极值性失稳; |
| 5. 离散系统(有限自由度)的稳定性, | 连续系统(无限自由度)的稳定性; |
| 6. 结构的静力稳定性, | 结构的动力稳定性; |
| 7. 比例加载系统的稳定性, | 复杂加载系统的稳定性; |
| 8. 单一型屈曲(Single-mode buckling), | 多重型屈曲(Multi-mode buckling); |
| 9. 完善结构系统的稳定性, | 非完善结构系统的稳定性; |
| 10. 局部缺陷稳定性问题, | 总体缺陷稳定性问题; |
| 11. 固定缺陷稳定性问题, | 随机缺陷稳定性问题; |
| 12. 各向同性、均质系统的稳定性, | 各向异性、非均质系统的稳定性。 |

其中, 复杂加载(组合载荷)系统的稳定性问题可归结为寻求区别稳定性区域和不稳定区域的稳定性边界。在图3和图4中示出组合载荷 P_1 和 P_2 作用下的稳定性边界。

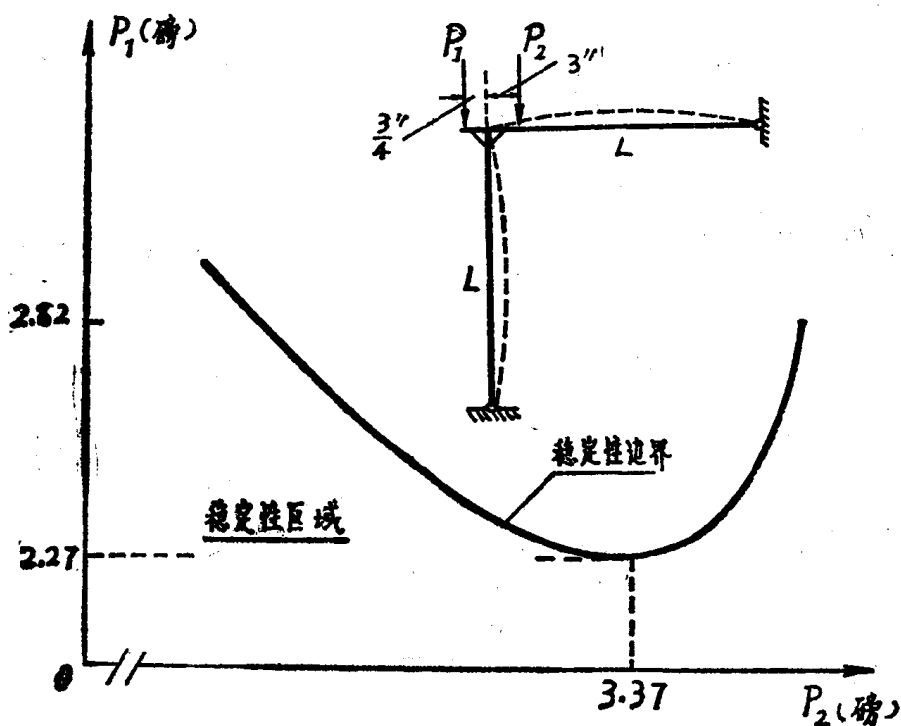


图3

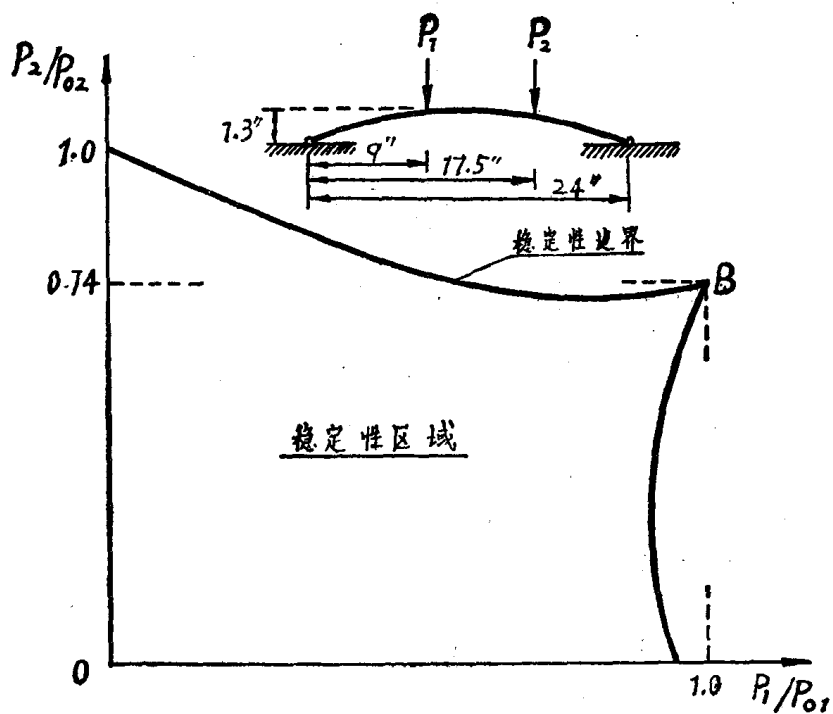


图 4

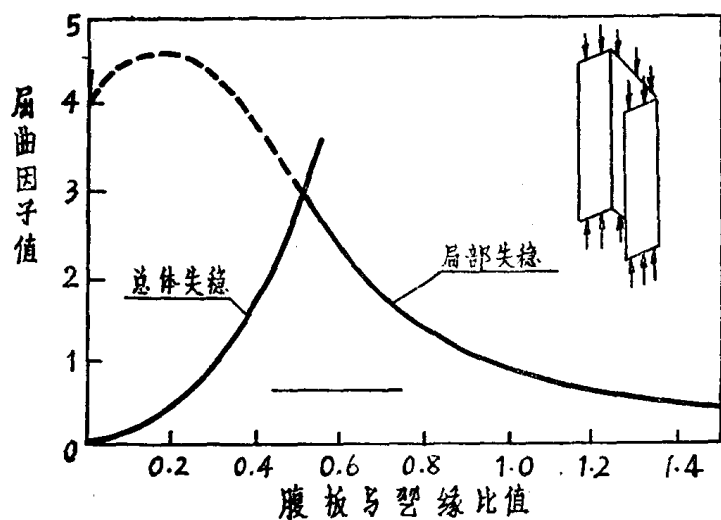


图 5

在图 5 中示出总体失稳和局部失稳的稳定性边界。

随机缺陷①分为局部随机缺陷和总体随机缺陷。局部缺陷和总体缺陷是相互影响的。以海洋石油开采的钻井平台的桩腿为例,这是一种大型的格子柱结构,高达一百几十米,具有三角形横截面(图 6),横截面尺寸十几米。在这种结构中轴压稳定性问题是一重要问题。在格子柱结构的一些连系杆中可能存在局部随机缺

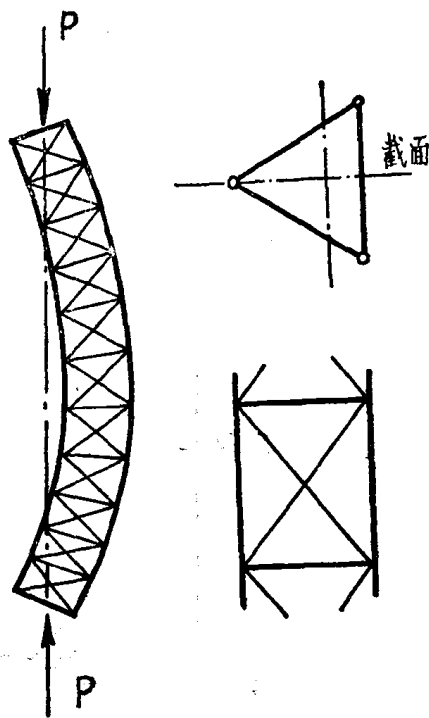


图 6 格子柱(平台桩腿)的稳定性

① Stochastic (Random) imperfections

陷，而格子柱的总体结构可能存在总体随机缺陷(格子柱的中心线有微弯度等)。局部缺陷可引起连系杆件的局部失稳，而局部失稳所造成的截面削弱将引起总体失稳而造成格子柱的总体破坏。

关于随机缺陷的稳定性问题早在1961年由波埃斯(Boyce)等研究了缺陷沿压杆作定常随机分布函数的问题^[16]；1969年有布第扬斯基(Budiansky)研究了具有随机初始缺陷的压杆稳定性问题^[16]；七十年代初有非线性弹性基础压杆的随机缺陷研究和非常随机缺陷的研究^[17, 18]；以后又有压柱的随机破坏性质的研究和格子柱的随机缺陷的研究等^[19~22]。显然，随机缺陷稳定性的研究将是一个重要的研究方向。

§4. 动力稳定性

动力稳定性问题的主要任务是确定工程结构的动力不稳定性区域。

设在直压杆上作用有周期性的压缩载荷 $P(t)$ (图7)，则当载荷的振动频率与压杆的横向自振频率之间的比值达到某一定值时，这时压杆的直线形式将会变为动力不稳定的，在该载荷频率的作用下杆件将会发生剧烈的横向振动，杆件的横向振幅会迅速增大，这就是动力失稳现象。这种现象在振动理论中称为“参数共振”。作用于压杆上的动力载荷以参数的形式列入运动平衡方程式(1.1)的左边，这种载荷称为“参数载荷”。振动时的扰动平衡方程式为：

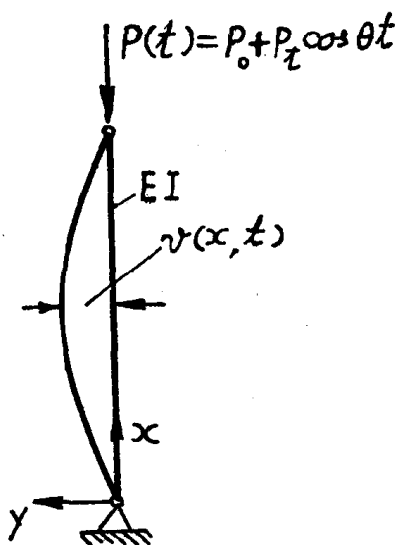


图7 压杆的动力稳定性

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

其中 m 是杆的质量。方程式的解为：

$$v(x, t) = f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1.2)$$

将上式代入(1.1)得到：

$$\left[m \frac{d^2 f_n}{dt^2} + EI \frac{n^4 \pi^4 f_n}{l^4} - (P_0 + P_1 \cos \theta t) \frac{n^2 \pi^2 f_n}{l^2} \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = 0$$

于是得到马丢(Mathieu)方程：

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + \bar{\omega}_n^2 (1 - 2\mu_n \cos \theta t) f_n = 0 \quad (1.3)$$

其中已引入下面参数：

$$\bar{\omega}_n = \omega_n \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_{En}}}, \quad \omega_n^2 = \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \right)^2 \quad (1.4)$$

$$\mu_n = \frac{P_i}{2(P_{En} - P_0)}$$

$$P_{En} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (1.5)$$

上式中 ω_n 是 n 阶自振频率, P_{En} 是 n 阶奥埃拉临界力, μ_n 称为激发参数。

比公式 (1.3) 更为一般形式的方程是马丢-希拉方程:

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + \bar{\omega}_n^2 [1 - 2\mu_n \varphi(t)] f_n = 0 \quad (1.6)$$

作为特例, 在图 8 中示出下列马丢方程:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + [\lambda - \Omega^2 \cos 2t] f = 0 \quad (1.7)$$

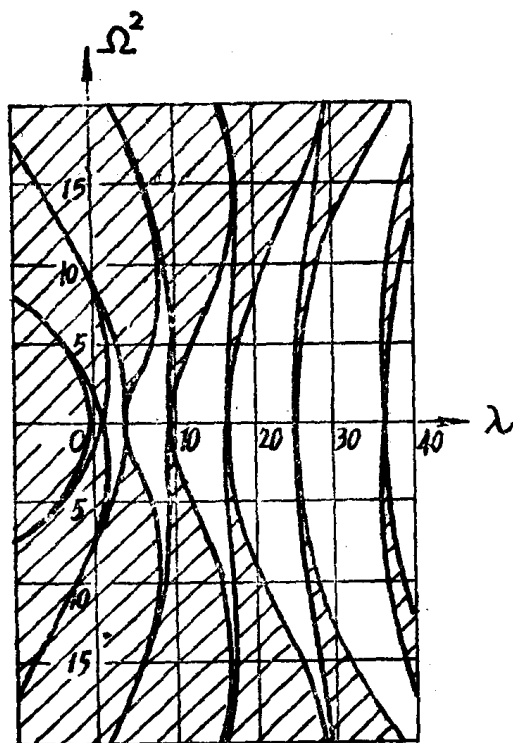


图 8 Mathieu 方程的动力不稳定区域
献[26~31]。

的不稳定区域的分布情况。其中 $\lambda = \bar{\omega}_n^2$; $\Omega^2 \cos 2t = \bar{\omega}_n^2 \cdot 2\mu_n \cos \theta t$ 。在图中阴影区域表示方程 (1.7) 具有无限增长的解, 就是动力不稳定区域。可以看出不稳定区域占据参数平面的相当大的一部份。在动力稳定性区域, 方程 (1.7) 具有有限解。

关于结构的动力稳定性问题可以参考文献 [23~25]。

关于近代稳定性理论的一般进展情况可参阅文

第二章 杆件和杆系的弹性稳定性

对于同一个结构系统,采用弹性稳定性准则的不同提法,不可能期望获得完全一致的答案。我们即将看到,即使是在奥埃勒(Euler)压杆的经典问题中,由各种不同的稳定性准则所得到的答案,它们所表现出来的一致性也是表面的;而对于其他结构类型更加复杂的弹性稳定性问题来说,就有可能从失稳准则的不同提法而得到完全不同的答案。

作为本章的开始,我们将要通过对一些简单的典型问题的分析和讨论来揭示各种稳定性准则的不同提法的实质。

§ 1. 直柱的弹性屈曲

现在用扰动平衡法(扰动力矩法)的静力学准则来研究一根理想弹性的等截面完善直杆的稳定性,杆的两端是可以自由转动的铰支座(图9)。

扰动力矩法是用微小扰动力 Q ,在 x 截面处产生扰动力矩 m_x ,这时在 x 处的总弯矩为 $M_x = Py + m_x$,设由扰动力矩所引起的挠度 y 很小,因此可以作为小挠度问题处理。所以是一个用小稳定性准则处理的线性问题。于是我们得到受扰柱子的弹性曲线微分方程式:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py + m_x = 0 \quad (2.1)$$

为了讨论简单,设干扰力 Q 作用在柱子的中央部分,则 $m_x = Q \cdot x/2$ 。引入参数 α 和 β :

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad \beta = \alpha \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (2.2)$$

其中 β 是无量纲参数, α 的量纲是(1/长度)。

方程(2.1)的基本解为:

$$y = \frac{m_x}{P} \left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha x \cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) \quad (2.3)$$

在柱子中央处的挠度 $\delta_{\max}$ 为:

$$\delta_{\max} = y_{l/2} = \frac{Ql^3}{48EI} \left[\frac{3(\tan \beta - \beta)}{\beta^3} \right] = \frac{Ql^3}{48EI} \cdot F(\beta) \quad (2.4)$$

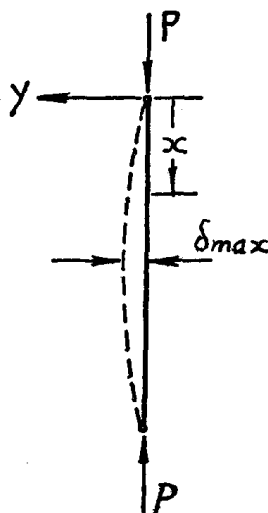


图9 直柱的弹性屈曲