物 理 实 验

上海市高等工程专科学校《物理实验》编写组编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书系根据上海高等工程专科学校物理协作组制定的教学大纲编写而成。全书除绪论、附录和附表外，共包括二十三个物理实验；其中基本实验十个，综合性实验六个，近代物理实验五个，设计性实验两个。

全书实验原理叙述清楚，计算公式推导完整，仪器介绍实用典型，实验步骤简明扼要。绪论部分介绍了误差理论和数据处理的基本知识。每个实验后均安排了预习题和思考题，便于学生自习和巩固知识。

本书可作为工科大专各专业的实验教材，也可供职工大学、业余大学、函授大学、夜大学等选用。

物 理 实 验
上海交通大学出版社出版
（淮海中路1984弄19号）
新华书店上海发行所发行
江苏启东解放印刷厂排印

开本787×1092毫米1/16 印张11.375
字数266,000 印数1—22,000
统一书号：13324·105 科技书目：129—221

定价：1.95元

前　言

我国的高等工程专科教育事业发展得较快，但长期以来，适合大专层次学生的需求，在内容和要求上与本科教学有所区别的各类基础课教材（包括物理实验教材）却严重缺乏。1984年初，在上海高教局教学处的领导和上海高等工科院校物理协作组的关怀下，由上海十所大专从事物理实验教学工作的教师组成了《物理实验》编写组，并在拟订大专物理实验教学大纲的基础上着手编写本教材。近一年来，经过反复酝酿讨论，多次修改，现在终于定稿。

编写本书的指导思想，是根据高等工程专科学校培养工程技术应用人材的特点，在选材和内容处理上力求符合专科学校的实际情况，并注意与普通物理课程的配套和衔接。在内容安排上，突破了原来的力、热、声、电、光的传统体系，按由浅入深、由简到繁、循序渐进的认识规律，把全部实验分成四个部分，即基本实验（共10个）、综合性实验（共6个）、近代物理实验（共5个）和设计性实验（共2个）。后两部分内容可作为选修课教材或供因材施教用。在内容叙述上，考虑到专科学生的基础和物理实验课的独立性，力求做到实验原理叙述清楚，计算公式推导完整，仪器介绍实用典型，实验步骤简明扼要。

本书的绪论部分介绍了误差理论和数据处理的基本知识。误差理论中的各个术语都引自我国《常用计量名词术语及定义》一书，考虑到电子计算机已开始进入物理实验领域，作为介绍，本书最后还附有“物理实验通用数据处理程序”。在难度较高的衍射光栅实验中，我们设计了图文对照的“分光仪调节操作图表”。曾在教学实践中取得较好的效果。

每个实验一般按3学时安排（1学时预习，2学时做实验）。每个实验后均设置了填充形式的预习题，目的在于提高学生的独立思考能力，并便于检查预习效果。实验后的思考题，有助于学生巩固实验知识，进一步提高实验技能。

本书由上海建材工业学院刘名山副教授任主编，上海轻工业专科学校邵汝、上海科技专科学校张裕耀、上海化工专科学校张赋秋、上海纺织专科学校秦永鑫、倪锦文、上海机器制造专科学校尹文琪、上海建材工业学院杨庶宜、上海医疗器械专科学校金志钤、上海石油化工专科学校龚德甫、上海第二冶金专科学校赵文清、上海公安专科学校成明贤等同志参加编写，并由邵汝、张裕耀、秦永鑫、张赋秋、杨庶宜、金志钤、尹文琪同志修改定稿。全书插图由君文琪描绘。在编写过程中，复旦大学陆申龙同志和上海工程技术大学姚世亨同志都曾提供了宝贵的意见，上海建材学院为我们提供不少方便，谨致以深切谢意。

由于编写水平有限，书中难免有不少缺点甚至错误，请兄弟院校及广大读者批评指正。

上海高等工程专科学校

《物理实验》编写组

一九八五年十二月

目　　录

绪　　论

基　本　实　验

综　合　实　验

近　代　物　理　实　验

设 计 性 实 验

附　录

附　表

绪　论

I　物理实验的重要性和要求

一、物理实验课的地位和作用

物理学是一门建立在实验基础上的科学。物理概念的建立，物理规律的发现，物理理论的形成，都必须以严格的科学实验为基础，并为以后的科学实验所验证。

为了适应四个现代化的需要，在培养高等工程技术应用人材的专科学校里，不但要加强专业基础理论，而且要加强实践能力的培养。由于物理实验是学生入学后接受系统实验训练的开端，又是专业实验和科学实验的重要基础，因此，物理实验课对培养学生的实践能力起着十分重要的作用。

作为一门独立的物理实验课，它的教学目的是：

1．通过实验教学，使学生了解物理实验的基本思想，掌握常用物理量的基本测量方法及减小测量误差的方法。

2．掌握常用仪器的调整和使用的基本技能。

3．培养学生科学实验能力和提高学生科学实验的素质．具体要求学生：

（1）应具有看懂实验教材、仪器说明书及查阅工具书、参考资料的能力．

（2）应具有正确使用仪器设备的能力．

（3）应具有处理数据、分析结果、撰写完整实验报告的能力．

（4）应具有对待科学实验一丝不苟的严谨态度及实事求是的工作作风．

二、物理实验课的基本程序

1．实验前的预习

学生进入实验室前必须进行预习．预习时应仔细阅读实验教材，着重理解实验的原理，明确实验的大体步骤．实验前要写好预习报告．预习报告应有下面几项内容：

（1）实验目的．

（2）实验原理．原理应写得简明扼要，如列出实验所依据的主要公式，说明式中各物理量的意义、单位以及公式的适用条件．电学实验还应包括实验线路图．

（3）实验表格．应根据实验数据特点设计表格，力求简单明了．

第一节实验课一般为预习课．预习课上，学生应在教师指导下，对照仪器仔细阅读实验教材和仪器说明书，进一步熟悉仪器使用方法和理解实验原理．本书在每一实验后均安排了预习题，目的在于帮助学生进行预习，并检查预习效果．

2．课堂实验

做实验时，应根据实验步骤和要求，认真调试仪器，仔细观察和测量有关物理量，并如实地记录测量数据。多人合做实验时，应分工协作，各司其职，互相配合。

实验完毕，应将测量数据记录交给教师审阅，经教师认可，收拾好仪器后方可离开实验室。未经重新测试，不允许修改实验数据。

3．完成实验报告

写实验报告是对实验全过程进行总结和深入理解的一个重要步骤．实验报告应独立完成。

除上述预习报告的三部分内容外，实验报告的内容还有：

（1）实验仪器。记录实验所使用的主要仪器，简介仪器的原理、构造和使用方法。

（2）实验内容。做完实验后简单总结几条实验步骤。

（3）数据处理。将测量所得的数据，按一定函数关系式求出结果，并根据各实验的具体要求，计算误差，最后写出测量结果的表达式。

（4）讨论。对实验结果进行分析判断或对实验误差进行分析。

（5）思考题。

书写实验报告时，要求学生努力做到字迹端正，文句通顺，数据记录整洁，图表合格，内容简明扼要。

Ⅱ 误差的基本知识

§1 测量与误差

一、测量

为确定待测对象的量值而进行的实验过程称为测量．物理实验中的测量分为直接测量和间接测量两类．

1．直接测量——直接用计量仪器读出待测量值的测量，称为直接测量．例如，用游标卡尺测得物体的长度为3.175 cm，用天平测得物体的质量为26.7 g等．

2．间接测量——需依据待测量和某几个直接测得量的函数关系求出待测量值的测量，称为间接测量．例如，测量重力加速度时，可以先测量单摆的摆长L和周期T，再根据单摆的周期公式求出重力加速度$g=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 L$．物理实验中对物理量的测量多数是间接测量．

二、测量值、真值和误差

1．真值——一个待测的物理量，客观上所具有的真实数值，称为真值．真值是一个理想的概念，一般说来真值是不知道的．在实际测量中，常用被测量的算术平均值近似地代替真值．

2．测量值——用计量仪器或器具直接测出或经过简单的换算而得到的量值，称为测量值．

3．测量误差——待测量的测量值与待测量的真值之差，称为测量误差．

设待测量的真值为a，测量值为x，误差为Δx，则

$$\Delta x = x - a. \tag{1}$$

测量得到的一切值，都毫无例外地存在误差．因此，在误差必然存在的情况下，测量的任务是：

（1）尽力设法使测量值中的误差减至最小．

（2）求出在同一测量条件下，多次测量得到的待测量的最近真值（最佳值）．

（3）估计最佳值的可靠程度（估算系统误差及随机误差）．

为了得到最好的实验结果，我们必须进一步研究误差的性质和来源，并有针对性地采取适当的措施．

三、误差种类

根据误差的性质及其来源，可将它分为两大类：系统误差和随机误差．

1．系统误差——由于偏离测量规定条件或测量方法不完善等因素，所引入的按某种确定规律出现的误差．

系统误差的特点是测量的结果向某一确定的方向偏离，即对某个量的多次测量，由于系统误差的影响，测得结果相对于真值或者总是偏大，或者总是偏小．系统误差的大小总是一定的，或者按确定的规律变化．产生系统误差有以下几方面的原因．

（1）仪器误差：这是由于所用仪器本身构造上的不完善或仪器未经很好校准所造成的误差。例如，天平的两臂不等；米尺、温度计、表盘等刻度不均匀；仪表的零点没校准等。

（2）方法误差：这是由于测量所依据的实验理论、实验方法不完善或实验条件不符合要求所导致的误差。例如，用单摆测重力加速度时，单摆的周期公式的成立条件是摆角必须小于5°，如果实验时没有满足该条件，将引入系统误差；量热学实验中因热量散失常被忽略而造成的误差等。

（3）测量者个人因素带来的误差：这是指因测量者本人生理和心理特点所导致的误差。例如，由于个人反应速度的不同，使得测量某一物理量时的操作总是有超前或滞后的趋向；或由于个人分辨能力的高低、个人的固有习惯使得读数始终偏大或始终偏小等。

由于系统误差总是具有某种确定的规律，多次测量中的每一次都会使测量值固定地比真值偏大或偏小，因此不能通过增加测量次数来消除或减小系统误差。但是如果能找出产生系统误差的原因，我们就可以采取适当的方法来消除或减小其影响，并对测量结果进行修正。

2．随机误差——在实际测量条件下，多次测量同一物理量时，出现的绝对值和符号以不可预定方式变化着的误差。

在测量前或在测量中即使能够对系统误差进行了补偿而使之消失，但在同一条件下对某物理量进行多次测量时，每次测量值总还会有差异。即每次测量值相对于真值有不规则的涨落，有时偏大（误差为正值），有时偏小（误差为负值），原因就在于存在随机误差。

随机误差是由于某些偶然的或不确定的因素所引起的。例如，各次观察时目的物对得不准；调节平衡时平衡点确定得不准；读数不准确（仪表示值的估读值或偏大或偏小）；实验仪器由于环境温度、湿度、振动、杂散电磁场干扰、电源电压的波动而引起的测量值的变化等。这些因素的影响一般是微小的、混杂的并且是随机出现的，这就难以确定某个因素产生的具体影响的大小。所以，一般不易寻出随机误差的原因并加以排除。

随机误差的出现，从某一次测量来看是出于偶然，但若测量次数充分多时，结果中就显示出明显的规律性，即随机误差服从一定的统计规律。实践和理论都证明，在相同条件下对同一个量进行充分的多次测量，随机误差的出现服从"正态分布"（也称"高斯分布"）。

遵从正态分布的误差具有以下几个特征（参看图1）：

（1）单峰性：绝对值小的误差出现的概率（可能性）比绝对值大的误差出现的概率大。

（2）有界性：绝对值很大的误差出现的概率近于零，即误差有一定的实际限度。

（3）对称性：绝对值相等的正误差和负误差，其出现的概率相等。

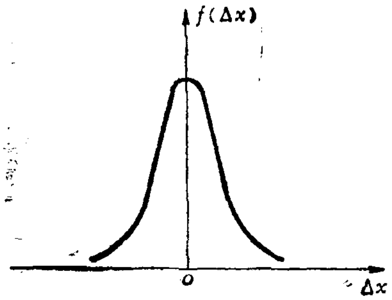


图1　随机误差的正态分布

（4）抵偿性：在实际测量条件下对同一量的测量，其误差的算术平均值随着测量次数增加而越来越趋向于零。

图中Δx为测量的随机误差，$f(\Delta x)$为误差分布函数。

3．算术平均值——一个量的n个测量值的代数和除以n（测量次数）而得到的商，称为算术平均值。算术平均值用下式表示：

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i. \qquad (2)$$

式中，x_1、x_2、…、x_n为n次测量所得的一系列值（称测量

列），每次测量的随机误差分别为Δx_1、Δx_2、…、Δx_n，待测量的真值为a。由式（1）求和得

$$(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_n-a)=\Delta x_1+\Delta x_2+\cdots+\Delta x_n。$$

将上式展开整理后，并且等式两边除于n，则有

$$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)-a=\frac{1}{n}(\Delta x_1+\Delta x_2+\cdots+\Delta x_n)，$$

即

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}-a=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i}{n}\ . \qquad (3)$$

上式的意义是：测量列算术平均值的误差等于各测量值随机误差的平均值。由随机误差正态分布的第（3）、（4）特征可知，当$n\to\infty$时，$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i}{n}\to 0$，所以此时$\overline{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\to a$。

由此可得到以下结论：

（1）在确定的测量条件下，减小测量结果的随机误差的方法是增加测量次数。

（2）当测量次数充分多时，测量列的随机误差就趋向于零，测量列的算术平均值趋近于真值。因此，在有限次测量中，我们可取测量列的算术平均值作为近似的真值，称作最近真值或最佳值。

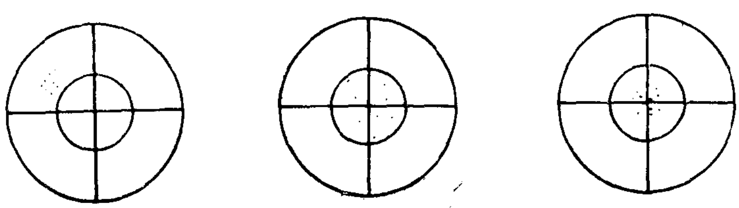
四、对测量结果的评价

在科学实验中，常用精密度、正确度和精确度来评价测量结果，这三个概念的涵义不同，使用时应加以区别。

1．精密度——表示测量结果中随机误差大小的程度。精密度反映了重复测量所得结果的离散程度，它是描述测量的重复性优劣的尺度。所谓测量精密度高，就是指多次测量的数据离散性小（即测量的重复性好），随机误差小（但系统误差的大小不明确）。

2．正确度——表示测量结果中系统误差大小的程度。正确度反映了测量值或实验所得结果与真值符合的程度，它是描述测量值接近真值程度的尺度。所谓测量的正确度高，就是指测量数据的平均值偏离真值的程度小，测量结果的系统误差小（但数据的离散程度，即随机误差的大小不明确）。

3．精确度——是测量结果中系统误差与随机误差的综合评定，表示测量结果与真值的一致程度。所谓测量的精确度高，反映了测量数据比较集中，且逼近于真值，即测量的随机误差与系统误差都比较小。在科学实验中，总希望尽量提高测量的精确度。



(a)　　(b)　　(c)

图2　打靶弹着点分布图

图2用打靶时弹着点的分布情况为例，分别说明上述三个术语的意义。图(a)表示射击的精密度高，但正确度较差，即随机误差小，系统误差大；图(b)表示射击的正确度高，但精密度较差，即系统误差小，随机误差大；图(c)表示精密度和正确度都较好，即精确度高，随机误差和系统误差都小。

五、绝对误差和相对误差

1. 绝对误差——测量值与待测量真值之间的差，称为绝对误差。以后将要介绍的标准偏差和极限偏差均为绝对误差。

由于待测量的真值是一个理想的值，是未知的，因此，在实际测量中一般用残余误差代替绝对误差。

残余误差——测量列中的一个测量值x_i和该测量列算术平均值$\overline{x}$之间的差，称为残余误差（简称为残差）：

$$\nu_i = x_i - \overline{x} \quad . \tag{4}$$

2. 相对误差——测量的绝对误差与待测量真值之比，称为相对误差：

$$E = \frac{|x_i - a|}{a} \times 100\%. \tag{5}$$

在实际测量中，相对误差又只能以“残差”来定义：

$$E = \frac{|x_i - \overline{x}|}{\overline{x}} \times 100\%. \tag{6}$$

3. 绝对误差、相对误差的意义

绝对误差可以评价某个测量结果的可靠程度，但比较在相同实验条件下的两个测量结果的可靠程度时，绝对误差就“无能为力”了。这时采用相对误差进行比较更为确切。例如，用感量为0.02 g的天平，在相同的条件下，测得两个物体的质量分别为1.00 g和100.00 g，绝对误差均为0.01 g（取感量的1/2为最大误差）。那么从绝对误差来看，对二者的评价是相同的。但从相对误差来看，前者的误差占测量值的1％，而后者仅占0.01％，当然后者测量的精确度比前者高得多。

有时作为被测量的物理量有公认值或标准值，则相对误差可用下式定义：

$$E = \frac{|\text{测量值} - \text{公认值}|}{\text{公认值}} \times 100\%. \tag{7}$$

§2 直接测量的误差估算

上一节已分别介绍了系统误差和随机误差，在以下的讨论中，我们假定测量中的系统误差已被减小到可以忽略或者已经补偿修正，只存在随机误差。

在等精度测量中，评价某一组测量数据的最粗略的办法是看数据分布的范围（指最大数据与最小数据的差距），当然以分布范围小较好。但这还很不够，还应进一步考虑在此范围内，绝大多数的数据是比较集中呢，还是比较分散（即测量列的离散程度）。在实际实验时，用以评价测量优劣的“标准偏差”，正是综合考虑了以上的两个重要因素。

一、测量列中单次测量的标准偏差（均方根偏差）

测量列中单次测量的标准偏差σ是表征同一待测量的n次测量所得结果的分散性的参数，可按下式计算：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n}}\,. \tag{8}$$

式中，n为测量次数（n应充分大）；Δx_i为测量值与待测量的真值之差，即$\Delta x_i=x_i-a$。

根据误差理论分析：当测量列中单次测量的标准偏差为σ值时，则此测量列中任一测量值的误差Δx_i在（$+\sigma$，$-\sigma$）区间之内出现的概率为68.3%。也就是说，若对某物理量作1000次同条件等精度测量，误差Δx_i出现在（$-\sigma$，$+\sigma$）区间的可能性约为683次。

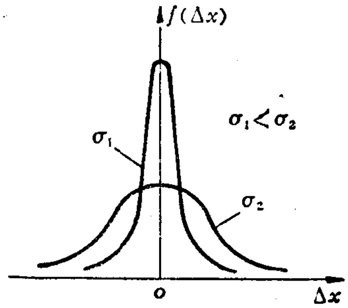


图3　σ的意义

标准偏差σ值的大小，反映了一组测量数据（测量列）的离散程度。如图3所示，σ值愈小，表示绝对值小的误差愈占优势，正态分布曲线愈尖锐，反映了测量列的离散性愈小，测量的精密度愈高，测量的可靠性愈大。

实际上，在有限次测量的情况下，一般用残差ν_i代替Δx_i，则标准偏差的估计值可按下式求得：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\nu_i^2}{n-1}}\,. \tag{9}$$①

式中，残差$\nu_i=x_i-\overline{x}$；n为测量的有限次数。这时标准偏差近似地遵从正态分布。

二、测量列算术平均值的标准偏差

测量列算术平均值的标准偏差$\sigma_{\overline{x}}$是表征同一个待测量的各独立测量列算术平均值分散性的参数。对于一组等精度测量数据的算术平均值，其误差值应比单次测量更小些（因为算术平均值比任何一次测量都更接近真值一些）。由误差理论可以证明，等精度测量中，各测量

① 为了计算方便，式（9）可直接用测量值来表示：

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\overline{x}x_i+\overline{x}^2)}{n-1}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+n\overline{x}^2}{n-1}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2/n}{n-1},$$

故

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2/n}{n-1}}\,.$$

列算术平均值的标准偏差值为测量列中单次测量的标准偏差值的$\frac{1}{\sqrt{n}}$倍：

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1} v_i^2}{n(n-1)}}. \qquad (10)$$

由上式可知，增加测量次数对于提高测量结果的精密度是有利的．然而，由于$\sigma_{\bar{x}}$与$\sqrt{n}$成反比，所以$\sigma_{\bar{x}}$的下降速率比n增长速率慢得多．因此，测量次数n也不必取得过多，取几十次左右即可（物理实验课中，只要求近似地估算$\sigma_{\bar{x}}$，一般取六次）．但测量次数n取得过少，测量数据将严重偏离正态分布．

三、直接测量结果的表示

根据以上的讨论，对于一列在相同条件下等精度测量的结果，可以表示成如下形式：

$$x=\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}}. \qquad (11)$$

上式的意义是：待测量x的最佳值是$\bar{x}$，误差区间$\bar{x}+\sigma_{\bar{x}}$到$\bar{x}-\sigma_{\bar{x}}$包含x的客观真值的概率是68.3%（注意：绝不可将$\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}}$理解为等于$x$的真值）．

我国和世界上许多国家在科学报告中都使用“标准偏差”，而在工程技术报告中一般使用“极限误差”．

由误差理论可知，随机误差绝对值大于3σ的概率约为0.3%，即在333次测量中只有一次误差的绝对值超过3σ范围．由于在一般测量中，测量次数很少超过几十次，因此可以认为绝对值大于3σ的误差是不可能出现的．通常把这误差称为“单次测量的极限误差”，用$\delta_{\lim}x$表示，即

$$\delta_{\lim}x=\pm3\sigma. \qquad (12)$$①

测量列算术平均值极限误的差计算方法与单次测量相同，但用算术平均值的标准偏差$\sigma_{\bar{x}}$代替式(12)中的σ：

$$\delta_{\lim}\bar{x}=\pm3\sigma_{\bar{x}}. \qquad (13)$$

当用极限误差表示测量结果时，应该具有下列的形式：

$$x=\bar{x}\pm3\sigma_{\bar{x}}. \qquad (14)$$

下面再介绍在几种特殊情况下，测量值随机误差的估算和测量结果的表示方法．

1．单独一次测量的误差估算及结果的表示

有些实验由于是在动态中进行测量的，不容许对被测量做重复测量；或有些实验的精密度要求不高；或在间接测量中，其中某一物理量的误差对最后的结果影响较小等．在这些情况下，可以对被测量只测量一次．

单独一次测量的误差，一般取仪器分度值d的一半．其测量结果可表示成

$$x=x_{测}\pm d/2. \qquad (15)$$

2．重复测量所得测量值相同时的误差估算及结果的表示

重复测量n次，如测量值不变，并不是测量误差为零，而是仪器的精度不足以反映测量的微小差异，其测量结果也可用式(15)表示．

① 这里介绍测量中错误数据的剔除依据——3σ准则：
如上所述，因在有限次的测量中，绝对值大于3σ的误差是不可能出现的，所以3σ还可用来确定测量列中异常数据的取舍．若测量列中某一测量值x_i的残差（x_i-x）是大于3σ的，则可将它剔除．

§ 3 间接测量的误差估算

物理实验中的测量，几乎都是属于将某些直接测量值，按照某种函数关系（测量公式）最终将待测量计算出来．这就是所谓“间接测量”．

计算间接测量值时，是将各直接测量列的最佳值(算术平均值)代入有关函数式求出的．由于直接测量列的最佳值都有一定的误差，因此计算得到的间接测量值也必然具有一定的误差．这称为误差的传递，其误差的大小取决于各直接测量误差的大小以及函数的具体形式．表示间接测量值误差与各直接测量值误差之间的关系式，称为“误差传递公式”．

一、间接测量值的误差公式之一

设间接测量值与若干个相互独立的直接测量值有下述函数关系：

$$N=f(x,\ y,\ \cdots).$$

式中，N为间接测量值；x、y、…表示直接测量值．对上式求全微分，得

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\cdots$$

式中，$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$…和$\mathrm{d}N$都是微小改变量．通常误差都远小于测量值，故可将$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、…和$\mathrm{d}N$看作误差，并分别用Δx、Δy、…和ΔN代替它们，则绝对误差公式可表示为

$$\Delta N=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right|+\cdots \tag{16}$$

相对误差公式可表示为

$$\frac{\Delta N}{N}=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\Delta x}{f}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\Delta y}{f}\right|+\cdots \tag{17}$$

对于具有积、商形式的函数式，则可对等式两边先取自然对数，然后求全微分，相对误差公式可表示为

$$\frac{\Delta N}{N}=\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x}\Delta x\right|+\left|\frac{\partial \ln f}{\partial y}\Delta y\right|+\cdots \tag{18}$$

例如：$N=x^a y^b z^c$，则根据上式或式(17)得其相对误差为

$$\frac{\Delta N}{N}=a\frac{\Delta x}{x}+b\frac{\Delta y}{y}+c\frac{\Delta z}{z}.$$

式(16)、(17)和式(18)即是间接测量误差传递的基本公式．

对式(16)和(17)，再补充说明几点：

1. 在计算随机误差时，由于误差的正或负是不可知的，为避免对间接测量的误差估计不足，所以两式中各项皆取其绝对值．

2. 用式(16)、(17)求间接测量的随机误差时，可近似地用标准偏差$\sigma_{\bar{x}}$、$\sigma_{\bar{y}}$、…取代Δx、Δy、…．

3. 各个偏导数(这里称作误差的传递系数)的值，均以各直接测量的算术平均值$\bar{x}$、$\bar{y}$、…代入计算．若系单独一次测量，则以单独一次测量值代入计算．

为了方便，我们将常用函数的误差传递计算公式列入下面表中，以备查用．

表1　常用函数的误差传递公式

函数表达式（测量关系）$N=f(x, y, z, \cdots)$	绝对误差 ΔN	相对误差 $\frac{\Delta N}{N}$
$N=x+y+z+\cdots$	$\Delta x+\Delta y+\Delta z+\cdots$	$\frac{\Delta x+\Delta y+\Delta z+\cdots}{x+y+z+\cdots}$
$N=x-y$	$\Delta x+\Delta y$	$\frac{\Delta x+\Delta y}{x-y}$
$N=xy$	$x\Delta y+y\Delta x$	$\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}$
$N=xyz$	$yz\Delta x+xz\Delta y+xy\Delta z$	$\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}+\frac{\Delta z}{z}$
$N=\frac{x}{y}$	$\frac{y\Delta x+x\Delta y}{y^2}$	$\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}$
$N=x^a$	$ax^{a-1}\Delta x$	$a\frac{\Delta x}{x}$
$N=\sqrt[a]{x}$	$\frac{1}{a}x^{\frac{1}{a}-1}\Delta x$	$\frac{1}{a}\frac{\Delta x}{x}$
$N=\sin x$	$(\cos x)\Delta x$	$(\mathrm{ctg}\, x)\Delta x$
$N=\cos x$	$(\sin x)\Delta x$	$(\mathrm{tg}\, x)\Delta x$
$N=\mathrm{tg}\, x$	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2\Delta x}{\sin 2x}$
$N=\mathrm{ctg}\, x$	$\frac{\Delta x}{\sin^2 x}$	$\frac{2\Delta x}{\sin 2x}$

由表一可见，在计算间接测量的误差时，为计算简便，除了直接测量值是相加、减的情况外，一般先求相对误差，然后将求得的相对误差与间接测量值相乘即可求出绝对误差。

下面举几个间接测量误差传递的例题。

例1　写出空心圆柱体体积的相对误差公式。

解　空心圆柱体的体积公式为

$$V=\frac{1}{4}\pi(d_2^2-d_1^2)L.$$

等式两边取自然对数

$$\ln V=\ln\frac{\pi}{4}+\ln(d_2^2-d_1^2)+\ln L.$$

对上式求全微分，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{\mathrm{d}(d_2^2-d_1^2)}{d_2^2-d_1^2}+\frac{\mathrm{d}L}{L}.$$

把微分号改为误差号，取各项绝对值相加，得相对误差为

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta(d_2^2)+\Delta(d_1^2)}{d_2^2-d_1^2}+\frac{\Delta L}{L}$$

$$=\frac{2d_2\Delta d_2+2d_1\Delta d_1}{d_2^2-d_1^2}+\frac{\Delta L}{L}.$$

例2　写出固体密度 ρ 的相对误差公式。

解　用流体静力称衡法测固体密度的公式为

$$\rho=\frac{m_1}{m_1-m_2}\rho_0.$$

式中，ρ为待测固体的密度；ρ_0 为水在标准状态下的密度；m_1为固体在空气中秤得的质量；m_2为固体浸没在水中秤得的质量。

对等式两边取自然对数，得

$$\ln\rho=\ln m_1-\ln(m_1-m_2)+\ln\rho_0.$$

对上式求全微分，得

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dm_1}{m_1}-\frac{dm_1}{m_1-m_2}+\frac{dm_2}{m_1-m_2}+\frac{d\rho_0}{\rho_0}.$$

如果ρ_0是从常用表中查出的，则可略去其误差。将微分号改为误差号，将各项绝对值相加，得相对误差为

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\left|\frac{-m_2}{m_1(m_1-m_2)}\right|\Delta m_1+\left|\frac{1}{m_1-m_2}\right|\Delta m_2 .$$

当m_1与m_2用同一架天平秤衡时，应有$\Delta m_1=\Delta m_2=\Delta m$，则上式变成

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{m_1+m_2}{m_1(m_1-m_2)}\Delta m.$$

该式即是固体密度的相对误差估算式。

以上讨论了间接测量误差和直接测量误差之间的关系，在式(16)、(17)中，由于无法判断各直接测量值的误差 Δx、Δy、…的实际正负符号，为避免对间接测量的误差估计不足，一般都从最不利的情况考虑，即将各误差项都取正值直接相加。其实，误差Δx、Δy、…的符号不会完全相同（有些是正值，有些是负值），它们传递给间接测量值时，会相互抵消一部分。因此，利用式(16)、(17)估算传递误差时，一般总是有些偏大。但如果将各项误差都取平方的形式，就可不受其符号的影响。

二、间接测量值的误差公式之二

当各项直接测量误差取平方形式时，标准偏差的传递公式为

$$\sigma_{\bar{N}}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_{\bar{x}}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_{\bar{y}}^2+\cdots} . \tag{19}$$

相对误差的传递公式为

$$\frac{\sigma_{\bar{N}}}{\bar{N}}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{f}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{f}\right)^2+\cdots} . \tag{20}$$

以上二式中，$\sigma_{\bar{x}}$、$\sigma_{\bar{y}}$、…为直接测量值x、y、…的标准偏差；$\sigma_{\bar{N}}$为间接测量值的标准偏差。

关于式(19)的推导，请参阅附录1。

依据式(20)，对于函数式$N=x^a y^b z^c$，可求出其相对误差为

$$\frac{\sigma_{\bar{N}}}{\bar{N}}=\sqrt{\left(a\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2+\left(b\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2+\left(c\frac{\sigma_{\bar{z}}}{\bar{z}}\right)^2} .$$

若将式(16)与式(19)相比较，可知用前式计算随机误差传递较简便，缺点是总合误差偏大，特别是当测量次数比较多时，总误差偏大的问题更为突出。然而，在物理实验课中，测量次数不会很多（一般 4～6 次），所以利用式(16)或式(19)得到的间接测量总误差值相差不大，为简便起见，一般仍可采用(16)式。