理论物理简明教程

华南工学院　马瑞霖
中山大学　彭少麒
编

国防工业出版社

理论物理简明教程

华南工学院　马瑞霖
中山大学　彭少麒
编

国防工业出版社

内容简介

本书是在原来高等学校理科的理论物理和固体物理教材的基础上，根据工科有关专业的需要，精选内容组编而成。内容包括分析力学、热力学、经典统计物理、量子力学、量子统计、固体物理等六章。取材力求简明扼要，叙述力求深入浅出。在着重阐述物理概念的同时，必要的数学推导也较详尽。

本书可作为高等工科院校对物理基础理论知识要求较高的有关专业（如电真空器件，电真空技术与物理，半导体器件，激光技术，无线电元件与材料，磁性材料与器件，无线电陶瓷与器件，物理化学，金属热处理，化工类有关专业等）的教材，也可供研究生和工程技术人员参考。

理论物理简明教程

华南工学院　马瑞霖
中山大学　彭少麒　编

*

国防工业出版社 出版
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16　印张17 7/8　418千字
1980年12月第一版　1980年12月第一次印刷　印数：0,001—7,100册
统一书号：15034·2127　定价：1.85元

前　言

本书是工科高等院校电子类电真空专业统编教材之一。

随着科学技术的迅速发展和不断更新，高等工科院校电子类有关专业的学生愈加有必要掌握理论物理和固体物理的基本理论。而这些教材过去一般是分科（分析力学，热力学，统计物理，电动力学，量子力学，固体物理等）编写的，对工科专业来说，内容偏多偏难。为此，我们将原来分属五门学科（电动力学除外）的内容综合成一本篇幅不大的简明教材，以便用较少时间讲授上述各门学科中最基本和最常用的内容。考虑到工科专业一般设有电工基础课程（包括电磁场理论），为了避免重复，本教材略去了电动力学部分。

编写中我们力求做到：把原来各学科的内容不只是形式地拼凑在一起而是有机地结合起来；删去一些枝节及过于繁难的内容而不损害理论的系统性；叙述明白易懂而不损害科学的严谨性；物理概念与数学表达互相补充，既不避开数学也不让数学掩盖了物理实质。虽然编者为此尽了最大努力，但是否真正达到了目的，还有待实践检验。

使用本教材时，读者应该掌握高等数学（包括初步的数理方程、线性代数、概率论等）、普通物理（包括狭义相对论）和电工基础（包括电磁场理论）等有关内容。

全书分六章，各章内容及讲授的参考时数为：

第一章	分析力学	8 学时
第二章	热力学	16学时
第三章	经典统计物理	24学时
第四章	量子力学	50学时
第五章	量子统计法	6 学时
第六章	固体物理	30学时

共计 134 学时。以上时间不包括带“*”的章节；这些内容一般较难，不作为基本内容，仅供参考或选用。使用本教材时，可根据学生程度及教学时数进行增删。例如，可对第四章及第六章进行较大幅度的删减，将课程压缩为约 100 学时；也可将带“*”内容全部讲授而把课程扩展为约 180 学时。

第一章至第五章由华南工学院马瑞霖编写，第六章由中山大学彭少麒编写。全书由华中工学院理论物理组主审，审阅者有张金如、雷式祖、刘祖黎、姚凯伦、吴大进、曹力等同志；参加审稿的还有西安交通大学石学儒同志。华南工学院陈剑惠同志仔细地校阅了全稿。他们提出了许多宝贵意见，对提高本教材的质量很有帮助。全书文稿、图稿由华南工学院梁秀珍同志誊写、绘制。在编写过程中还得到了各级领导及许多同志的积极支持及热情帮助。对以上所有的同志，编者表示衷心的感谢。

由于时间匆促，编者水平有限，错误及不妥之处在所难免，希望读者批评指正。

编　　者

目　录

第一章　分析力学

本章采用广义坐标系从能量的角度来研究经典力学。这样做的好处，除了在许多情况下使力学问题易于解决外，尤其重要的是，它易于把力学与物理学的其他分支联系起来。

我们限于讨论由质点组成的力学体系。本章选择的内容，与后述的统计物理、量子力学等章以及后继课程电子光学有密切联系。

§1.1　广义坐标

一个质点在空间的位置由它的矢径 $\boldsymbol{r}$ 所决定。矢径的分量与质点的笛卡儿坐标 x、y、z 相合，如图 1-1 所示。质点位置除可用笛卡儿坐标 x、y、z 来标示外，也可用其他坐标如球坐标 r、θ、φ 或柱坐标 ρ、φ、z 等来标示。不管用那一种坐标系，为了决定一个质点的位置，都要给定三个坐标。

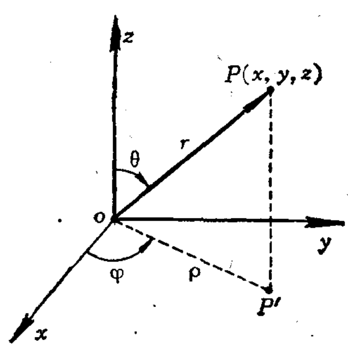

图　1-1

我们用"位形"这个词来简称一群质点在空间的位置。由上述可知，为了确定由 n 个质点组成的体系在空间的位形，需要给定 $3n$ 个坐标。如果各质点的位置之间存在着某些约束，体系的位形的变化就会受到限制；也就是说，描写位形的 $3n$ 个坐标不能独立地变动。例如，由 2 个质点组成的体系的位形，一般要用 6 个坐标来决定；如果 2 个质点之间的距离受约束而保持不变，6 个坐标之间要满足的约束条件是

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=d^2$$

这里的 (x_1, y_1, z_1) 及 (x_2, y_2, z_2) 分别为质点 1 及质点 2 的笛卡儿坐标，d 是两质点间的距离。为了描写距离不变的两质点体系的位形，我们可以不用上述的方法，而采用 x、y、z、α、β 等五个量。这里 x、y、z 是两质点的质量中心的笛卡儿坐标，α、β 是由质点 1 到质点 2 联线的方位角。就是说，对于这样的体系，可用五个独立的变量来描述其位形。

单值地确定一个体系的位形所必须给出的独立量的数目，叫做这体系的自由度。例如，上述距离不变的两质点体系的自由度为 5。

广义坐标就是能够完全确定某体系的位形的任意一组量。在上述例子中，x、y、z、α、β 这组量完全确定了距离不变的两质点体系的位形，因而这五个量就是该体系的广义坐标。若体系的自由度为 s，采用 s 个量即 $q_1, q_2, \cdots, q_s$，就能完全确定体系的位形。这里 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 就是体系的广义坐标。

一般地说，由 n 个质点组成的体系如果有 k 个约束，则这体系的自由度 $s=3n-k$，用 $(3n-k)$ 个广义坐标就能确定地描写其位形。研究体系的位形变化时，根据体系的特点，适当选择广义坐标，能使变量减到最少，这就避免了由于约束所引起的许多困难。同一个体系可以选取不同的广义坐标来描写其位形。

广义坐标可以是笛卡儿坐标，也可以是其他的量。我们仍以两个质点组成的体系来说明。如果这体系没有附加任何约束，则这个体系的自由度为6。为了确定地描写其位形，需要用6个广义坐标。它们可以是质点1及质点2的笛卡儿坐标（x_1，y_1，z_1，x_2，y_2，z_2），可以是它们的球坐标（r_1，θ_1，φ_1，r_2，θ_2，φ_2），也可以是另外一组六个量（x，y，z，r，α，β）。这里，x、y、z是质量中心的笛卡儿坐标，r是两质点间的距离，α、β是由质点1到质点2的联线的方位角。

广义坐标通常用字母q附加不同脚标来表记，如q_1，q_2，q_3，…，q_i，…

广义坐标的时变率称为广义速度，简记作$\dot{q}_i$，即$\dot{q}_i=\frac{dq_i}{dt}$。必须指出，广义速度不一定具有长度除以时间的量纲。例如，当q_i代表角度θ，$\dot{\theta}$代表角速，此时的$\dot{q}_i$就具有角速的量纲。

如果给出某时刻的广义坐标数值，力学体系在该时刻的位形也就确定了，但并不能预言体系在下一个时刻的位形。如果同时给出了广义坐标及广义速度，那末，根据体系的运动方程，就可决定体系在任一时刻的广义坐标及速度；也就是说，体系的运动状态完全确定了。

§1.2 拉格朗日方程

本节研究力学体系在广义坐标中的运动方程。拉格朗日方程就是这样一种运动方程。

一、一个质点的体系

根据牛顿第二定律，质点所受的外力$\boldsymbol{F}$等于质点的惯性质量m乘以质点的加速度，即

$$\boldsymbol{F}=m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \tag{1-1}$$

式中$\boldsymbol{r}$是质点的矢径。在笛卡儿坐标中，式（1-1）可按其分量写出：

$$F_x=m\frac{d^2x}{dt^2}=m\ddot{x},\quad F_y=m\ddot{y},\quad F_z=m\ddot{z} \tag{1-2}$$

式中，F_x、F_y、F_z分别代表力在x、y、z三个方向的分量。

现将质点位置以广义坐标q_1、q_2和q_3表示，并且坐标的转换满足下述关系：

$$x=x(q_1,q_2,q_3),\quad y=y(q_1,q_2,q_3),\quad z=z(q_1,q_2,q_3) \tag{1-3}$$

公式（1-2）是质点在笛卡儿坐标中的运动方程，这是我们熟知的。现在的任务是将式（1-2）转换到广义坐标中去。为此，依次用$\frac{\partial x}{\partial q_1}$、$\frac{\partial y}{\partial q_1}$、$\frac{\partial z}{\partial q_1}$分别乘以式（1-2）的三个方程，并把它们加起来，得到

$$m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=F_x\frac{\partial x}{\partial q_1}+F_y\frac{\partial y}{\partial q_1}+F_z\frac{\partial z}{\partial q_1} \tag{1-4}$$

令Q_1表示式（1-4）的右边，即

$$Q_1=F_x\frac{\partial x}{\partial q_1}+F_y\frac{\partial y}{\partial q_1}+F_z\frac{\partial z}{\partial q_1} \tag{1-5}$$

Q_1称为广义力。注意到

$$\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)-\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)$$

及对y、z的类似关系，可将式（1-4）改写为

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right]$$

$$-m\left[\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)+\dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)+\dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right]=Q_1 \tag{1-6}$$

考虑到 x、y、z 为时间的隐函数，把式（1-3）对时间求全微商，得

$$\dot{x}=\frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial x}{\partial q_3}\dot{q}_3 \tag{1-7}$$

从式（1-7）求 $\dot{x}$ 对 $\dot{q}_1$ 的偏微商，即得

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial x}{\partial q_1}$$

类似地得

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial y}{\partial q_1},\quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial z}{\partial q_1} \tag{1-8}$$

由于 x 是 q_1、q_2、q_3 的函数，故 $\frac{\partial x}{\partial q_1}$ 也是各个 q 的函数。于是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)\dot{q}_k=\frac{\partial}{\partial q_1}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q}_k=\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1},$$

可见求导数的次序可以交换，故

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1} \tag{1-9}$$

根据式（1-8）及（1-9），可将式（1-6）重写如下：

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1}+\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1}+\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1}\right)\right]-m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1}+\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}+\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1}\right)=Q_1 \tag{1-10}$$

如果已知质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \tag{1-11}$$

因而

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1}+\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1}+\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1}\right) \tag{1-12}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}=m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1}+\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}+\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1}\right) \tag{1-13}$$

将式（1-12）及（1-13）代入式（1-10），得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1 \tag{1-14}$$

假如力学体系是保守的，就是说，存在一个势能 U，且 U 只是位置（x，y，z）的函数，质点所受到的力是 U 的陡度的负值，即

$$\mathbf{F}=-\nabla U$$

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y=-\frac{\partial U}{\partial y},\quad F_z=-\frac{\partial U}{\partial z} \tag{1-15}$$

这样，Q_1 的表示式（1-5）可改写为

$$Q_1=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=-\frac{\partial U}{\partial q_1} \tag{1-16}$$

从式（1-16）可见，广义力 Q_1 的意义是 q_1 变更所引起的势能的减少。把式（1-16）代入式（1-14），可得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=-\frac{\partial U}{\partial q_1} \tag{1-17}$$

顺便提及，质点在重力场中具有势能 mgz（g 是重力加速度，z 是质点距参考水平面的高度）。因此，当忽略摩擦引起的能量耗散时，在重力场中运动的质点是保守系。静电场中某点的电位 Φ 只是该点位置的函数，若带电质点的引入及其运动对静电场的影响可以忽略时，则该带电质点具有势能 $e\Phi$（e 是带电质点的电荷），$e\Phi$ 只是位置的函数。因此，在静电场中运动的带电质点也是保守系。

现在我们引进一个新函数 L，它等于动能和势能的差，即

$$L=T-U \tag{1-18}$$

这个函数 L 称为拉格朗日函数。因为势能 U 只与位置 q_1、q_2、q_3 有关，而与 $\dot{q}_1$、$\dot{q}_2$、$\dot{q}_3$ 无关，即

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \tag{1-19}$$

于是式（1-17）可以改写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0 \tag{1-20}$$

这就是我们所求的拉格朗日方程在广义坐标 q_1 中的一个表示式。应用上述的同样步骤，可以得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0 \tag{1-21}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_3}=0 \tag{1-22}$$

式（1-20）～（1-22）合起来组成一个质点的用广义坐标表示的运动方程，即拉格朗日方程。

二、n 个质点的体系

设体系有 n 个质点，自由度为 s，故取 s 个广义坐标 q_1，q_2，…，q_s。

方法如前，只要注意到每个质点有其按牛顿定律写出的运动方程，如第 i 个质点

$$F_{ix}=m_i\ddot{x}_i,\quad F_{iy}=m_i\ddot{y}_i,\quad F_{iz}=m_i\ddot{z}_i$$

坐标的转换关系应改为

$$\left.\begin{aligned} x_i&=x_i(q_1,\ q_2,\ \cdots,q_s)\\ y_i&=y_i(q_1,\ q_2,\ \cdots,q_s)\\ z_i&=z_i(q_1,\ q_2,\ \cdots,q_s)\end{aligned}\right\} \tag{1-23}$$

对每个质点进行像式（1-4）那样的求和，即

$$\begin{aligned} Q_1&=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_1}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_1}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)\\ &=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_1}+\ddot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_1}+\ddot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)\end{aligned}$$

体系的动能

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}v_i^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2) \tag{1-24}$$

体系的势能是所有质点的位置的函数，即

$$U=U(x_1,\ y_1,\ z_1,\cdots,\ x_i,\ y_i,\ z_i,\ \cdots,\ x_n,\ y_n,\ z_n) \tag{1-25}$$

相应的广义力为

$$Q_1=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)=-\frac{\partial U}{\partial q_1} \tag{1-26}$$

我们在此不拟重复类似于获得式（1-20）的各个步骤，只将最后结果写出：

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_1}=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_s}=0\end{array}\right\} \tag{1-27}$$

共有 s 个形式完全相同的二阶微分方程。体系的运动便可由这组拉格朗日方程描述。

在有约束的情况下，拉格朗日方程的优越性显得特别清楚。对于包含 n 个质点及 k 个约束的体系，为了确定体系的运动状态，要联解 $3n$ 个牛顿方程及 k 个约束方程；但若适当选择广义坐标，便只需解（$3n-k$）个拉格朗日方程。

利用拉格朗日方程来解决力学问题，首要的是写出用广义坐标表示的拉格朗日函数。

先用广义速度表示动能。在笛卡儿坐标中，体系的动能用式（1-24）表示；为了将动能用广义速度表示，要将式（1-23）对时间取微商，得

$$\dot{x}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k,\quad \dot{y}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\dot{q}_k,\quad \dot{z}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{1-28}$$

将式（1-28）代入式（1-24）中，整理后得

$$T=\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{s}a_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l \tag{1-29}$$

式中，a_{kl} 是 $\dot{q}$ 的各二次项的系数，它是各个广义坐标的函数。应该指出的是，体系的动能是广义速度的齐次二次函数。

实际上，在许多情况下，我们不必采用上述步骤求动能 T。注意到质点的速率是其轨迹的弧长的时变率，即

$$v^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{(ds)^2}{(dt)^2}$$

因此，在相应的坐标系中若找到弧长 ds 的平方，将它除以 $(dt)^2$，就能得到 v^2。如在柱坐标中，

$$(ds)^2=(dr)^2+r^2(d\varphi)^2+(dz)^2$$

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2) \tag{1-30}$$

在球坐标中，

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta \, (d\varphi)^2$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \tag{1-31}$$

三、拉格朗日方程应用举例

1）图 1-2 是一个复合滑轮，滑轮 p_1 轴心固定不动，其弦的一端悬挂质量为 m_1 的物体，另一端悬挂滑轮 p_2，p_2 的弦分别悬挂质量为 m_3 及 m_2 的两个物体。假定弦长不变，弦重及摩擦可忽略，求 m_1 的加速度。

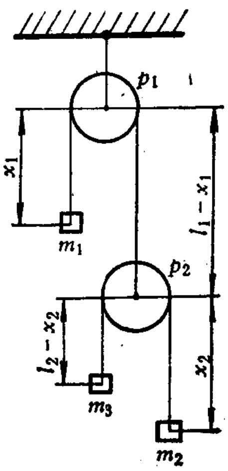

图 1-2

选择 x_1 及 x_2 为广义坐标，并以重力场方向为正，以 $x_1 = 0$ 处作位能的参考水平面。

m_1 的速度为 $\dot{x}_1$，m_2 的速度为 $(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$，m_3 的速度为 $-(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)$，故体系的动能

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2$$

体系位能

$$\begin{aligned} U &= -m_1 g x_1 - m_2 g (l_1 - x_1 + x_2) - m_3 g (l_1 - x_1 + l_2 - x_2) \\ &= -(m_1 - m_2 - m_3) g x_1 - (m_2 - m_3) g x_2 - (m_2 + m_3) g l_1 - m_3 g l_2 \end{aligned}$$

拉格朗日函数

$$L = T - U$$

拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

经过运算及整理后得

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}_1 - (m_2 - m_3)\ddot{x}_2 - (m_1 - m_2 - m_3) g = 0$$

$$-(m_2 - m_3)\ddot{x}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{x}_2 - (m_2 - m_3) g = 0$$

由此得

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2 + m_3}{m_2 - m_3}\ddot{x}_2 - g$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{2\, m_1 (m_2 - m_3)}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4\, m_2 m_3} g$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 - 4\, m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4\, m_2 m_3} g$$

通过此例我们看到，可以完全不必分析受力的情况而得出所需的结果。

2）研究一个质点在一个有心力场中的运动。

所谓有心力场是指这样的力场，质点的势能只是质点到力心的距离的函数，即势能

$$U = U(r) \tag{1-32}$$

由于问题的对称性，我们选择原点与力心重合的球坐标 r、θ、φ 为广义坐标。现在只有一个质点，体系自由度为 3，并且 $q_1 = r$，$q_2 = \theta$，$q_3 = \varphi$。

质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) \tag{1-33}$$

其拉格朗日函数为

$$L=T-U=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)-U(r) \tag{1-34}$$

相应的一组拉格朗日方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial r}\right)=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi}\right)=0\end{aligned}\right\} \tag{1-35}$$

将式（1-34）代入式（1-35），运算后得

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r})+\frac{dU}{dr}-mr(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)=0 \tag{1-36}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})-mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2=0 \tag{1-37}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi})=0 \tag{1-38}$$

可以看到，经度φ在上述方程组中的任一个都没有出现。而$\dot{\varphi}$可由式（1-38）的积分求得：

$$\dot{\varphi}=\frac{C}{mr^2\sin^2\theta} \tag{1-39}$$

式中，C是由起始条件决定的积分常数。以式（1-39）代入式（1-36）及（1-37），得

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m\dot{r})+\frac{dU}{dr}-mr\left(\dot{\theta}^2+\frac{C^2}{m^2r^4\sin^2\theta}\right)=0\\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})-\frac{C^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}=0\end{aligned}\right\} \tag{1-40}$$

我们看到，这问题实际上已化为两个自由度的问题了。这意味着有心运动是在一个平面上进行的。如果我们取运动平面是某一个φ为定值的子午面，亦即选取起始的$\dot{\varphi}=0$，于是$C=0$，上述结果便可简化为

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r})+\frac{dU}{dr}-mr\dot{\theta}^2=0 \tag{1-41}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0 \tag{1-42}$$

从式（1-42）马上得到

$$mr^2\dot{\theta}=\text{常数} \tag{1-43}$$

式（1-43）表示动量矩守恒。

由上述可得出有心运动的两个重要特点：运动是平面运动；质点对力心的动量矩守恒。

电子在荷正电的原子核的场中的运动可近似地看作以原子核为力心的有心运动，此时，

势能U的具体形式是

$$U=-\frac{Ze^2}{r} \tag{1-44}$$

这里，Z为原子序数，电子电荷为$-e$，核的荷电量为$+Ze$，以无穷远处为势能参考点。将式（1-44）代入式（1-41），便得到在核场中电子的运动方程，即

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(m\dot{r})+\frac{Ze^2}{r^2}-mr\dot{\theta}^2=0\\ &\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0 \end{aligned}\right\} \tag{1-45}$$

我们不在这里解这个方程了，只是一般地指出其结果：当电子能量（$T+U$）<0时，电子绕核作椭圆运动；当能量（$T+U$）>0时，运动轨迹是一条双曲线。作为练习，读者可自行解之。

§1.3 哈密顿正则方程

拉格朗日方程是处理力学问题的一个很有力的工具。但是，用能量及广义坐标表示的运动微分方程式不单只是拉格朗日方程，还有另一种形式也用得很普遍。这就是哈密顿正则方程，它和量子力学有直接联系。

一、广义动量

设体系的广义坐标为q_1，q_2，…，q_s，对应于每个q_k，可以定义一个广义动量

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{1-46}$$

式中，L为拉格朗日函数，$\dot{q}_k$是广义速度。

广义动量与我们一般所说的动量有什么联系呢？在简单的情况下，广义动量与一般所说的动量含义相同。例如，对于一个只作一维运动的自由质点，广义坐标只有一个，记为x，其拉格朗日函数$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$，其广义动量$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$，即质量乘速度。在一般情况下就不是这样，例如，受约束只能作圆周运动的质点，其自由度为1，取方向角θ为广义坐标，$L=\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$，广义动量$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$，可见广义动量是动量矩。

二、哈密顿正则方程

拉格朗日函数是广义坐标和广义速度的函数，它的全微分

$$dL=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_k}dq_k+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}d\dot{q}_k \tag{1-47}$$

根据广义动量的定义式（1-46）及拉格朗日方程式（1-27），上式可化为

$$dL=\sum_{k=1}^{s}\dot{p}_k dq_k+\sum_{k=1}^{s}p_k d\dot{q}_k \tag{1-48}$$

上式右边第二项可写为

$$\sum_{k=1}^{s}p_k d\dot{q}_k=d\left(\sum_{k=1}^{s}p_k\dot{q}_k\right)-\sum_{k=1}^{s}\dot{q}_k dp_k \tag{1-49}$$

将式（1-49）代入式（1-48）中，得到

$$d\left(\sum_{k=1}^{s} p_k \dot{q}_k - L\right) = -\sum_{k=1}^{s} \dot{p}_k dq_k + \sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k dp_k \tag{1-50}$$

定义

$$H = \sum_{k=1}^{s} p_k \dot{q}_k - L \tag{1-51}$$

于是式（1-50）变为

$$dH = -\sum_{k=1}^{s} \dot{p}_k dq_k + \sum_{k=1}^{s} \dot{q}_k dp_k \tag{1-52}$$

从式（1-52）可以看到，H只是各个q_k及p_k的函数，称作哈密顿函数

$$H = H(q, p)$$

式中，q及p代表各个q_k及p_k。

对$H(q, p)$取微分，可得

$$dH = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \tag{1-53}$$

将式（1-53）与（1-52）对比，可得

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k, \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad (k = 1, 2, \cdots, s) \tag{1-54}$$

式（1-54）称为哈密顿正则方程，简称哈密顿方程，包括$2s$个形式完全相同的一阶微分方程。联解这$2s$个一阶微分方程，会出现$2s$个积分常数，这些积分常数由起始条件决定。若已知体系在某时刻的各个广义坐标及广义动量的数值，根据这$2s$个已知值就可决定$2s$个积分常数，于是体系在各个时刻的状态，也就是体系的运动状态就完全确定了。

由此可见，一个自由度为s的力学体系可以用包含$2s$个一阶微分方程的哈密顿方程来描写其运动状态，也可以用包含s个二阶微分方程的拉格朗日方程来描写。这两种方法是完全等效的，它们的积分解都包含$2s$个积分常数，要由$2s$个起始条件来决定。

三、哈密顿函数的物理意义

在作一般讨论之前，我们先看一个简单情形，即体系是只有一个质点的保守系，取值卡儿坐标为广义坐标。这时，

$$L = T - U = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

根据哈密顿函数的定义式，

$$H = (p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z}) - L$$

广义动量p_x、p_y、p_z分别为$m\dot{x}$、$m\dot{y}$、$m\dot{z}$，于是

$$H = (m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2) - L = 2T - L = T + U \tag{1-55}$$

我们看到，在此情况中，哈密顿函数就是体系的动能与位能之和，即体系的能量。

现在讨论较一般的情形，体系是具有s个广义坐标$q_1, q_2, \cdots, q_s$的保守系。我们已

经证明过，这时，体系的哈密顿函数H只是各个q_k及p_k的函数；H的时变率

$$\dot{H}=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k \tag{1-56}$$

将哈密顿方程（1-54）代入此式，得

$$\dot{H}=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}=0 \tag{1-57}$$

这就是说，在保守系中，哈密顿函数不随时间变化。我们马上联想到，保守系的能量不随时间变化，哈密顿函数是否就是体系的能量呢？果然如此，下面就来证明这一点。

依式（1-46）的定义，注意到保守系的势能只是坐标的函数，即势能U与各广义速度$\dot{q}_k$没有明显关系，于是

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \tag{1-58}$$

$$H=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L \tag{1-59}$$

从式（1-29）可知，T是广义速度的齐次二次函数。根据欧勒的齐次函数定理●，应有

$$\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k=2T \tag{1-60}$$

由此得到

$$H=T+U \tag{1-61}$$

就是说，哈密顿函数等于体系的总能量。但是要强调指出，它是用广义坐标q和广义动量p来表示的函数，而不用q及$\dot{q}$来表示。

四、哈密顿函数举例

1）自由质点　取广义坐标为x、y、z，

$$L=T=\frac{1}{2}m\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x},\quad p_y=m\dot{y},\quad p_z=m\dot{z}$$

$$H=T=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2) \tag{1-62}$$

● $T=\sum a_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l$，将所有$\dot{q}$都乘以因子$\lambda$，必有$\lambda^2T=\sum a_{kl}(\lambda\dot{q}_k)(\lambda\dot{q}_l)$，可见

$$\lambda^2T(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_s)=T(\lambda\dot{q}_1,\lambda\dot{q}_2,\cdots,\lambda\dot{q}_s)$$

将上式左右两边对λ求导数，得到

$$2\lambda T(\dot{q})=\dot{q}_1\frac{\partial T(\lambda\dot{q})}{\partial(\lambda\dot{q}_1)}+\dot{q}_2\frac{\partial T(\lambda\dot{q})}{\partial(\lambda\dot{q}_2)}+\cdots+\dot{q}_s\frac{\partial T(\lambda\dot{q})}{\partial(\lambda\dot{q}_s)}$$

式中，以$T(\dot{q})$表示$T(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_s)$，$T(\lambda\dot{q})$表示$T(\lambda\dot{q}_1,\lambda\dot{q}_2,\cdots,\lambda\dot{q}_s)$。令$\lambda=1$，便得到

$$\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k=2T$$

2）保守力场中的质点　取广义坐标为 x、y、z，势能为 $U(x, y, z)$，因此

$$H = T + U = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z) \tag{1-63}$$

3）一维谐振子　设质点与其平衡位置的偏离为 x，则势能 $U = \frac{1}{2}Kx^2$，取 x 作广义坐标，

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \tag{1-64}$$

按哈密顿方程，

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Kx \tag{1-65}$$

式中，$\dot{p}$ 代表振子所受的力。也就是说，振子所受的力与其偏移成正比，K 为比例系数。

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \tag{1-66}$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \tag{1-67}$$

解式 (1-67) 可得

$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{1-68}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \tag{1-69}$$

式中，A 和 B 是决定于起始条件的积分常数，ω 为谐振频率。

4）库仑场中的电子　这里库仑场是指荷电量为 Ze 的原子核所引起的向心力场。根据§1.2 的讨论，电子的运动是平面运动，取广义坐标为 r 及 φ，

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), \quad U = -\frac{Ze^2}{r}$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

$$H = T + U = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) - \frac{Ze^2}{r} \tag{1-70}$$

五、非保守系

至今为止我们的讨论全部是针对保守系的。也就是说，假定存在一个势能 U，U 只是位置的函数，质点所受到的力是 U 的陡度的负值。如果不满足上述条件，体系就是非保守的，情况会怎样呢？

我们先研究如下情况，存在一个势能 U，质点所受到的力是 $-U$ 的陡度，但 U 不只是位置的而且还是时间的函数。这时，前节的 Q_i 的表示式 (1-26)、拉格朗日方程 (1-27) 和哈密顿正则方程 (1-54) 仍然成立。拉格朗日函数的定义 $L = T - U$ 仍然不变。哈密顿函数 H 仍然是体系的动能与势能之和 $T + U$。不同的是，这时 L 及 H 都是时间的函数了，即

$$L = L(q, \dot{q}, t) \tag{1-71}$$

$$H = H(q, p, t) \tag{1-72}$$

H的时变率 $\dot{H}$ 不再为零了。

在§1.2中我们已指出，带电质点在静电场中的运动是保守系。如果各电极间的电压不是直流电压而是交变电压，当电压变化较缓慢，电压变化所引起的磁场效应可以忽略，并且不考虑带电粒子的引入及其运动所引起的影响时，势能U便是位置及时间函数，而带电质点所受的力仍是U的陡度的负值。

当摩擦力存在时，力与速度有依赖关系，速度愈快，摩擦力愈大，能量耗散愈多，在这种情况下，式（1-27）的拉格朗日方程及式（1-54）的哈密顿正则方程不再成立。摩擦耗散的能量将转化为热，这已不是一个纯粹的力学问题了，我们留到第二章热力学中再加叙述。

力与速度有关的另一种重要情况是带电质点在磁场中的运动。这时质点将受到一个垂直于其速度及磁场的力，即所谓洛伦兹力，我们将在下一节讨论它。

*§1.4　带电质点在电磁场中的运动

一、电磁场中的拉格朗日方程

根据电磁场原理，荷电量为e的带电质点在无媒质（即真空）的场中所受的力

$$\boldsymbol{F}=e\boldsymbol{E}+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} \tag{1-73}$$

式中，$\boldsymbol{E}$是电场强度，$\boldsymbol{v}$是带电质点速度，$\boldsymbol{H}$是磁场强度，c是光速，采用的单位是高斯制。式中右边的第二项是磁场引起的洛伦兹力，它总是与带电质点的运动方向相垂直的，因而这个力将不作功。

真空中的电磁场应满足麦克斯韦方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1-74}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1-75}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0 \tag{1-76}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{1-77}$$

由于$\boldsymbol{H}$的散度为0，因此可以引入一个矢量磁位$\boldsymbol{A}$，将$\boldsymbol{H}$表示为$\boldsymbol{A}$的旋度，即

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1-78}$$

于是

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{1-79}$$

式中，Φ称为标量电位。

以上我们复习了电磁场的一些基本原理，现在回到本题。我们的目的是研究能否应用拉格朗日方程来描述带电质点在电磁场中的运动；或者换一个提法，如果形式如式(1-27)那样的拉格朗日方程成立的话，那末，拉格朗日函数代表什么？

研究的结果表明，如果定义拉格朗日函数为

$$L=T-e\Phi+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1-80}$$