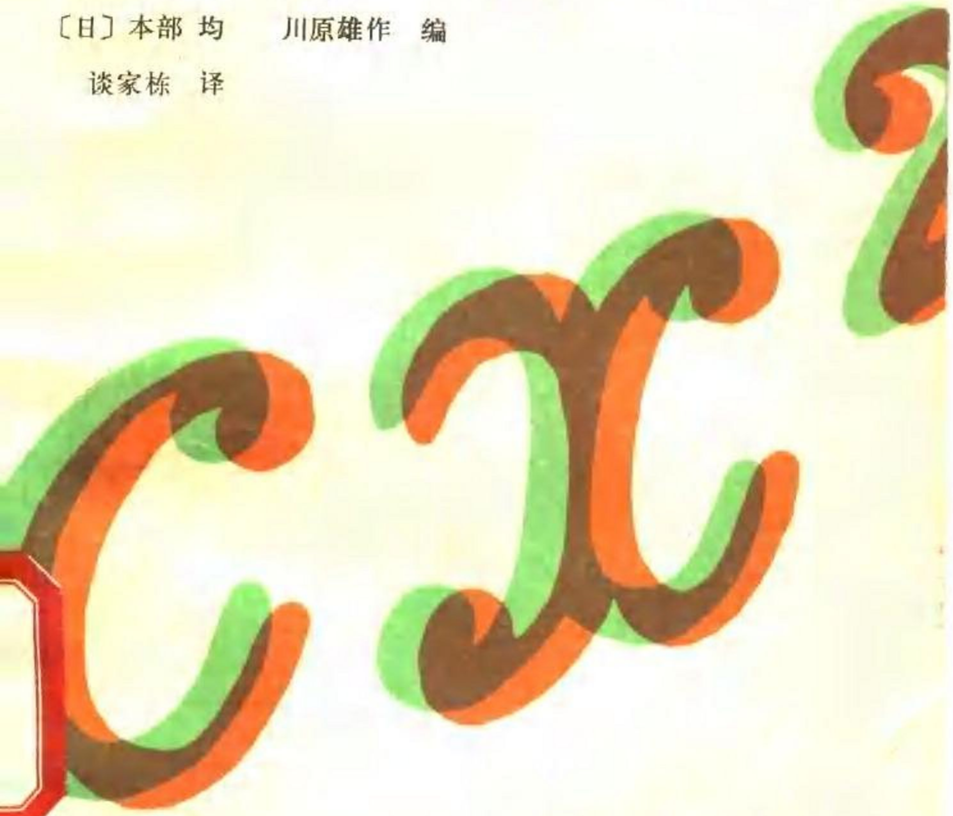
# 数列和一元微积分学习辅导

试题例选

〔日〕本部 均　川原雄作　编

谈家栋　译



天津人民出版社

# 数列和一元微积分学习辅导（试题例选）

（日）东海大学 本部均
东京理科大学 川原雄作 编
谈家栋 译

天津人民出版社

**数列和一元微积分**
**学习辅导(试题例选)**
(日) 本部 均、川原雄作 编
谈家栋 译
*
天津人民出版社出版
(天津市赤峰道124号)
天津新华印刷二厂印刷 天津市新华书店发行
*
787×1092毫米 32开本 5.5印张 112千字
1983年12月第1版 1983年12月第1次印刷
印数：1—28,600
统一书号：7072·1313
定 价： 0.61元

# 译者序

一元微积分已经作为中学的教材了.在大学,微积分是基础课,着眼于理论、应用,为后续课程服务.在中学引进微积分,则要求解决与初等数学各分支(代数、几何、三角等)综合联系的问题.在这个意义上,合适的参考资料比较少.因此,迫切需要一本在这方面可以指导中学数学教师教学,帮助高中学生学习的参考书.

日本东海大学教授本部均博士和东京理科大学教授川原雄作博士合编的《数学ⅡB入学试题正解法225例》中的数列与微积分部分,可以弥补这个缺陷.它着重解决概念的透彻理解及公式的正确运用,特别在微积分和传统初等数学内容的结合上,处理得好,很多解题的方法,机敏巧妙,给人以启迪.所以将这部分摘译奉献给我国的读者,希望能为我国数学教学的现代化添砖加瓦.

承编者川原雄作教授的关心,在内容上又来信作了一些修改,在此表示衷心感谢.翻译完成后,又经武汉大学齐民友教授、熊全淹教授审校.李元衡同志作了全书的核对校正工作,在此一并表示由衷的感谢.

谈家桢

1982年春节

# 本书的用法

一、在各节前面所列内容提要里，揭示了解答问题的基本思路、处理方法以及主要的法则、公式，读者对这些要很好地理解、掌握. 记忆不确的公式，要经过自己推证确认，只要反复运用二、三次，就能自然而然地掌握住了.

二、每节例题与练习题合计7—9题，这对于内容提要的应用是最为重要的，应通过反复练习，独立地一题不剩地作出解答. 如果开始时，仅凭“提示”还找不到解题的线索，可以翻看答案或者先做比较顺手的习题.

三、本书的目的在于帮助曾学过数列与一元微积分的读者把学力提高. 估计他们都懂得基础知识、概念和公式，因此可以从任何章节开始阅读. 当然，最好是从自己学习的较薄弱环节开始，然后涉及全面.

等到能解答练习题后，应该注意尽量多做测验题，习题务必要不断地做下去.

再则，在填空的问题中，要求“在$\boxed{\quad}$处填入适当的式子”. 为了节约篇幅，解答中多半予以省略，希读者自行作出适当的判断.

编　者

# 本书所用主要公式

## 一、数列

1．等差数列

首项是$a$，公差是$d$时，

第$n$项　$a_n = a + (n-1)d$，

前 $n$ 项的和　$S_n = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)d]$。

2．等比数列

首项是$a$，公比是$r$时，

第$n$项　$a_n = ar^{n-1}$，

前 $n$ 项的和　$S_n = \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1), \\ na & (r = 1). \end{cases}$

3．数列的和

(1)　$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(2) 化成其它数列差的形式

例如：$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right).$$

(3) 利用等比数列的和导出解法

例如： $S=1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1}\quad(r\neq1)$.

作出 $S-rS$来。

4. 已知数列$\{a_n\}$前$n$项的和$S_n$，

$$a_1=S_1,\quad a_n=S_n-S_{n-1}\quad(n\geqslant2).$$

5. 已知数列$\{a_n\}$的递差数列$\{b_n\}$

$$b_n=a_{n+1}-a_n\quad(n\geqslant1),$$

$$a_n=a_1+(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}).$$

6. 递推式 $a_{n+1}=pa_n+q\quad(p\neq1)$.

对满足 $a=pa+q$的$a$，数列$\{a_n-a\}$是等比数列.

7. 二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^r a^{n-r}b^r.$$

## 二、微分法

1. 导函数

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

2. 积的导数

$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$(x^n)'=nx^{n-1},$$

$$[(x-a)^n]'=n(x-a)^{n-1}.$$

3. 过曲线$y=f(x)$上的点$(a,\ f(a))$的切线方程是

$$y-f(a)=f'(a)(x-a).$$

4. 关于方程$f(x)=0$的实数根以及不等式$f(x)\geqslant0$的证明，可从$f(x)$的增减性考虑.

例如，三次方程 $f(x)=0$ 有三个不相等的实数根 $\Longleftrightarrow$

$f(x)$具有符号相反的极值.

## 三、积分法

1. 函数$f(x)$的不定积分

若有 $F(x)$，使 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

2. $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ （$n$是自然数）.

$$\int (x-a)^n dx=\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}+C.$$

3. 定积分

(1) 如果 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a).$$

(2) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$.

4. 二曲线所围的面积

在区间$[a,\ b]$上，两曲线$y=f(x)$，$y=g(x)$所围的面积是

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx.$$

5. 立体的体积

当垂直数轴的截口面积是$S(x)$时，在区间$[a,\ b]$上的立体体积$V$是

$$V=\int_a^b S(x)\,dx.$$

6. 旋转体的体积

在区间[$a$, $b$]上的曲线 $y=f(x)$ 绕$x$轴旋转，所得旋转体的体积$V$是

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

# 目 录

## 问 题 篇



## 解 答 篇

# 问 题 篇

# §1 等差、等比数列和数学归纳法

## 内 容 提 要

### 一、等差数列

首项是$a$，公差是$d$时：

1．$\{a_n\}$是等差数列$\Longleftrightarrow a_{n+1}-a_n=d$(公差)；

$$a_n=a+(n-1)d.$$

2．前$n$项的和$S_n$：

(1)用首项$a$，末项$a_n$，项数$n$表示；

(2)用首项$a$，公差$d$，项数$n$表示．

### 二、等比数列

1．$\{a_n\}$是等比数列$\Longleftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$(公比)；

$$a_n=ar^{n-1}(a\text{是首项}).$$

2．等比数列的和，分$r=1$，$r\neq1$两种情形．

### 三、数学归纳法

证明关于自然数$n$的命题$P_n$要有(Ⅰ)，(Ⅱ)两步．

(Ⅰ) 当$n=1$时，$P_n$成立；

(Ⅱ) 假设命题当$n=k$时成立，能证明$n=k+1$时也成

立.

证明时,用(Ⅱ′)代替(Ⅱ)也行.

(Ⅱ′)　假设$n\leqslant k$时命题成立，证明$n=k+1$时也成立.

## 出 题 要 点

单纯是等差数列的题目比较少见，一般主要是以小问形式的基本题. 多数是倾向于与整数有关的综合题.

数学归纳法以等式的证明以及比较费工夫的不等式证明为主.

**例1**　(等差数列)

首项是1的等差数列前$n$项的和，与这项之后$3n$项的和之比，对任意的$n$都是常数，求这个比的值以及公差.

分析：设前$n$项的和是$S_n$,这之后$3n$项的和是$S_{4n}-S_n$,由题意$S_n:(S_{4n}-S_n)$是常数，它对所有的整数$n$都成立.

解：设等差数列公差是$d$, ∵　首项是1，∴　前$n$项的和$S_n$是

$$S_n=\frac{n}{2}[2+(n-1)d]. \quad ①$$

第$n$项后的$3n$项和是

$$S_{4n}-S_n=\frac{4n}{2}[2+(4n-1)d]-\frac{n}{2}[2+(n-1)d]=\frac{n}{2}[6+(15n-3)d]. \quad ②$$

从第$n+1$项开始到第$4n$项止的和.

由题意令$\dfrac{S_n}{S_{4n}-S_n}=k$　　（常数）．

由①，②得

$2+(n-1)d=k[6+(15n-3)d]$，

∴　$(15k-1)dn+(6k-3kd+d-2)=0$.

∵　上式对任意的$n$都成立，

∴　$(15k-1)d=0$，　③

$6k-3kd+d-2=0$.　④

$An+B=0$对任意的$n$都成立$\Longleftrightarrow A=0, B=0$.

由③得　$d=0$　或　$k=\dfrac{1}{15}$.

根据④式，

当$d=0$时，$k=\dfrac{1}{3}$；

当$k=\dfrac{1}{15}$时，$d=2$.

∴　比值是$\dfrac{1}{3}$，公差是0或者比值是$\dfrac{1}{15}$，公差是2．（答）

**例2**（数学归纳法）当$n$是正整数时，用数学归纳法证明下述不等式

$$\frac{(n+1)^3}{3}>1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2.$$

分析：对于归纳法的第Ⅱ步证明，在$n=k$时的不等式两边加上$(k+1)^2$，再与$\dfrac{(n+2)^3}{3}$比较．

证：$\dfrac{(n+1)^3}{3}>1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.　　①

（Ⅰ）$n=1$时，左边$=\dfrac{2^3}{3}=\dfrac{8}{3}$；右边$=1$。

∴　当$n=1$时，①式成立.

（Ⅱ）　假设$n=k$时，①式成立，

即
$$\frac{(k+1)^3}{3}>1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2,$$

上式两边同加$(k+1)^2$得

$$\frac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2>1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2.$$

$$\because\quad \frac{(k+2)^3}{3}-\left[\frac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[(k+1)+1\right]^3-\frac{1}{3}(k+1)^3-(k+1)^2$$

$$=k+\frac{4}{3}>0,$$

将$\dfrac{(k+2)^3}{3}$与$\dfrac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2$比较.

$$\therefore\frac{(k+2)^3}{3}>\frac{(k+1)^3}{3}+(k+1)^2>1^2+2^2+\cdots+(k+1)^2.$$

故不等式①在$n=k+1$时也成立.

∴　由数学归纳法，不等式①对一切正整数$n$成立.

## 练 习 题

1. 设$r$是等比数列$a_1, a_2, \cdots, a_n$的公比，用$a_1$和$r$表示下列两个和

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n},$$

求 $\frac{S}{T}$. 其中$r \neq 0$，$r \neq 1$.

2. 设首项为$a$，公差为 $-\frac{1}{a}$的等差数列$\{a_n\}$前$n$项的和为$S_n$，试回答下列问题，其中$a$是正数：

(1) 求$S_2$，$S_3$，$S_5$；

(2) 如果$S_2$，$S_3$，$S_5$顺次构成等比数列时，$a$是怎样的数？

3. 等比数列第 1 项到第 4 项的和是240，第 2 项与第 4 项的和是180，求这数列的首项.

4. (1) 说明前$n$项的和是$3n(n+5)$的数列是等差数列，求它的首项及公差；

(2) 前$n$项的和用$an^2 + bn + c$（$a$，$b$，$c$是常数）表达的数列是等差数列吗？并说明理由.

5. 证明 $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

6. 数列$\{a_n\}$是这样确定：

$a_1 = 1$，$4a_k a_{k+1} = (a_k + a_{k+1} - 1)^2$，$a_k < a_{k+1}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$.

(1) 求$a_2$，$a_3$，$a_4$，并由此推断$a_n$；