



航空摄影测量第四册

解析空中三角测量

武汉测绘学院航测系编

测绘出版社

航空摄影测量第四册

解析空中三角测量

武汉测绘学院航测系编

测绘出版社

为适应我国航测生产需要，组织编写了这套航空摄影测量专业读物，以1:1万比例尺测图为主，按工序较为详细地阐述了航测内外业成图的基础理论、基本方法、主要仪器和具体作业过程。可供航测生产人员和航测专业师生参考。

全书共分七册：第一册《航空摄影测量基础知识》；第二册《摄影处理与象片纠正》；第三册《象片连测与象片调绘》；第四册《解析空中三角测量》；第五册《立体量测仪测图》；第六册《多倍仪测图》；第七册《精密立体测图仪测图》。

本册较系统地介绍航空摄影测量中解析空中三角测量的基本理论与电算加密的作业方法。内容有：象点坐标的系统误差改正；单航带解析空中三角测量的理论与精度估算；航带法、独立模型法、光线束法三种区域网法的基本理论；TQ-16计算机上的航带法区域网加密的作业方法；TQ-16计算机程序设计基础。书后附有矩阵的基本运算基础。

航空摄影测量第四册

解析空中三角测量

武汉测绘学院航测系编

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ ·印张 $7^{9/16}$ ·插页1·字数203千字

1979年4月第一版·1979年4月第一次印刷

印数1—12,800册·定价0.70元

统一书号：15039·新96

目 录

第一章 概 述.....	(1)
第二章 象点坐标的系统误差改正.....	(3)
第一节 象点坐标系统误差引起的模型变形.....	(3)
第二节 象点坐标系统误差的改正.....	(6)
第三章 单航带解析空中三角测量的理论.....	(11)
第一节 坐标系统与坐标变换.....	(11)
第二节 不带模型连接条件的相对定向.....	(20)
第三节 带模型连接条件的相对定向.....	(36)
第四节 航带网的绝对定向.....	(43)
第五节 航带网的非线性变形的改正.....	(55)
第六节 测图预备成果的计算.....	(66)
第七节 单航带解析空中三角测量的精度估算.....	(72)
第四章 解析空中三角测量的区域网法.....	(87)
第一节 区域网加密的航带法.....	(88)
第二节 区域网加密的独立模型法.....	(98)
第三节 区域网加密的光线束法.....	(101)
第五章 电算加密的生产作业过程.....	(104)
第一节 选刺点.....	(107)
第二节 象片量测.....	(112)
第三节 编写观测手簿及填写信息.....	(122)
第四节 数据穿孔及上机计算.....	(128)
第五节 计算成果的分析及整理.....	(137)
第六章 程序设计基础.....	(144)
第一节 TQ-16 数字电子计算机简介.....	(145)

第二节	TQ-16 机上采用的数制	(150)
第三节	数在 TQ-16 机中的存贮形式	(155)
第四节	TQ-16 机的指令形式	(158)
第五节	算术程序设计.....	(160)
第六节	分支程序设计.....	(164)
第七节	循环程序设计.....	(169)
第八节	子程序及地址的浮动方法.....	(177)
第九节	逻辑操作指令的运用.....	(183)
第十节	外部设备操作指令的运用.....	(187)
附录(一)	矩阵和矩阵的运算.....	(190)
附录(二)	“航带法区域网平差 TQ-16 机程序”中部分子程序	(210)
附录(三)	TQ-16 机指令系统表	(229)

第一章 概 述

随着我国电子技术和电子工业的迅速发展，解析空中三角测量已成为我国航测生产作业中广泛使用的作业方法。

解析空中三角测量是以航摄像片上量得的象点坐标为依据，采用较严密的数学公式，按最小二乘法的原理，使用电子数字计算机解求待定点的地面平面坐标和高程。这种方法与辐射三角测量、多倍仪空中三角测量、无扭曲模型法等航测内业加密方法比较，具有精度高、速度快的优点。除此之外，对于航摄机物镜畸变差、摄影材料的变形、地球曲率、大气折光差等物理因素引起的象点误差，可用计算的方法逐点加以改正。

由于这些特点，采用解析空中三角测量进行航测内业加密，可以加大野外控制点之间的跨度，减少野外控制测量的工作量。

目前生产中采用的解析空中三角测量有两种方法：单航带法；区域网法。

单航带法的主要过程：

一、相对定向。一般利用每个象片对中六个定向点上的观测值 x, y, p, q ，经过一定的化算，按相对定向作业公式列出误差方程式，依照最小二乘法原理计算出相对定向元素。相对定向元素一般都是选用右方象片的角元素 φ, ω, κ 及线元素 B_y, B_z （带有模型连接的条件时还要加入 B_x ），若其定向点上的残余上下视差均小于某一限定的数值时，就认为相对定向工作完成。

二、模型连接。模型连接的目的在于统一模型的比例尺，有两种方法可供选用。

一种是利用相邻模型的公共连接点（即主点附近的点，以及离主点上下较远的点）在前后两个模型求得航高应当相等的条件，把后一个模型归化至前一个模型上去，构成统一比例尺的航

带网。

另一种方法是相对定向在带有连接条件的情况下计算出相对定向元素，即在相对定向计算过程中，不仅要使定向点上的残余上下视差小于某一个限值，而且还要使公共连接点的坐标 x 、 y 、 z 在前后两个模型中相等，这样在相对定向结束的同时也完成了模型的连接，构成统一比例尺的航带网。

三、航带网的绝对定向和非线性变形的改正。应用航带中的平高控制点（至少两个平高控制点，一个高程控制点）经过一个三维线性变换完成了航带网的绝对定向，而航带网的非线性变换，是通过二次多项式或三次多项式进行改正，最后求出待定点的地面坐标。

区域网法是对一个地区内所有各航带的摄影象片同时纳入在一个整体平差运算之内，它是单航带法的进一步发展，它与单航带法比较起来所需的野外控制点更少些，而精度能满足单航带法的要求，因此解析空中三角测量的区域网法更具有使用价值。区域网法通常有三种：航带法；独立模型法；光线束法。本书较详细地介绍区域网航带法的理论和实际作业过程。

区域网航带法的主要过程：相对定向、模型连接及绝对定向均与单航带法相同，不同的是在第一条航线完成绝对定向以后，进行第二条航线的绝对定向时，除了使用本航线的控制点之外还要把相邻航线公共点考虑进去，如此连续下去，求得全区域统一系统的坐标，再经全区域的仍以各条航带为基本单元的整体平差计算，求得待定点最后的地面坐标。

解析空中三角测量具有精度高、速度快的优点，不仅仅用于测制地形图的内业加密中，而且还用于国民经济的其它部门，例如铁路的选线，高压输电线路的设计，以及地下电缆线路的选线等等。

随着数字技术在航测成图中的应用，解析空中三角测量还为数字测图提供必要的数字，以便进行内插加密。目前解析空中三角测量在人造卫星测图方面也有很重要的应用。

第二章 象点坐标的系统误差改正

这里所指的象点坐标的系统误差是由于物理因素所引起的，它们已在第一册《航空摄影测量基础知识》一书中作了详细介绍，这里仅对以下两方面的问题加以说明：一、由于象点坐标存在系统误差对立体模型产生什么样的影响；二、在解析空中三角测量中如何改正这些误差的影响。

第一节 象点坐标系统误差引起的模型变形

象点坐标的系统误差是指由于航摄材料的变形、航摄机物镜畸变差、大气折光和地球曲率的影响。这些误差对于每张象片而言所产生的后果（指误差的大小和符号）基本上相同，因此称这些误差是系统误差。

现在仅以物镜畸变差为例，分析一下由于畸变差引起的模型变形。由几何光学中知道，物镜的畸变差主要是在辐射线方向，表现有两种形式：枕形畸变和桶形畸变。如图 2-1 所示。

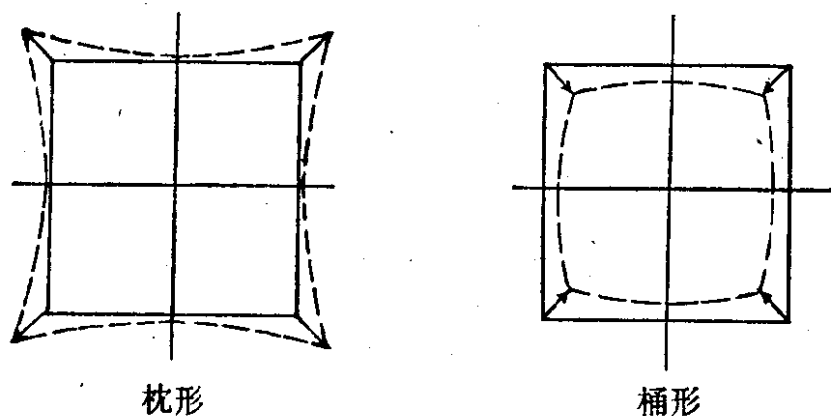


图 2-1

假定某航摄机物镜存在一个枕形的畸变差，由这样的航摄机所摄得的象片存在枕形畸变，如图 2-2 所示。图中点 1、2、3、4、5、6 为没有畸变差时，象片上六个标准点的位置，当有畸变差存在时，则左片上标准点变为 1、2、3、4'、5、6'，右片上的标准点变为 1、2、3'、4、5'、6。作图时已对左、右象片相对于变形后 2 点（对左片）、1 点（对右片）作了比例缩放，因此在 1、2 点上的畸变图中未表示出来。其中 $\overline{33'}$ 、 $\overline{44'}$ 、 $\overline{55'}$ 、 $\overline{66'}$ 即为相应于 3、4、5、6 点的畸变差，用 δr 表示。 δr 在象片坐标系 x 、 y 中的分量用 δx 、 δy 表示。

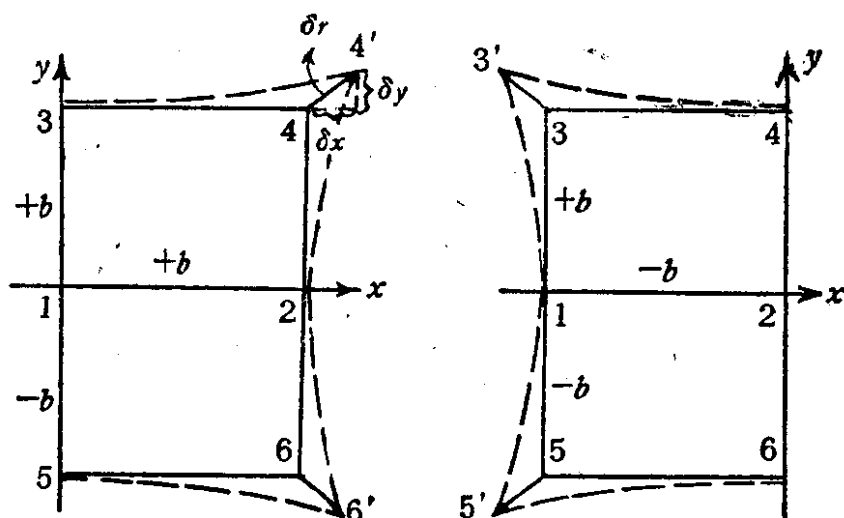


图 2-2

由上面分析可知，在我们量测象点坐标中包含了每点的畸变差 δx 、 δy 。 δx 直接引起模型的变形，而 δy 的误差即相当于产生附加的上下视差的误差 δq ， δq 的误差在相对定向过程中引起了额外的相对定向元素的误差。相对定向元素的误差将引起模型的变形，即 δy 的误差亦间接的引起模型变形，这些由以下的数学推导可以得到证明。

由于畸变差而在六个标准点上引起上下视差和左右视差的误差用 δq 、 δp 表示。将六个标准点上的 δq 、 δp 列在下表中。

点号	1	3	5	2	4	6
视差误差						
δq	0	$-\delta y_3$	$+\delta y_5$	0	$+\delta x_4$	$-\delta y_6$
δp	0	$+\delta x_3$	$+\delta x_5$	0	$+\delta x_4$	$+\delta x_6$

由于畸变差引起相对定向元素的误差可由近似公式求得。假定相对定向是连续衔接情况，并且令

$$|\delta y_3| = |\delta y_5| = |\delta y_4| = |\delta y_6| = |\delta y|$$

$$|\delta x_3| = |\delta x_5| = |\delta x_4| = |\delta x_6| = |\delta x|$$

则引起相对定向元素的误差为

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= -\frac{f}{2by}(\delta q_3 - \delta q_5 + \delta q_6 - \delta q_4) = +\frac{2f}{by}\delta y \\ d\omega &= \frac{f}{4y^2}(\delta q_3 + \delta q_4 + \delta q_5 + \delta q_6 - 2\delta q_1 - 2\delta q_2) = 0 \\ dx &= -\frac{1}{b}(\delta q_1 - \delta q_2) = 0 \\ db_y &= -f d\omega + \delta q_2 = 0 \\ db_z &= \frac{f}{2y}(\delta q_4 - \delta q_6) = \frac{f}{y}\delta y \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

由公式 (2-1) 的计算结果可知，畸变差 δy 的存在仅使相对定向引起额外的 db_z 和 $d\varphi$ 的误差，而对 $d\omega$ 、 dx 、 db_y 没有影响。相对定向中 db_z 、 $d\varphi$ 的误差将引起模型的变形，这是畸变差系统误差引起模型变形的主要原因之一。

畸变差 δy 的存在使相对定向过程产生了模型变形，这是由于畸变差 δy 所引起的相对定向元素误差 db_z 和 $d\varphi$ 使象点又产生额外的左右视差较的误差 $d\Delta p$ 的缘故。 $d\Delta p$ 的数值可由下式求得：

$$d\Delta p = \frac{X}{f} db_z + \left(f + \frac{X^2}{f} \right) d\varphi + \delta x \quad (2-2)$$

式中右方第三项是由于畸变差 δx 引起的左右视差较的误差部分。

而由 $d\Delta p$ 引起的模型变形 dh 由下式求得:

$$dh = \frac{H}{b} d\Delta p = \frac{H}{b} \left[\frac{X}{f} db_s + \left(f + \frac{X^2}{f} \right) d\varphi + \delta x \right] \quad (2-3)$$

公式 (2-3) 计算的结果便是在一个象对中畸变差引起的模型变形。

当我们建立航带模型时, 由于每个立体象对中 db_s 、 $d\varphi$ 误差的传递和累积使航带模型产生了变形, 如图 3-17(a)、(b) 所示。

以上仅对系统误差中的畸变差作了分析。对于摄影材料变形、地球曲率及大气折光差等系统误差的影响亦可得到类似的结论。

我们只知道系统误差对航带模型的影响这还不够, 还必须设法减少和消除系统误差的影响。

第二节 象点坐标系统误差的改正

由上一节叙述知道, 摄影材料的变形, 物镜畸变差, 地球曲率, 大气折光差等系统误差的影响使航带模型产生非线性变形。尽管这些系统误差在一张象片上的影响很小, 然而由于这种误差在建立航带模型中具有累积性传递的性质, 当航带较长时, 这种误差的影响就非常可观, 因此必须加以改正。若对它们不加以消除, 那么这些系统误差将夹在量测坐标的数据里参加平差计算, 这是不合理的。若对量测的象点坐标经过系统误差改正以后, 再参加平差计算, 就能提高解析空中三角测量加密的精度。

下面将讨论系统误差改正的方法:

一、航摄底片变形改正

根据象片上框标位置的不同, 采用不同的改正方法。

(一) 四个框标位于象片的四个角隅。

这种形式的框标不仅能够改正均匀和不均匀的变形, 而且当产生使一个矩形 1 2 3 4 变为 1' 2' 3' 4' 的图形时, 亦能进行改正。(如图 2-3 所示)

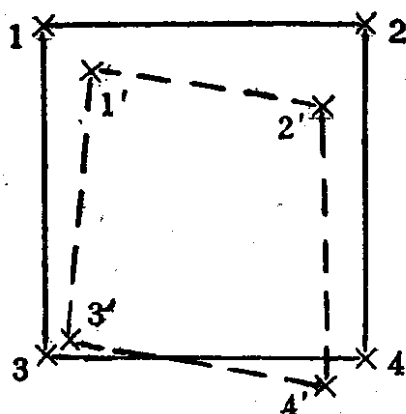


图 2-3

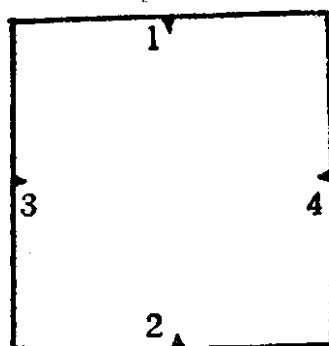


图 2-4

当已知四个框标相对于主点的直角坐标的正确值时，按下式进行象点坐标改正：

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ y' &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

其中 x', y' 为象点的正确坐标值；

x, y 为象点的量测坐标值；

a_i, b_i 为待定的系数。

把四个框标的正确坐标值与量测坐标值代入公式 (2-4) 中，即可求得待定的八个系数。

(二) 四个框标位于象片四边的中央。如图 2-4 所示。

这种形式的框标可以改正底片的均匀和不均匀的变形，当已知框标之间距离的正确值时，可按下式进行底片变形改正：

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \frac{L_x}{l_x} \\ y' &= y \frac{L_y}{l_y} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

式中 L_x, L_y 为框标之间距离的正确值；

l_x, l_y 为框标之间距离的量测值；

x, y 为象片上量得象点坐标；

x', y' 为经底片变形改正后象点坐标。

若对象片逐片量测框标之间距离，则可进行逐片逐点的改正。若只对航线中首、中、末三片的框标进行量测，那么取其平

均值 $l_{x\text{均}}$ 、 $l_{y\text{均}}$ 代入公式(2-5)中进行计算。

二、航空摄影机物镜畸变差的改正

这里所讨论物镜畸变差的改正是指的对称畸变，至于物镜的非对称畸变未包括在内。此时畸变可以用下列形式的多项式来表达，即

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= -x'(k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^4) \\ \Delta y_1 &= -y'(k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^4) \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

式中 $r = \sqrt{x'^2 + y'^2}$;

Δx_1 、 Δy_1 为象点坐标改正数;

x' 、 y' 为象点坐标;

k_0 、 k_1 、 k_2 为物镜畸变差改正系数，由航空摄影机制造厂给出，或经摄影机的检定得出。

三、地球曲率改正

由《航空摄影测量基础知识》一书中知道，因地球曲率的影响，引起象点坐标在辐射方向的改正值为

$$\delta = \frac{r^3}{2R} \frac{H}{f^2} \quad (2-7)$$

式中 δ 为地球曲率引起象点坐标径向改正值;

r 为象点至主点间的距离;

f 为航空摄影机焦距;

H 为摄影航高;

R 为地球的曲率半径。

象点坐标 x 、 y 的改正分别为

$$\left. \begin{aligned} \delta_x &= \frac{x'}{2} \left(\frac{r}{f} \right)^2 \left(\frac{H}{R} \right) \\ \delta_y &= \frac{y'}{2} \left(\frac{r}{f} \right)^2 \left(\frac{H}{R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

式中 δ_x 、 δ_y 为象点坐标改正数;

x' 、 y' 为象点坐标;

$r = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

四、大气折光差的改正

由《航空摄影测量基础知识》一书中知道，因大气折光引起象点在辐射方向的改正值为

$$\left. \begin{aligned} \Delta r &= -f \left(1 + \frac{x'^2 + y'^2}{f^2} \right) \gamma_f \\ \gamma_f &= \frac{n - n_H}{n + n_H} \operatorname{tg} i_H \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

式中 Δr 为折光差引起的象点径向改正值；

γ_f 为折光差角；

x' 、 y' 为象点 a' 的象片坐标；

i_H 为在高度 H 处光线的折射角；

n 为地面的大气折射率；

n_H 为高度 H 处的大气折射率；

f 为航空摄影机焦距。

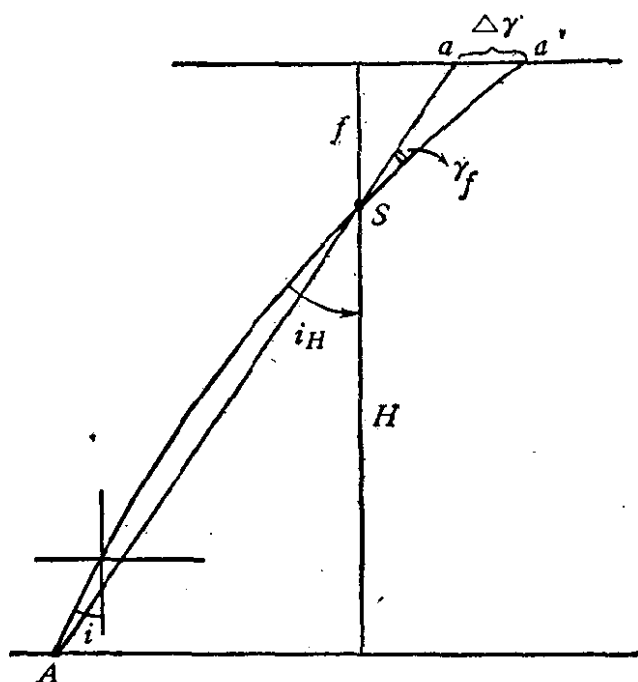


图 2-5

其中折光差角 γ_f 的概值可参考下表。

由公式(2-9)求得因大气折光差引起象点坐标改正数为

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{x'}{r} \Delta r \\ dy &= \frac{y'}{r} \Delta r \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

假定 $\Delta r < 0.01$ mm 时，可以不考虑此项改正。那么，当 $f = 100$ mm， $\gamma_f = 2''$ 时， $r \leq 306$ mm 者可以不考虑折光差改正。由此可见，对于一般大比例尺测图，折光差的影响可以不考虑。

$H(\text{公里}) \backslash i_H$	60°	45°	30°	10°
1.0	4"	3"	2"	0
2.0	9"	5"	3"	1"
3.0	12"	7"	4"	1"
4.0	16"	9"	5"	2"
5.0	18"	11"	6"	2"

最后，经底片变形、摄影机物镜畸变差、地球曲率、大气折光差改正后的象点坐标为

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + \Delta x_1 + \delta x + dx \\ y &= y' + \Delta y_1 + \delta y + dy \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

式中 x, y 为经过系统误差改正后的象点坐标；

x', y' 为经过底片变形改正后的象点坐标；

$\Delta x_1, \Delta y_1$ 为航摄机物镜畸变差引起的坐标改正数；

$\delta x, \delta y$ 为地球曲率引起的象点坐标改正数；

dx, dy 为大气折光差引起的象点坐标改正数。

以后计算中所使用的象点坐标，均指已经作了系统误差改正的坐标值。

第三章 单航带解析空中三角测量的理论

单航带解析空中三角测量是以一条航带作为一个完整的计算单元，求出航带中每点的地面坐标。以后简称为单航带法。本章介绍不带模型连接条件的单航带法和带模型连接条件的单航带法两种。

第一节 坐标系统与坐标变换

一、象片坐标系($S-xyz$)

象片坐标系的坐标原点为摄影站 S ，摄影机的主光轴为 z 轴，坐标系的 x 、 y 轴分别与象片上的 x 、 y 轴平行。 x 、 y 、 z 轴的正方向如图 3-1 所示。象片上每一点在象片坐标系中的 z 坐标均等于 $-f$ 。

二、象点空间坐标系($S-XYZ$)

象点空间坐标系应用于建立航带模型的统一坐标系中。该坐标系是这样定义的：坐标系的原点在该片的摄影站 S ， X 轴平行于本航线第一张象片的 x 轴， Y 轴平行于本航线第一张象片的 y 轴， Z 轴与第一张象片的主光轴平行。 X 、 Y 、 Z 轴的正方向如图 3-2 所示。简称象空坐标。

三、摄影测量坐标系($A-X_pY_pZ_p$)

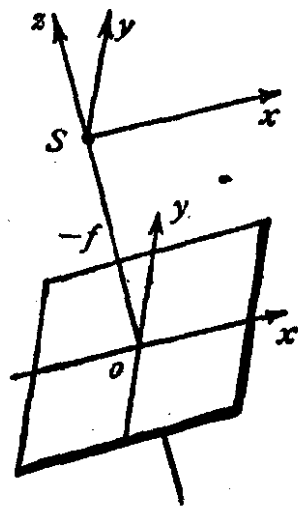


图 3-1

摄影测量坐标系的原点设在地面某任意点 A , X_p 轴与航线的飞行方向大体一致, Y_p 轴与 X_p 轴垂直, Z_p 轴与 $X_p Y_p$ 平面垂直, 简称摄测坐标。实际计算中采用摄测坐标系与象空坐标系平行, 只不过是原点不同而已。

四、象片坐标系($S-xyz$)与象点空间坐标系($S-XYZ$)之间的变换

在相对定向元素计算过程中使用的坐标是象空坐标, 而我们已知的是每点的象片坐标, 因此, 我们必须知道这两种坐标系之间的变换关系。

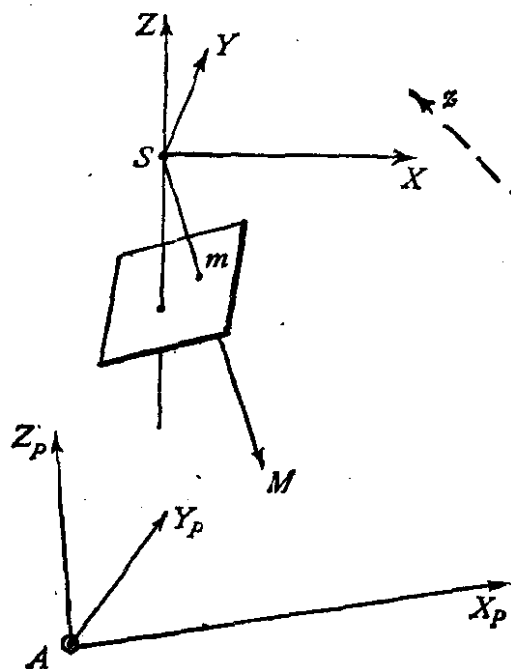


图 3-2

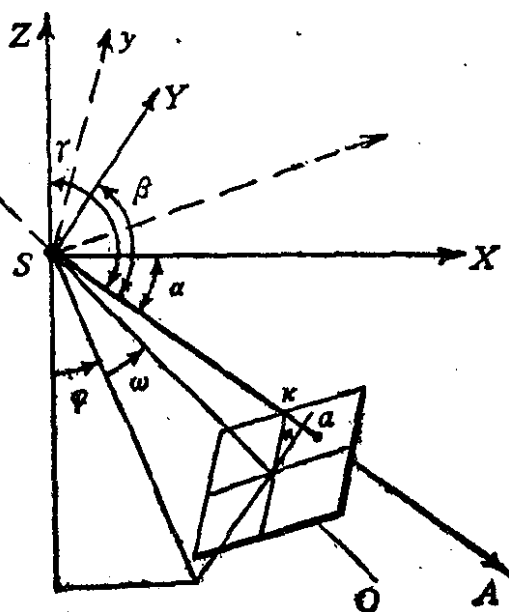


图 3-3

如图 3-3 所示。 $S-xyz$ 为象片坐标系。 $S-XYZ$ 为象空坐标系, 对于空间某一点 A , 它在象片上的构象为 a , 由矢量代数知道, 矢量 $\vec{Sa}$ 在象片坐标系中可表示为

$$\vec{Sa} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3-1)$$

在象空坐标系中可表示为

$$\vec{Sa} = X\mathbf{i}' + Y\mathbf{j}' + Z\mathbf{k}' \quad (3-2)$$

式中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为象片坐标系的单位矢量。所谓单位矢量, 即模等于 1 的矢量。

x, y, z 为矢量 $\vec{Sa}$ 在 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 三个矢量方向上的投影。