



地图投影

李汝昌 王祖英 编著
高等学校教材 • 中国地质大学出版社

地 图 投 影

李汝昌 王祖英 编著

中国地质大学出版社

(鄂)新登字第12号



地 图 投 影

李汝昌 王祖英 编著

责任编辑 方菊

责任校对 董英

*

中国地质大学出版社出版发行

(武汉市 喻家山 430074)

湖北省仙桃市新华印刷厂印刷 湖北省新华书店经销

开本 787×1092 1/16 印张13.375 字数 333千字

1992年2月第1版 1992年2月第1次印刷

印数: 1-1500册

ISBN 7-5625-0618-3/P·214

定价: 3.55元

姜

111

内 容 简 介

本书首先阐述了数学制图中的投影概念和基本理论，运用数学解析的方法分析投影类型及投影变形中的一系列问题。在介绍经典投影时是采用从简单到复杂、从几何透视投影到数学解析的非透视投影的方法（即从方位投影→圆柱投影→圆锥投影逐渐过渡），以此为基础，也扼要地介绍了国内、外常用的特殊投影，如UTM投影、伪投影和多圆锥投影等。投影的变换、判别和选择，新投影的探求以及投影编程计算等也是本书的基本内容，其深度均以大学专科以上学生的数学程度为依据。

本书可作为地质及有关院校中测绘、制图、地理等专业“地图投影”课程的教材或教学参考书。它也适合于在中专、夜大、函大及各类培训班的教学中使用。本书所编电算程序可供测绘及制图生产部门参考。

前 言

地图投影学也称数学制图学,是高等院校测绘、制图及地理专业必修的一门课程,学习地图投影的目的旨在研究并建立地图的数学基础,主要是运用数学分析的方法解决投影设计及投影变换中的一系列问题。

随着近代科学技术的发展,特别是数学分析法在地图投影中的广泛应用,促使该学科从早期的定性处理逐渐发展到目前的定量处理阶段。现在又从传统的地图编制手段过渡到地图制图自动化,这些重大的改革将给地图制图学开辟广阔的前景。

本书由浅入深,从简单到复杂,并以理论和实践相结合为原则,阐述了一些经典的和国内外现行通用的地图投影方式和方法,具体的编写顺序是:采取从几何透视投影过渡到数学分析的非透视投影方法,其中着重介绍了数学制图的基本原理和方法,并适当地编排一些实例计算,每章后附有思考题,便于读者自学。

地图投影的变换、判别和选择以及新投影的探求是数学制图学中的一个重要组成部分,它与本学科的课题研究有着十分密切的关系,读者可从本书的有关内容中得到启迪。总之,地图投影学与地图学、地形测量学、地图编制学;地图制图自动化,地图生产以及地图的阅读等理论和实践性的工作均是紧密相连的。反之,各类学科也会对地图投影学提出更新更高的要求,从而给它以新的推动力。

数学制图工作中的查表计算任务殊为繁重,目前制图部门已迅速推广各种类型的微型机或袖珍计算机,考虑到目前地矿及其它部门的实际情况,特在投影计算自动化一章中统一介绍用BASIC语言编写的30个本书先后介绍过的投影通用程序,具体的程序段附在各章之后,同时附有实例及打印数据,供读者学习使用。

本书是在1986年中国地质大学校内出版的《数学制图》的基础上,根据四年以上的教学实践进行修编的,1990年地矿部测量学课程教学研究会组织兄弟院校的老师们对此书进行了评审,他们对本书的修编提供了宝贵的意见,在此表示深切的感谢。

本教材适用作函大、大专制图专业的教科书或教学参考书,也适合非制图专业大专以上学生使用。此书适合于60至100学时的课程安排,其中包含实习课。

参加本书编写工作的有:王祖英负责第一、二、十三章,各章后的计算算例以及所有投影程序和编程示例部分的编写;其余各章由李汝昌编写。刘沛兰提供了计算实习指导部分并参与部分章节的修编,陈耕夫也参加了后几章的修编工作。

本书的修编过程较为仓促,加上编者水平有限,肯定会存在许多缺点、错误和不足之处,切望读者不吝指正。

编 者

一九九一年元月

目 录

第一章 概论	(1)
§ 1-1 引言	(1)
§ 1-2 地图投影中的主要矛盾	(2)
§ 1-3 地图投影的变形	(3)
§ 1-4 变形椭圆	(5)
§ 1-5 地图投影中投影面的选择	(7)
§ 1-6 地形图、地图对地图投影的要求	(8)
第二章 地球椭球体的要素和公式	(11)
§ 2-1 地球的形状、大小及点位关系	(11)
§ 2-2 子午圈曲率半径和卯酉圈曲率半径	(12)
§ 2-3 地球的球体半径	(14)
§ 2-4 子午线弧长和纬线弧长	(14)
§ 2-5 地球椭球体表面上的梯形面积	(16)
第三章 地图投影的基本理论	(22)
§ 3-1 地图投影的主要公式	(22)
§ 3-2 等角条件、等积条件和等距离条件	(26)
§ 3-3 以极坐标为依据的投影变形公式	(28)
§ 3-4 球面坐标系和坐标变换的常用公式	(30)
第四章 方位投影	(35)
§ 4-1 方位投影的概念	(35)
§ 4-2 透视方位投影	(35)
§ 4-3 非透视方位投影	(41)
§ 4-4 双重方位投影	(45)
§ 4-5 方位投影的变形分析及其应用	(48)
第五章 圆柱投影	(62)
§ 5-1 正轴圆柱投影的基本公式	(62)
§ 5-2 等角圆柱投影	(63)
§ 5-3 等面积圆柱投影和等距离圆柱投影	(66)
§ 5-4 斜轴与横轴圆柱投影	(67)
§ 5-5 圆柱投影变形分析及其应用	(70)
第六章 高斯-克吕格投影	(78)
§ 6-1 投影条件和公式	(78)
§ 6-2 长度比公式	(82)
§ 6-3 子午线收敛角公式	(84)

§ 6-4 双标准经线等角横轴圆柱投影	(86)
第七章 圆锥投影	(92)
§ 7-1 圆锥投影的概念	(92)
§ 7-2 圆锥投影的一般公式	(93)
§ 7-3 等角圆锥投影	(95)
§ 7-4 等面积圆锥投影	(100)
§ 7-5 等距离圆锥投影	(103)
§ 7-6 斜轴和横轴圆锥投影	(106)
§ 7-7 圆锥投影的变形分析及其应用	(107)
第八章 伪方位、伪圆柱和伪圆锥投影	(119)
§ 8-1 伪投影的特点	(119)
§ 8-2 伪方位投影	(119)
§ 8-3 伪圆柱投影	(123)
§ 8-4 伪圆锥投影	(132)
第九章 多圆锥投影	(135)
§ 9-1 多圆锥投影的概念及其主要公式	(135)
§ 9-2 普通多圆锥投影	(136)
§ 9-3 改良多圆锥投影	(139)
§ 9-4 差分纬线多圆锥投影	(142)
第十章 地图投影的变换	(150)
§ 10-1 投影变换问题的提出	(150)
§ 10-2 投影变换的基本公式	(150)
§ 10-3 两种投影方法为已知的投影变换	(151)
§ 10-4 应用解析计算的迭代法进行投影变换	(153)
§ 10-5 计算机辅助制图情况下的投影变换	(154)
第十一章 新投影的探求	(158)
§ 11-1 地图投影的条件	(158)
§ 11-2 地图投影按内涵的变形特征分类	(159)
§ 11-3 投影中的经纬线形状	(160)
§ 11-4 新投影探求数例	(161)
第十二章 地图投影的判别和选择	(168)
§ 12-1 地图投影的判别	(168)
§ 12-2 确定地图投影系统	(168)
§ 12-3 确定投影变形性质	(169)
§ 12-4 确定投影形式	(171)
§ 12-5 地图投影的选择	(172)
§ 12-6 中外地图集投影选择的简介	(174)
第十三章 投影计算自动化	(177)
§ 13-1 投影计算改革的必要性	(177)
§ 13-2 地图投影常用符号及计算公式综合	(178)

§ 13-3 地图投影编程设计.....	(183)
§ 13-4 投影计算选题数例.....	(184)
附录.....	(199)
主要参考资料.....	(206)

第一章 概 论

§ 1-1 引言

地图是地球表面的自然与社会现象缩小的概括和表象,它在人类生活中的用途极为广泛,因而受到人们的普遍重视和关注。地图的种类繁多,但它的特性是显而易见的,即地图是地球表面上各种有效载体的叠加,其上展示的众多地理信息和内容是无声的语言,通过我们的识别,判读予以理解和贯通,它是传递和交换各种信息的理想工具,足以向人们揭示各种现象的本质、分布及其相关关系。地图具有广泛的社会性和实践性,其功能是综合的、多样化的,在当今科学高度发达的年代,地图本身所起的作用是难以估价的。更确切地说,现代地图是自然要素;社会、政治、经济要素以及数学要素的全面综合,用以解决涉及面极为广阔的各类专业的不同需求问题。

地质工作者研究的对象是地球,当然对地图是十分感兴趣的,因为地图的功能是传递地球表面上的三维信息,即平面位置和高程三个数值。这样既可以满足精确地直观定位的要求,也能了解各点位之间的相关联系。大部分读者已经熟悉的是大比例尺地形图,它采用地形测量或摄影测量的方法把地球表面的地形、地物按一定比例缩小后再用统一的图示符号表示在图纸平面上,这种地形测量成图的方法采用的是平行投影,也称铅垂投影。在测量学中还学习过高斯-克吕格投影,这是一种利用数学投影的方法借以建立地球表面和投影平面之间的点位对应函数关系。从这类投影的地图中,可以看出经线和纬线在全图幅中起着“基础”和“骨架”的作用,由于有了经纬线的正确位置才能求解图上的点位问题。

我们可以进一步了解所谓地图投影就是依据一定的数学法则,将不可展开的地表曲面运用特定的数学方法展示到平面上,最终在地表面点和平面点之间建立一一对应的关系。在实践中是采用平面直角坐标或极坐标表示的平面上的点位和用经度、纬度表示的地球表面上的点位,通过一定的数学关系式建立起对应的联系。

如用数学表达式概略地表示这种关系,即为:

$$\begin{aligned}x &= f_1(B, L) \\ y &= f_2(B, L)\end{aligned}\tag{1-1}$$

这样的函数关系绝大多数都是采用数学式来表达的,比如最初是用几何映射的方法建立地图的数学基础,随着数学理论的发展和充实,所探索的新的领域又不断地注入其中,从而逐步发展和推动了地图投影的学科水平。综上所述,地图投影既是一种数学制图的过程,又是一种透视或非透视的转换,所以数学推演和图解解析均为地图投影或称数学制图的主要内容。

地图投影是地图制图过程中的一个重要组成部分,它和制图综合、图形设计、地图制作

和应用等关系十分密切，应看作一个严密的整体来考虑。特别是地图制图学从早期的定性处理逐步地过渡到用数学分析的方法进行定量处理的这一发展过程中，以数学制图方法为基础的地图投影学起了主要的推动作用。由此可见，以两个基本因素组成的转换过程，即地图投影和制图综合为地图制作共同提供了完整的结构和内容。

§ 1-2 地图投影中的主要矛盾

当研究并着手处理地球表面和地图平面上点位的一一对应关系时，首先面临的问题即球面和平面两者之间在质和量方面的不一致性和不协调性，它反映出的一个实质性问题就是地球椭球体面或地球球体表面是一种不能展开成平面的曲面，如何将此不可展曲面上的形象投影表象于平面之上，并需符合一定的精度及其它特殊的要求，这就是地图投影所必须首先解决的主要矛盾。

对于制作小范围、小面积的各类地图来说，这个矛盾并不突出，我们可以通过不同的途径来论证它的限值，例如以后可以通过变形值的计算予以解决。如果制图区域较大，甚至涉及到一个国家、一个洲、半球或全球时，这个矛盾愈发突出，我们就必须考虑在地球椭球体表面和投影平面即图纸平面之间如何过渡即转换的问题。要使一张平面的地图和一个立体的球面完全地或者说强制地统一起来是不可能的，主要的理由也就是由于地球表面是一个不可展的曲面。如不顾及这个因素，将地球表面上某一区域的地理位置描绘于图纸平面上就必然会产生各种各样的裂口、褶皱和移位，致使图面支离破碎面目全非，毫无使用价值。一幅理想、完善的地图应使制图区域不破裂，并保持图形轮廓的完整一致，对其边界邻区也应是延续的、对接无误的。地图投影所赋予的任务就是提出和解决球面如何过渡、转化到平面，并满足不同制图要求的问题和方法。

在地球表面上，我们是以规定间距的经差和纬差划分成许多经纬线网格，如是地球上每一部分都临界于一定的经纬网格之内，有它各自的地理位置。当在平面上建立了经纬网的表象后，即可将地球表面经纬网格内的各地理要素一一用图示符号转绘到平面上相应的坐标网格内，这样就在数学上制作了地图。为了使球面上的经纬线网格转绘于图纸平面上并能达到不破裂，无缺口，图形完整的要求，就必须按不同情况将此破裂的地方予以均匀的拉伸或在重叠的地方进行均匀的压缩，这仅仅是从直观上来理解如何处理球面过渡到平面之间的矛盾。理论上则以数学的手段对该地区的经纬线进行拉伸或压缩，以期获得一幅完整的符合实际要求的地图。实践中是将地球表面上的一组曲线坐标系运用数学解析的方法表现为平面上的曲线坐标系，常规的方法就是建立球面经纬网的平面表象。

即便经过理论上的数学解析处理，地球表面上每两条相邻的纬线间其经差相同的网格投影到地图平面上未必都具有相同的形状和大小，有时会产生这种或那种变化、甚至表现出明显的差异，这就是说在投影过程中图形发生了某种变形，最突出的是表现在形状和面积两个方面。为此，地图投影学的主要任务除了研究和解决球面如何过渡、转化到平面的问题，还需更进一步地分析、探索如何克服并解决问题中出现的新矛盾，即地图投影设计制作过程中始终存在的变形问题。变形是存在于每一个具体的投影中，就其主要的三种变形即角度、面积和长度变形来说，其性质与大小是多种多样的，在实际应用中需要加以分类，一般可分成

等角投影、任意投影和等面积投影，有关这些投影的变形特征将在下节中予以介绍。

§ 1-3 地图投影的变形

众所周知，矛盾始终存在并贯穿于事物发展的一切过程之中，旧的矛盾解决了，新的矛盾又会产生，直到事物发展的整个过程结束为止。在地图投影中，虽可利用投影的方法解决球面与平面之间的矛盾，但又出现了新的矛盾，即投影变形。通过分析研究，可以找出变形值的大小及其分布规律，以便诱导其向制图需要的有利方向发展。有一种常用的显示变形图形的图解方法是在地图投影的格网上绘制一种规则图形（如圆或等腰三角形、甚至人的头像）的变了形的表象，这种图形的变形易于显示出投影作为一个整体的变形性质，此法具有较为直观的效果，但为了取得实际的变形值需要逐点计算长度变形，并将计算结果用图表或表格予以表示，详见附图。

参阅图 1-1，我们选用的是我国1984年编制的世界地图的缩图为例：实地上属于同样大小的经纬线网格在投影平面上变成了形状和大小各不相同的图形。在实践中，由于各种投影的方法均具有其独自的特殊性，所以它们的变形是迥异的。为此，我们可以用一系列的几何图

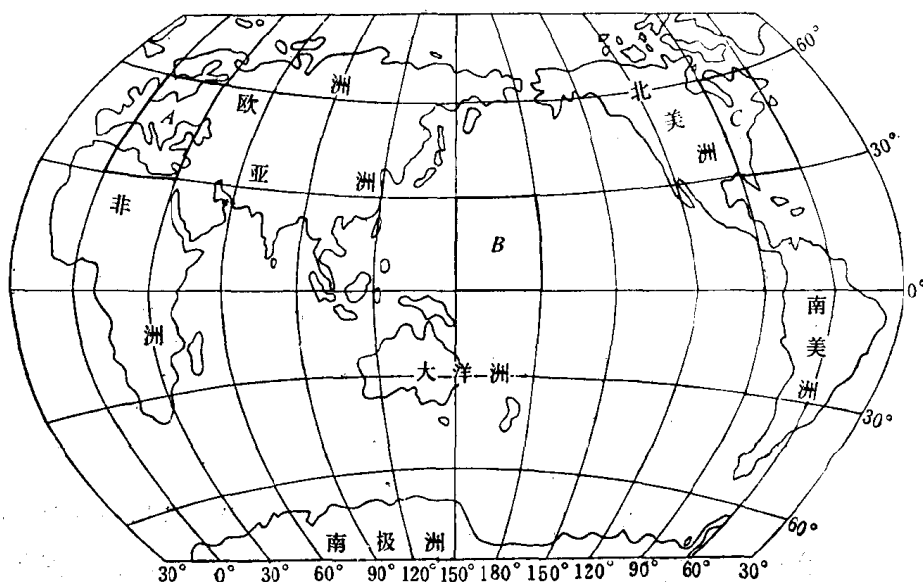


图1-1

形来直观地概括变形特征。

如果在地球仪上绘有一个微小的圆形，称谓微分圆，它在投影中的表象会是什么呢？由于不同的投影条件，这个微分圆的表象不一定仍保持为圆形，很可能是一个椭圆，我们称它为变形椭圆，实质上它是变形的产物。可以证明，变形椭圆的形状和大小能确切地反映出投影变形在质和量上的差别，同时还具有直观的明晰性等优点（证明见后）。

从图1-2中可以看出，在不同类型的投影中，其变形椭圆是不同的，但只要知道椭圆的长、短半径，椭圆的形状和大小即告确定，其投影性质也接着就能决定了。图1-2(1)为实地上半径为 r 的微分圆，图1-2(2)、(3)仍显示为圆，其形状无变化、但 r' 不等于 r ，于是圆的大

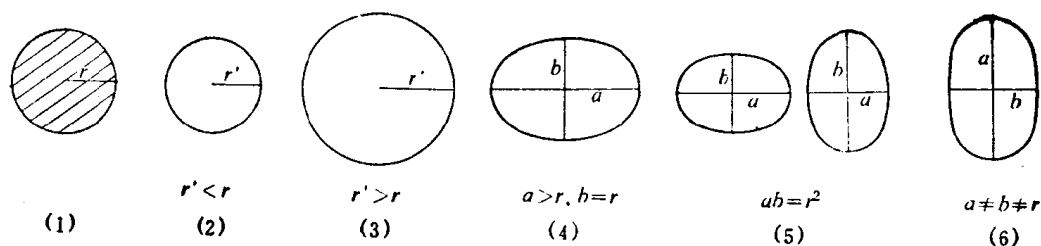


图1-2

小发生了变化,具有这类性质的投影称为正形投影或等角投影;图1-2(4)、(5)、(6)的形状均发生了变化,其中图1-2(4)中的长、短半径有一个与 r 相等,此时应为等距离投影,但由于图1-2(5)符合于 $ab = r^2$ 的条件,即投影后的面积大小并无变化,故可称为等面积投影,而图1-2(6)的椭圆长短半径均不为 r ,按其性质既不属于等角又不属于等积,故和图1-2(4)一样,也可称为任意投影。总之,变形椭圆能够直观地表达变形特征,对地图投影的分析和研究十分有用。

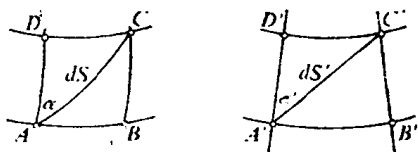


图1-3

综上分析表明地球表面上的长度、面积和角度经过投影后一般均会发生质和量的变化,这些变化是在解决具体投影的问题时必须研究的,为此我们对变形的大小和分布规律需作进一步的阐述和说明。

1. 长度比和长度变形

长度比就是投影面上微分线段 dS' 和椭球面上相应长度 dS 之比值,见图1-3。以 u 表示 A 点沿 α 方向至 C 点的长度比,即

$$u = \frac{dS'}{dS} \quad (1-2)$$

一般说来,长度比是随点的位置而变化,也和方向有关,但并非一定值。

长度变形就是 $(dS' - dS)$ 和 dS 之比,用 v_s 来表示,有

$$v_s = \frac{dS' - dS}{dS} = \frac{dS'}{dS} - 1 = u - 1 \quad (1-3)$$

由上式可得,长度变形就是长度比与1之差,如已知某点附近沿某一方向上的长度比,则其长度变形即可算出。从公式中得知长度比只有小于1或大于1的数,特殊情况即属于正常条件下等于1。长度变形有正、负值之分,变形为正时表明长度增长,变形为负则表明长度缩短。变形值有时也用百分比或千分比的比率来表示。

2. 面积比和面积变形

面积比就是投影面上一微分面积 dF' 和椭球面上相应面积 dF 之比值,以 P 表示面积比,即

$$P = \frac{dF'}{dF} \quad (1-4)$$

面积比也就是随点位的不同而变化的。

面积变形就是 $(dF' - dF)$ 与 dF 之比,用 v_r 表示,有

$$v_p = \frac{dF' - dF}{dF} = \frac{dF'}{dF} - 1 = P - 1 \quad (1-5)$$

从式中可知，面积变形是面积比与1之差。若已知某点附近的面积比，也就知道该点附近的面积变形。上式表明面积比也无负数，只有小于1或大于1的数。面积变形则有正有负，变形为正表示面积增大，变形为负表明面积减小。

即使在同一投影中，位于不同点上的长度比和面积比的数值一般均非定值，它反映了投影中的长度和面积是在不断地变化。

长度变形和面积变形均属相对变形，仅表示数量上的相对变化。当达到某一程度时，量变可导致质变，从而引起形状上的变异，故对 v_l 和 v_p 赋以变形的名称。

3. 角度变形

投影面上任意两方向所夹之角 β' 与椭球面上相应的两方向夹角 β 之差称为角度变形，即 $\beta' - \beta$ 。在需要描述一点上的角度变形时，也可采用极值的含义，指出某点上可能会出现的最大角度变形。通常取投影前后两个对应角度之间最大变形值的半数即 $\frac{\omega}{2}$ 来表示， ω 称为最大角度变形。具体计算方法详见以后各章节。

§1-4 变形椭圆

讨论变形椭圆的目的在于更好地说明地图投影的变形特性。变形椭圆意即在地球表面上过某点作一称为微分圆的无穷小圆，也称单位圆，投影后一般成为一个微分椭圆，在特殊情况下其形状仍为一个圆。利用这个微分椭圆能较恰当地、直观地显示变形的特征。

先证明微分圆投影后一般地成为微分椭圆的原因，详见图1-4(1)，在椭球面上设有半径为 r 的微分圆，为便于研究，令此圆的两直径分别为通过圆心 O 点的经纬线的微分线段，如忽略其曲面的影响，便可当作一个平面看待，所以在图1-4(2)中， OX 和 OY 表示通过圆心 O 的

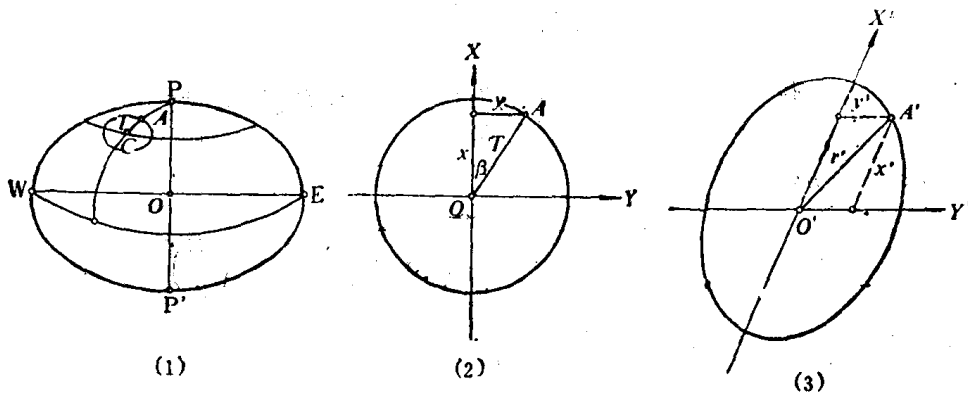


图1-4

一对成正交的直径， A 为圆上一点。

另见图1-4(3)，微分圆上各元素投影到平面上相应坐标为 O' 、 $O'X'$ 、 $O'Y'$ 和 A' ，一般情况下 $O'X'$ 和 $O'Y'$ 并不呈正交，其交角设为 θ ，现设定 $O'X'$ 和 $O'Y'$ 为斜坐标轴系，按长度比的定义可写出：

$$x' = mx, \quad y' = ny \quad (1-6)$$

式中分别设 m 和 n 为沿经线和沿纬线上的长度比。对于微分圆的方程有:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

若以 $x = \frac{x'}{m}$ 和 $y = \frac{y'}{n}$ 代入上式得:

$$\left(\frac{x'}{m}\right)^2 + \left(\frac{y'}{n}\right)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{x'}{mr}\right)^2 + \left(\frac{y'}{nr}\right)^2 = 1 \quad (1-7)$$

可见(1-7)式即为椭圆方程式, 而 mr 和 nr 则为椭圆的两个半径, 这就证明了微分圆投影到平面上一般地成为一个微分椭圆的原因。

斜坐标轴系在实用中较为不便, 为此我们可以在椭球面上选取一对互相呈正交的直径作为微分圆的坐标轴, 并将它视为主方向。由于主方向投影后既保持正交且为极值的特点, 这样在对应的投影平面内便成为椭圆的长短半轴, 令以 u_1 和 u_2 表示沿主方向上的长度比, (1-7)式的椭圆方程便可改写为:

$$\left(\frac{x'}{u_1 r}\right)^2 + \left(\frac{y'}{u_2 r}\right)^2 = 1 \quad (1-8)$$

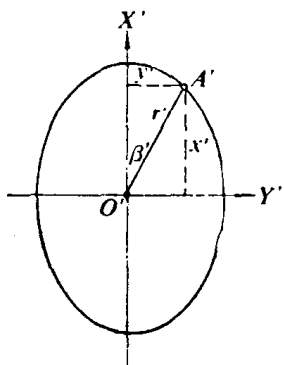


图1-5

如以 a 、 b 表示椭圆的共轭半径, 则上式中 $a = u_1 r$, $b = u_2 r$ 。通常令微分圆的半径为1, 即 $r = 1$, 所以在椭圆中即有 $a = u_1$ 和 $b = u_2$ 。由此可得出如下结论: 微分椭圆上长、短半轴等于 O 点上主方向的长度比。也可认为一点上主方向的长度比(也称极值长度比)为定值时, 微分圆的形状及大小即告确定。

现利用变形椭圆的性质来阐述一些投影中的变形问题。

先求微分圆上半径为 OA 的长度比, 它和主方向的夹角以 β 表示, 见图1-5。按变形公式有:

$$u_\beta = \frac{O'A'}{OA} = \frac{r'}{r}$$

r' 为半径 r 在平面上的投影, r' 与 $O'X'$ 组成的方位角 β' 为 β 的投影, 故

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

因为 $x' = ax$, $y' = by$

$$\therefore u_\beta = \frac{r'}{r} = \frac{\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}}{r} = \sqrt{a^2 \left(\frac{x}{r}\right)^2 + b^2 \left(\frac{y}{r}\right)^2}$$

又因 $\cos \beta = \frac{x}{r}$, $\sin \beta = \frac{y}{r}$

$$\therefore u_\beta = \sqrt{a^2 \cos^2 \beta + b^2 \sin^2 \beta} \quad (1-9)$$

此式即为微分圆上任一方向的长度比和变形椭圆两半轴(极值长度比)的关系式, 显然 u_β 是随 β 而变化的, 当 $\beta = 0^\circ$, $u_\beta = a$; 又 $\beta = 90^\circ$ 时, 则 $u_\beta = b$, 由此证明它是长度比中的极大值和极小值。

有一特例, 当投影中 $a = b$, 也即 $u_\beta = a = b$ 时, 表明一点上的长度比不随方向而变化,

此时椭圆表示为圆，圆内任何一对相互呈正交的直径都可视为主方向。通常我们是在投影的经纬线交点上绘出一定数值的变形椭圆以直观地显示投影变形的特征。当投影后经纬线不呈正交时，变形椭圆的长、短半轴并不一定与经纬线一致，因而要确定变形椭圆上某一点的位置还需考虑其中的方位角因素。

通常变形椭圆内的方位角 α'_0 为其长半轴和某一经线间的夹角，见图1-6，有椭圆方程

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

在直角三角形 $A'O'A'_0$ 中

$$x' = O'A'_0 = m \cos \alpha'_0$$

$$y' = A'A'_0 = m \sin \alpha'_0$$

将上列关系式代入椭圆方程有：

$$\frac{m^2 \cos^2 \alpha'_0}{a^2} + \frac{m^2 \sin^2 \alpha'_0}{b^2} = 1$$

$$\therefore \cos^2 \alpha'_0 = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2} \tan^2 \alpha'_0} \quad \sin^2 \alpha'_0 = \frac{\frac{b^2}{a^2} \tan^2 \alpha'_0}{1 + \frac{b^2}{a^2} \tan^2 \alpha'_0}$$

$$\therefore \tan \alpha'_0 = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - m^2}{m^2 - b^2}} \quad (1-10)$$

只要已知变形椭圆的长、短半轴以及方位角，便能描绘出过某点的变形椭圆。如前所述，若投影后经纬线呈正交，经纬线的方向就是主方向，此时 $a=m$ ，或 $b=m$ 。于是方位角 $\alpha'_0=0^\circ$ 或 $\alpha'_0=90^\circ$ ，意即变形椭圆的两半轴与经纬线重合。

如从理论上来探索，我们可以采用法国数学家底索(Tissot)提出的指示量度方法也即变形椭圆来测定投影的面积变形和角度变形。底索指出的变形规律即投影后每一变形椭圆至少能保留一对互成正交的直径，可取为坐标轴。为简便计，这两个轴可设定为单位值。由于变形的存在，变形椭圆的形状及大小均会有所改变，当取变形椭圆上的 a, b, α 值和球面上相对应的值进行比较时，出现的差异即能表示出变形的类型和变形值，其中也体现了面积和角度变形的大小。总之，变形的方式和变形值在一个投影上是会到处改变的，最小的变形范围通常是在投影中心或沿标准线、圈附近的地方（指地球与投影面接触之处），重要的是必须周密地考虑投影中心和标准纬线的位置以及所选择投影的状态。

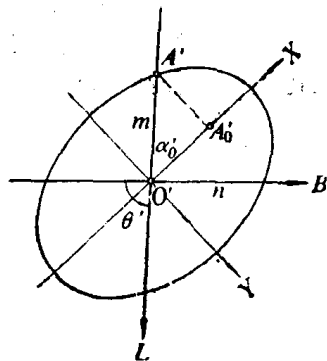


图1-6

§1-5 地图投影中投影面的选择

将地球投影到图纸平面上首先遇到的是地球尺寸的缩小，这样将会导致三维空间的破坏，通常采取两个过渡阶段，即首先将地球椭球体缩小到参考椭球体的大小，然后再将它投影到平面或地图上。

为了解决由曲面到平面的转化，同时顾及地球椭球面上的点、线、面投影到地图平面上必须是无撕裂和无重叠现象的平面，就要考虑采用什么样的投影面是合适的。

地图平面即投影面，它必须是平面或为可展的曲面所形成的平面。在地图投影中，一般

选用平面、圆柱面和圆锥面作为投影面。圆锥和圆柱表面虽然不是平面，但却是可展曲面，只要沿某一条母线展开即能形成扇形和矩形平面。如图1-7(1),(2)所示，其上可以显示地球表面一部分的投影图象。

采用圆锥面作为地图平面投影面的投影称为圆锥投影，从图1-7(1)上可以看出，经线投影后成为辐射直线，纬线投影后则为同心圆弧。实践中是根据一定的数学条件将经纬线表示到圆锥面上的，我们常见的中国全图（南海诸岛作插图）就是采用这种投影。

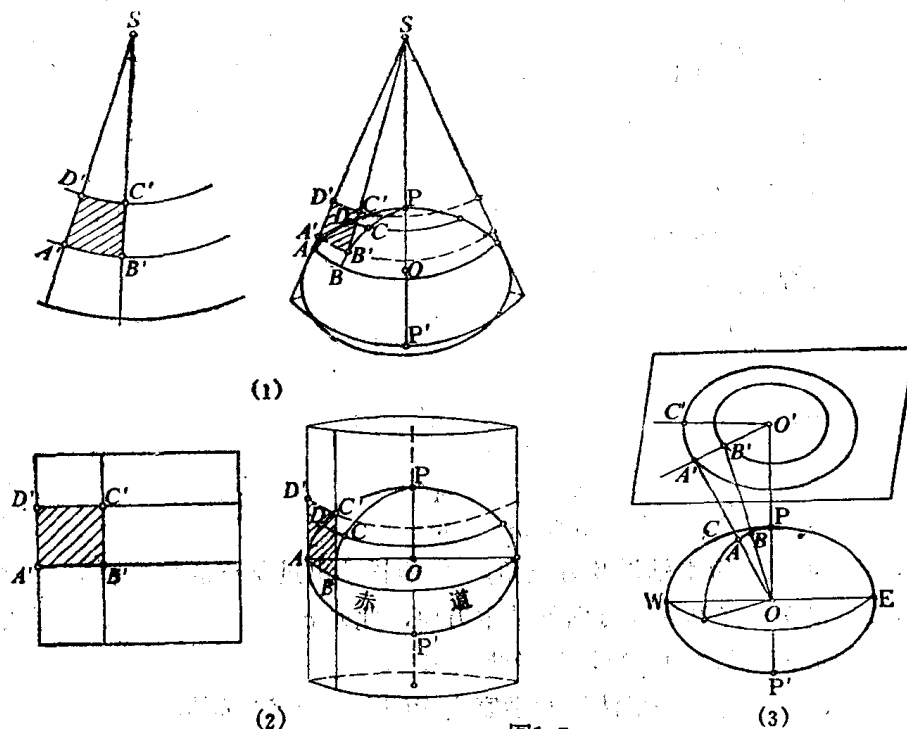


图1-7

所谓圆柱投影就是采用圆柱面作为地图平面的投影面，其实从几何观点来看，圆柱投影是圆锥投影的一种特例，当图1-7(1)中的圆锥顶点延伸到无穷远时，圆锥就形成了圆柱。在圆柱投影中，经线和纬线均投影成平行直线，且互相正交，见图1-7(2)。当圆锥面的顶角向两侧扩大至 180° 时，就成了平面，这种从地球表面过渡到平面的投影方式称为方位投影。我们在世界地图中常见的南北极区地图和东西半球地图就是此类投影。从图1-7(3)上可见正轴方位投影的纬线投影表象为同心圆，经线投影后成为交于一点的直线束。可理解为同心圆的半径。

根据以上情况的简单介绍，归纳起来可将地图投影的设计和制作过程分为：选择和确定投影类型，以便决定相应的投影常数；继而通过各种特定的数学关系式即投影公式计算事先设定的地面各点的投影直角坐标和变形值，最后绘制经纬线格网和各种变形的变化曲线图，以供分析和评价。

§1-6 地形图、地图对地图投影的要求

在制图实践中经常接触到的图件有地形图和区域地图两类。前者是国家基本地图，后者

是指某一地区性(如国家、省市等)有关政治、经济及其它领域的地图。地形图有1:1万,1:2.5万直至1:100万等多种比例尺;区域地图则从几十万分之一至几千万分之一各种不同的比例尺。

地形图的精度不同于一般的地图,它对地图投影的要求是严格的,首先,应确保方向上的正确性,投影后应无角度变形,即形状保持相似;于是能满足图上内容与实地相应地物之间的相似关系。其次,各类地理要素和地物彼此间的相关位置应该基本正确,例如对距离来说,即便有误差也应控制在规范所制订的容许范围之内。如上所述,只有等角投影始能满足地形图的基本要求,因为等角投影无角度变形,图上方向是正确的,变形椭圆表现为圆,这充分说明在较小范围内图上的形状是与实地保持相似关系的。若投影区域的面积较大时,就难确保长度变形不超过容许的界限。当今世界上有些国家和我国均采用分带投影的方法进行分带分区投影,由于这种类型的投影范围预先受到了对限制长度变形的约束,所以其变形值是严格控制在限差之内的,从而保证了点与点之间的距离与投影后的数值之差不会超过容许界限。我国地形图采用的是等角投影,具体的说投影面为一横置的圆柱面,它与地球椭球体的某一经线相切,故称为等角横切圆柱投影,详细内容将在第六章中介绍。

多数国家选择了等角投影作为编制大、中比例尺地形图的数学基础,因为这类地图上长度比的变化甚微,且大圆几乎成为直线,其特点是方向、角度保持不变,所以在此类投影的地图上可进行精确的量算。特别是在方向和角度均为主要条件的专题地图制图中,等角投影是十分有效的,如运用显示方向符号的图件——气象图和表示航线方向的交通图等。

从投影性质方面来说,地图对地图投影的要求是不同的。如森林植被、土壤或矿产分布图等均要求具有等积性质的投影;至于军事、交通等地图要求具备等角投影的性质,以保持图上方向的正确性。又如球面投影具有一般的等角特性,即地球球体上任何圆投影后仍为圆,选择此类投影的地图可用来标绘雷达测距及其它类似的应用。其它如教学用图及区域地图等对投影性质并无特殊要求的情况下可采用(如等距离投影)这一类的任意投影。上述投影对变形大小的要求均达不到地形图那样高的精度,但在设计地图投影时应使变形尽量减小且分布均匀。一般制图区域中心范围内的变形均较小,边缘地区变形值增大,但要求其变形分布应是均匀一致的。

本书将在以下各章中分别介绍方位、圆柱和圆锥三大类投影。参阅图1-7(1)、(2)、(3),方位投影的特点是投影中心处无变形、偏离中心愈远则变形愈大,以中心点为圆心在任一圆周界线上的变形均等同,故宜于编制圆形地区的地图。圆柱投影的特点是在一条与地球椭球体相切的切线或两条相割的割线上无变形,离此线愈远,变形愈大,此投影运用于沿赤道附近或南北方向地区延伸的地图。圆锥投影也有一条切线或两条割线,其上无变形,偏离此线愈远,其变形的绝对值愈大,等变形线平行于无变形线,故宜编制中纬度沿东西方向延伸或任意斜向地区的地图。

根据制作地图的具体任务和要求来选择地图投影的类型,一般是没有现成的方案、标准或规范可以遵循的,通常可以依据下列几个因素来考虑决定:

1. 制图区域的范围、形状和大小;
2. 制图区域所占的具体地理位置;
3. 所设计的地图对各类变形的特殊要求;
4. 地图的用途及其使用效果;
5. 地图所含的具体内容等。