微积分与牛顿、莱布尼兹

田怀录

山西人民出版社

微积分与牛顿、莱布尼兹

田怀录

●

山西人民出版社出版　（太原并州路七号）

山西省新华书店发行　山西新华印刷厂印刷

●

开本：787×1092　1/32　印张：5 $\frac{1}{4}$　字数：106千字

1980年8月第1版　1981年1月太原第1次印刷

印数：1—4,700册

●

书号：7088·893　定价：0.40元

前　言

微积分是高等数学的基础及重要内容。它在现代自然科学中有着极为广泛的应用，人们把它的重要性与广泛性，比喻为高等数学的四则运算。随着教育的改革，国内外都在试行把初等微积分下放到中学讲授，以便使科学技术及早赶上现代科学水平。为此，就需要编写一些有关的普及读物，介绍一些微积分的主要概念、方法及其发展过程。了解微积分的发展过程，可以解除形式逻辑的禁锢，培养青年的创新精神。这就是写作本书的主要目的。其次，对懂得微积分学，但对其历史过程不甚了解的人，或只具中学数学水平，而愿意了解一点数学发展过程的人，翻阅本书也将有一定裨益。

为了以上目的，本书对历史上研究微积分的几个代表人物的主要实例进行了阐述，以说明微分与积分的内容、方法及发展过程。本书对近代建立在极限论之上的微积分学，作了较系统的叙述（但在推证中也有从略之处）。在整个叙述中，力求加以适当分析，指出其连贯性、合理性及存在问题，使读者对微积分的发展有个整体概念，认识到其发展的必然性与合理性。

微积分学的发展以西方为主，所以本书主要写的是西方的内容。间也介绍一点中国古代的微积分萌芽实例。

在介绍微积分的发展过程时，是以代表人物为中心的，并且介绍了一些事迹。这样做，一方面是为了学习他们刻苦钻研、勇攀高峰的精神，另一方面也是为了对历史进行分段、编年。

鉴于资料与水平所限，书中错误与不足之处在所难免，望读者批评指正，不胜感激。

本书在编写过程中，曾得到常学将、张宝林、曾一平诸位老师的指导和帮助，在此谨致谢意。

田怀录

1980年3月

目　　录

阿基米德

一、阿基米德的最初贡献

提起阿基米德，人们就会想到关於王冠的故事、液体浮力的阿基米德原理。这位古希腊杰出的数学家、发明家、工程师、静力学的奠基人——阿基米德（公元前287——212），被人们誉为微积分的鼻祖。所以我们谈微积分，应从他的贡献开始。

人类在早期的生产与生活实践中，感到很需要度量线段的长度、平面图形的面积、物体的体积。现在我们就以度量平面图形的面积为例，看看当时人们遇到了什么困难，阿基米德是如何解决的。

开始时，人们把边长为一个单位的正方形的面积，作为一个面积单位，就象用尺子去度量一条线段那样，去度量其它正方形、矩形的面积：比如一个矩形能容纳五个单位正方形（见图1.1），就说此矩形的面积为五个单位。当然，如果矩形的一边长为a个单位，另一边长为b个单位，那么，此矩形就能容纳$a \cdot b$个单位正方形，这个数值就是此矩形的面积；进而用割补的方法，将平行四边形换成矩形，得出其面积为底与高之积，三角形的面积为底与高之积的一半；对多边形，将其分为三角形之和，仍可求出面积。一般地说，只要图形的边是直线段，总可以用上述方法得出它的面积。

可是随着生产、科学技术的发展，人们需要度量象圆、

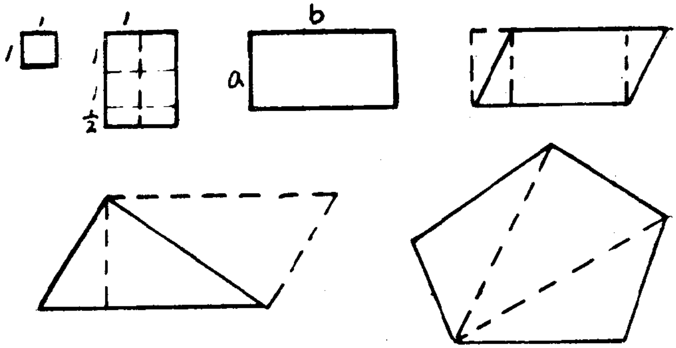

图 1.1

椭圆、抛物弓形等图形的面积。由於这些图形的边（至少一条边）是曲线（见图 1.2），尽管人们将单位正方形分为若干小方块，用这些小方块去度量，但总不能使直边与曲边重合。不能准确得出容纳多少单位正方形，从而也就得不出它的面积。阿基米德总结了前人的经验，提出了他的崭新的方法。

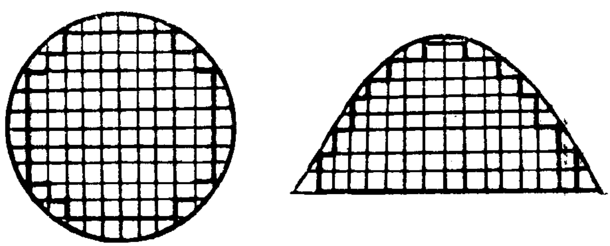

图 1.2

在谈他的方法之前，先列举出抛物线的几个简单性质，以便在讨论中应用。关於抛物线以及整个圆锥曲线的许多性质，已为阿基米德时代的许多人，用古典的几何方法获知。当然读者可借用解析几何方法去证得。

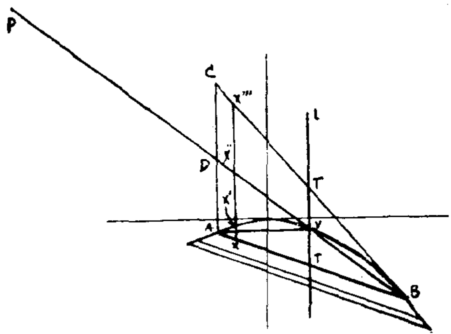

图 1.3

抛物线任一组平行弦的中点，在一条平行于对称轴的直线上，如图1.3，设弦 AB 是其中之一，T 为 AB 的中点，这直线为 L。另外，设 L 与抛物线交于点 V，过 V 的抛物线的切线亦平行这组弦 AB。所以 V 为弓形 AVB 的顶点。过抛物线上任一点 B 作切线交 L 於 T'，于是 $T'V=VT$（抛物线的直径）。若再在弦 AB 上任取一点 X，作 $XX'' \parallel L$，则

$$\frac{XX''}{XX'}=\frac{AB}{AX}.$$

阿基米德说：“一个抛物线弓形的面积是底边相等、顶点相同(弓形的顶点取为到底边垂直距离最大的点)的三角形的三分之四。”

仍以图 1.3 所示，抛物线弓形为 AVB,V 为顶点,内接

同底等高的三角形为$\triangle AVB$。延长BV至P,使$BD=DP$。由抛物线的性质可知，对於任一点X都有比式：

$$\frac{XX''}{XX'}=\frac{AB}{AX}=\frac{BD}{DX''}=\frac{DP}{DX''}.$$

他首先从静力学方面去考虑，把平面图形看作由它的元素——线段所组成：$\triangle ABC$由类似於XX''的线段组成；弓形由类似XX'的线段组成。为了应用杠杆定律，他把这些平面图形视为质量均匀的薄片，将线段视为均匀的质量线段。

今T为AB的中点,所以由上面的比式可知，D、X''、V分别为AC、XX''、TT'的中点。这样，X''便是XX''的重心。若把XX'移到P处，并以P为中点,则由杠杆定律知，XX'将在该位置与XX''平衡。这是因为

$$W_{XX''}\cdot DX''=\rho\cdot XX''\cdot DX''$$

$$W_{XX'}\cdot DP=\rho\cdot XX'\cdot DP,$$

式中$W_{XX''}$、$W_{XX'}$分别是质量线段XX''、XX'的重量，ρ为单位线段的重量。再由比式

$$\frac{XX''}{XX'}=\frac{DP}{DX''},\quad \text{即}\quad XX''\cdot DX''=XX'\cdot DP,$$

得

$$W_{XX''}\cdot DX''=W_{XX'}\cdot DP.$$

这个情况对X在AB上的所有位置都成立。因为$\triangle ABC$由所有类似於XX''的线段组成，抛物线弓形AVB也同样由所有类似於XX'的线段组成，阿基米德断定：当抛物线弓形移到P处，即其重心与P重合时，$\triangle ABC$在D点跟它平衡。而$\triangle ABC$的重心位于BD上D到B的1/3距离处，

因而有等式

$\rho' \cdot$ 抛物弓形 AVB 面积 $\cdot DP = \rho' \cdot \triangle ABC$ 面积 $\cdot \frac{1}{3} BD$，（ρ' 为假想质量片的单位面积的重量）消去 DP、BD、ρ'，得

$$\text{抛物弓形 } AVB \text{ 面积} = \frac{1}{3} \triangle ABC \text{ 面积}.$$

又由於 $\triangle ABC$ 为 $\triangle AVB$ 的四倍，所以得到最后的结果

$$\text{抛物弓形 } AVB \text{ 面积} = \frac{4}{3} \cdot \triangle AVB \text{ 的面积}.$$

现在我们先分析一下阿基米德的静力学方法：

他用的杠杆定律，四则运算是无可非议的；他把平面图形视为由线段组成，使人迷惑不解。这里，他应用了“不可分量”概念。所谓不可分量当时的意思是这样的：一条直线可以分成若干小线段，小线段又可再分，直至成为点则不可分，故称点为直线的不可分量。平面图形可分割成相互平行的窄条（面积），窄条又可再分，直至分成线段，则不可分，故称线段为平面图形的不可分量。同样平面是立体图形的不可分量。这种概念来源於原子论：物质是由不可分的原子（单子）组成。这概念也不是阿基米德发明的，但应用这种概念使之成为一种方法，并推出一系列新的结果，是他的首创。他视平面由线段组成，即用直线覆盖平面，克服了矩形不能与曲边图形相吻合的弱点。然而又带来了许多需要澄清的问题。比如当时就有人提出：有多少线段组成平面？当然不是有限条！但无穷这个概念由於超出直观，又不为人所接受。此外，它们是怎样组成的？离散的还是连续的？也无法

回答。这些问题直至上世纪末才得到满意的解释。所以阿基米德并不认为上述计算是证明，而只把它当作预测新结果的手段。这位谨慎的数学家，当然不会就此罢手，他还应用了穷竭法与归谬法对他的结果进行了严格证明。

他的证明是这样的：在弓形 AVB 内作 $\triangle AVB$（如图1.4，V 为顶点，VT 为直径），再过边 AV 的中点 E' 及边 BV 的中点 E，分别作直径 $D'E'$ 及 DE，而后在弓形 $AD'V$ 及弓形 BDV 内分别作同底等高 $\triangle AD'V$ 及 $\triangle BDV$。继续在所余四个小弓形内再分别作同底等高小三角形。这样作 n 次，再把这些小三角形的面积加起来，便可找出与弓形 AVB 的关系。

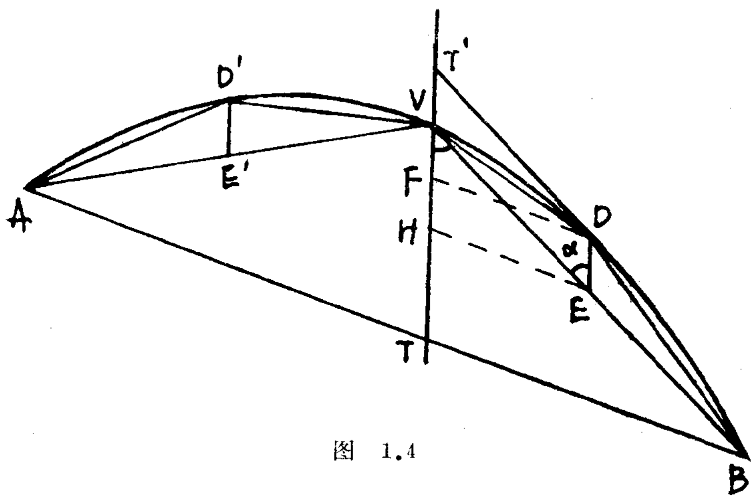

图 1.4

现设 $\triangle AVB$ 的面积为 S，我们来证明

$$\triangle BDV = \frac{1}{8}\triangle AVB = \frac{1}{8}S,$$

或 $\triangle BDV=\frac{1}{4}\triangle TVB.$ (1)

只要证得 $DE=\frac{1}{4}VT$ 即可。因为

$$\triangle TVB \text{ 面积}=\frac{1}{2}VB\cdot VT\sin\alpha.$$

(为简便计我们借用了三角函数)

$$\triangle BDV \text{ 面积}=\frac{1}{2}VB\cdot DE\sin\alpha.$$

只要 $DE=\frac{1}{4}VT$，则得（1）式成立。现作 EH 及 $DF \parallel AB$、$DT' \parallel VB$。则 H 为 VT 中点．又 DT' 为切线，故

$$T'V=VF,\ T'V=DE=FH,$$

$$\therefore\quad DE=VF=FH=\frac{1}{2}VH=\frac{1}{4}VT.$$

同理，可得

$$\triangle AD'V=\frac{1}{8}\triangle AVB=\frac{1}{8}S$$

$$\therefore\quad \triangle BDV+\triangle AD'V=\frac{1}{4}\triangle AVB=\frac{1}{4}S.$$

进而在 n 次之后总面积将等于

$$S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{4^2}S+\cdots+\frac{1}{4^n}S=S\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=S\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}\right).$$

这样，他从直观上认为当小三角形越来越多时，由这些小三角形组成的多边形将穷竭弓形，即可任意接近弓形（任意接近是指差可任意小），但也不能超过弓形。故他认为

$$S\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}S=\frac{4}{3}S,$$

即为弓形的面积。

阿基米德用上述方法得出了不少结果。比如，圆的面积，半圆及抛物线弓形的重心，球体，抛物体，圆锥体等的体积及重心。下面我们看一个求圆锥体体积的例子。

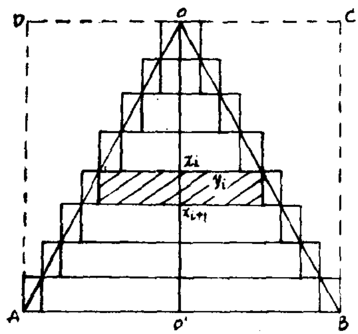

图 1.5

图 1.5 给出了一个正圆锥体被过轴线 OO' 的平面所截，得出的截面。正圆锥体的体积自然可视为由 $\triangle OAB$ 绕轴线旋转而成。先将线段 OO' 等分为 n 段，每段长 $h=\frac{L}{n}$ $(OO'=L)$，以每一段（如 X_iX_{i+1}）为轴作内接圆柱，其体积为

$$h\cdot\pi y_i^2=h\cdot\pi(ax_i)^2=\pi a^2h(ih)^2=\pi a^2\frac{L^3}{n^3}i^2.$$

内接小圆柱之和为

$$\pi a^2\frac{L^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)$$

$$=\pi a^2 L^3\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\right]^*,$$

同样外接小圆柱之和为

$$\pi a^2\frac{L^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$

$$=\pi a^2 L^3\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]^*.$$

从而

$$\frac{\text{圆柱体}ABCD\text{体积}}{\text{内接阶梯形体积}}=\frac{\pi(aL)^2\cdot L}{\pi a^2L^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\right)}>3^*,$$

$$\frac{\text{圆柱体}ABCD\text{体积}}{\text{外接阶梯形体积}}=\frac{\pi(aL)^2\cdot L}{\pi a^2L^3\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]}<3^*.$$

---

* 我们可以用代数的方法证得这两个等式与不等式。由

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

和 $1^3=1^3$，$2^3=(1+1)^3$，$3^3=(1+2)^3,\cdots$，$n^3=(1+(n-1))^3$.

$\therefore$ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=n+3[1+2+\cdots+(n-1)]$

$+3[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]+[1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3]$.

解方程得

$$(1)\qquad 1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

从而 $\dfrac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)<\dfrac{1}{3}$.

将(1)式的 n 换为 $n+1$ 同样得

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)>\frac{1}{3}.$$

于是上述比式可写为

$$\frac{\text{圆柱体}ABCD\text{体积}}{\text{内接阶梯形体积}} > 3 > \frac{\text{圆柱体}ABCD\text{体积}}{\text{外接阶梯形体积}} \qquad (1)$$

另外，由直观得

$$\frac{\text{圆柱体}ABCD\text{体积}}{\text{内接阶梯形体积}} > \frac{\text{圆柱体}ABCD\text{体积}}{\text{锥体体积}} > \frac{\text{圆柱体}ABCD\text{体积}}{\text{外接阶梯形体积}} \qquad (2)$$

接着阿基米德将 OO' 上的分点随意加密，即 n 随意增大。此时，内接阶梯形与外接阶梯形也可随意接近圆锥体，也就是不等式（1）（2）两端可以随意接近。至此，他作出结论：外接柱体 $ABCD$ 与圆锥体体积之比，即不能大於也不能小於三，因而等於三。即

$$\text{圆锥体} = \frac{1}{3}\text{外接柱体}.$$

这是大家所熟知的公式。

以上所用的方法即所谓“穷竭法”与“归谬法”。

需要指出，阿基米德的穷竭法也不够严格。比如他让 n 随意增大，以至两个图形面积之差可以很小为止，并没有说 n 可以无限增大。因为当时人们并不承认存在无限。由于 n 不论取多大，所得阶梯形或多边形也不会与锥体（或弓形）重合，所以他的结论之得来就有疑问了。因此他并没有真正作到用阶梯形（或多边形）对锥体（或弓形）的穷竭（其实“穷竭法”这个名词也是后人加的）。这只有极限概念引入后，才能得到解决。另外，这个方法的很大弱点，是计算级数的值很不容易。虽然缺点很多，但这种处理问题的想法很有道理，不失为一项杰出的创举；计算虽困难，但也还能解