高等学校教材

专科适用

水文统计学

江苏水利工程专科学校 费勤贵 编

高等学校教材

专科适用

水文统计学

江苏水利工程专科学校 费勤贵 编

水利电力出版社

内 容 提 要

本书是根据水利部科教司组织的水利水电类高等专科学校水文及水资源专业研究制定的《水文统计学教学大纲》编写的教材。全书共分十章，内容包括概率论基础知识，水文学上常用的参数估计、假设检验、方差分析、误差分析、回归分析等统计方法以及随机过程的应用等。书中基本理论简明通俗，系统性较强，结合实际举例丰富。此外，每章都有习题，书后附有答案，便于学习和掌握。

本书为普通高等专科学校或职工大学水文与水资源专业教材，也可供水利类师生及水利、气象、环境保护等工程技术人员参考。

高 等 学 校 教 材
专 科 适 用
水 文 统 计 学
江苏水利工程专科学校 费勤贵 编
*
水利电力出版社出版
（北京三里河路6号）
新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店经售
水利电力出版社印刷厂印刷
*
787×1092毫米 16开本 16印张 361千字
1991年5月第一版 1991年5月北京第一次印刷
印数:0001— 1190册
ISBN 7-120-01239-8/TV·439
定价4.20元

前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象规律性的数学学科。概率统计的理论和方法在自然科学、社会科学、工程技术、军事和工农业生产中都有着极其广泛的应用。应用到水文学上称为水文统计。

水文现象如水位、流量、降雨量等普遍地受到随机因素的影响，因此概率统计方法在水文学的各个部门也有着广泛的应用。从水文站网的规划，水文、水质资料的收集和整理，到应用资料进行分析、计算和预报都要用到概率统计方法。

本书是根据水利部科教司组织的水利水电类高等专科学校水文及水资源专业研究制定的《水文统计学教学大纲》编写的教材。全书可分四部分：概率论部分(第一章至第四章)是全书的基础，为读者提供了必要的基础理论；数理统计部分（第五章至第八章）介绍水文上常用的参数估计、假设检验、方差分析和回归分析，是全书的重点；误差分析（第九章）系统而扼要地介绍误差的基本理论和在水文上的实际应用；随机过程（第十章）介绍随机过程的基本概念，突出时间序列分析在水文上的应用。

阅读本书要求读者具有一定的高等数学和线性代数知识。书中的定理、性质都尽可能做到通俗易懂。书中凡有*号的地方，不作必修内容，只供读者参考。

本书由河海大学水资源水文系刘治中同志担任主审。参加审稿的还有山东水利专科学校梁学田副教授、黄河水利职工大学李连新副教授、江苏水利工程专科学校郑濯清教授，杨诚芳、柴国栋副教授以及长江职工大学宋萌勃同志。他们都认真地审阅了原稿并提出许多改进意见，在此谨向上述各位同志表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中错误、缺点难免，恳请读者批评指正。

编　者

1989年7月

目　录

第一章　随机事件及其概率

第一节　随机现象和随机试验

一、必然现象和随机现象

在自然界和人们的生活中经常要遇到各种各样的现象，这些现象大体可分两类：必然现象和随机现象。

必然现象是指在一定条件下必然会出现的现象。例如，“在标准大气压下，纯水加热到100℃沸腾”；“在恒力作用下，质点作等加速运动”；“海洋潮汐运动，在日月引力作用下每日出现两次高潮和两次低潮”等。对于必然现象，人们可以根据自然科学所揭示的规律来进行预测。

随机现象是指在一定条件下，所出现的结果不完全确定和不能确切预言。例如，掷一枚硬币，出现正面（有徽花的一面）朝上或反面朝上；掷一颗骰子，掷出的点子数；长江南京下关站的年最高水位等等，这些现象都是不完全确定的，也是不能确切预言的。我们把现象的这种不完全确定性和不能确切预言性称为现象的随机性。

二、随机试验和随机事件

在概率论中，凡是对现象的观察或为此而进行的实验都称之为试验，而称观察的结果为试验的“结局”或“事件”。

对必然现象的观察叫做决定性试验。对于决定性试验，试验条件决定试验结果，并在一定条件下，可以根据科学的规律事先预测试验结果。

对随机现象的观察叫做**随机试验**，用E表示。对于随机试验，在完全相同的条件下可能出现不同的结果，即试验具有随机性。

随机试验具有以下三个特性：

1）可以在相同的条件下重复地进行；

2）每次试验的可能结果不止一个，并且能够事先明确试验的所有可能结果；

3）进行一次试验之前不能够确定哪一个结果会出现。

我们把随机试验的结果称为**“事件”**。根据事件发生的可能性又将事件分成以下三类：

（1）必然事件　在每次试验中一定会出现的事件叫做必然事件，用Ω表示。例如，“掷两颗骰子，掷出的点子数之和不小于2”；“长江南京下关站年最高水位在（0，∞）范围”等，都是必然事件。

（2）不可能事件　在任何一次随机试验中都不会出现的事件叫做不可能事件，用ϕ表示。例如，“两次射击命中三次”；“大范围连续降雨天然河道水位下降”等，都是不可能事件。

必然事件与不可能事件密切相关，必然事件的反面就是不可能事件。

（3）随机事件　在一次随机试验中可能出现也可能不出现的事件，叫做随机事件，

用A、B、C等表示。例如，“掷两颗骰子，掷出的点子数等于2”，“两次射击命中一次”，“长江南京下关站年最高水位在9.0m以上”，“扬州年降水量小于1000mm”等都是随机事件。

为了讨论问题方便，我们把必然事件Ω和不可能事件ϕ也当作随机事件，它们是一种特殊的随机事件。

三、基本事件空间

根据研究的范围和事件的构成，将事件又分为基本事件和复合事件两类。随机试验的每个可能结果或最基本的结局称为**基本事件**，用ω表示。基本事件的任一集合称为**复合事件**，简称事件。而基本事件的全体集合$\{\omega\}$称为**基本空间**，记作$\Omega=\{\omega\}$。

例 1-1 设随机试验E为“掷一颗骰子”。用ω_i（$i=1$，2，…，6）表示基本事件：掷出的点子数为i，则基本空间由6个基本事件构成，即

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6\}$$

例 1-2 设随机试验E为“向靶子射击，直到击中为止”，用ω_i表示第i次击中，$\overline{\omega}_i$表示第i次不中。试用基本事件表示1）基本空间；2）随机事件A——“击中靶子在4次射击之内”；3）随机事件B——“第5次击中靶子”。

解 1）$\Omega=\{(\omega_1),\ (\overline{\omega}_1,\ \omega_2),\ (\overline{\omega}_1,\ \overline{\omega}_2,\ \omega_3),\ \cdots\}$

2）$A=\{(\omega_1),\ (\overline{\omega}_1,\ \omega_2),\ (\overline{\omega}_1,\ \overline{\omega}_2,\ \omega_3),\ (\overline{\omega}_1,\ \overline{\omega}_2,\ \overline{\omega}_3,\ \omega_4)\}$

3）$B=\{\overline{\omega}_1,\ \overline{\omega}_2,\ \overline{\omega}_3,\ \overline{\omega}_4,\ \omega_5\}$

第二节 事件间的关系及运算

在实际问题中，往往要在一个随机试验下同时研究几个事件以及它们之间的联系。设随机试验E的基本空间为$\Omega=\{A,\ B,\ A_k(k=1,\ 2,\ \cdots)\}$，下面定义事件间的关系及其运算法则。

一、事件间的关系

（1）**事件的包含和相等** 若事件B发生必然导致事件A发生，则称事件A包含事件B，记作$A\supset B$或$B\subset A$。这可以用图1-1（a）直观地说明。图中四边形表示基本空间Ω，圆A与圆B分别表示事件A与事件B，事件B包含事件A。

若事件A包含事件B，事件B又包含事件A，即$A\supset B$，$B\supset A$，则称事件A与事件B相等（或称等价），记作$A=B$。

例 1-3 设随机试验E为观测扬州8月份降水量，用ω_x表示观测结果为x(mm)，则从理论上说，基本空间$\Omega=\{\omega_x;\ 0\leqslant x<\infty\}$，设$A$表示事件“雨量在50～100mm范围内”，$B$表示事件“雨量不超过100mm”，$C$表示事件“雨量小于或等于100mm”，那么可以得到$A\subset B$；$B=C$。

（2）**事件的和** 由事件A、B中至少有一个发生而构成的事件，称为事件A与B之和，记作$A+B$或$A\cup B$。$A+B$可由图1-1(b)直观地说明。图中阴影部分表示$A+B$。

两个事件之和的概念可以推广到有限个事件的情形。如果事件A是由事件A_1、A_2、…、A_n中至少有一个发生而构成的事件，则称A为n个事件A_1、A_2、…、A_n之和，记作

$$A=A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_n \tag{1-1}$$

例 1-4 某站作 3 次河流水位预报，设事件A_0为“3次预报全未报对”；A_1为“3次预报报对1次”；A_2为“3次预报报对2次”；A_3为“3次预报全都报对”，则

$A_1+A_2+A_3=$“3次预报报对次数不少于1”

$A_0+A_1+A_2=$“3次预报报对次数不多于2”

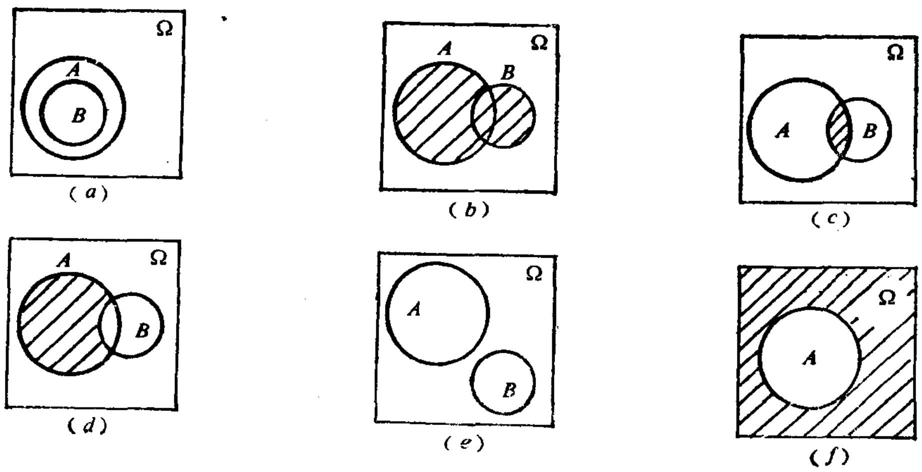

图 1-1

（3）**事件的积** 由事件A、B同时发生而构成的事件，称为事件A与B的积，记作AB或$A\cap B$。AB可由图1-1(c)直观地说明。图中阴影部分表示AB。

类似地可以定义有限个事件A_i（$i=1, 2, \cdots, n$）的积：

$$A_1A_2\cdots A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i \tag{1-2}$$

表示n个事件同时发生。

例 1-5 设随机试验E为生活饮用水水质监测采样，用事件A表示水样中悬浮物超标（超过国家规定的标准），B表示水样总硬度超标，C表示水样中酚、氰、砷、汞以及六价铬的含量超标，则ABC表示采集的水样中悬浮物、总硬度和酚氰等物质含量都超标。

（4）**事件的差** 事件A发生而事件B不发生，这一事件称为事件A与B的差，记作$A-B$。$A-B$可由图1-1(d)直观地说明。图中阴影部分表示$A-B$。在例1-3中事件$B-A$则表示“扬州8月份雨量在区间[0, 50)mm内。

（5）**互不相容事件与相容事件** 若事件A与事件B不能同时发生，即$AB=\phi$，则称事件A与事件B为互不相容事件，如图1-1(e)所示。反之，如果事件A与事件B能同时发生，则称事件A与B为相容事件。在例1-4里，事件A_0，A_1，A_2，A_3中任意两个都是互不相容事件，而在例1-5里，事件A，B，C中任意两个都是相容事件。

（6）**对立事件** 若在每次试验中，事件A与事件B不能同时发生，而又必然发生其中之一，即满足

$$A+B=\Omega,\ AB=\phi$$

则称A与B为对立事件或互逆事件．记作$A=\overline{B}$或$B=\overline{A}$，如图1-1(f)中阴影为$\overline{A}$。

例 1-6 设随机试验为对某河流某断面进行水位观测，设事件A表示“超过正常水位”，事件B表示“未超过正常水位”，则A与B是对立事件。

二、事件运算的简单性质

设A、B、C为任意事件，根据事件关系的定义它们满足

1）交换律：$A+B=B+A,\ AB=BA$ （1-3）

2）结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C,\ A(BC)=(AB)C$ （1-4）

3）分配律：$A(B+C)=AB+AC,\ A(B-C)=AB-AC$ （1-5）

此外，事件间的运算关系还满足

4）对偶原则：$\overline{A+B}=\overline{A}\ \overline{B},\ \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$ （1-6）

证明 由于$A+B$表示“A和B至少有一个出现”，所以它的逆事件$\overline{A+B}$表示A和B都不出现，即$\overline{A}\ \overline{B}$出现，这样$\overline{A+B}\subset\overline{A}\ \overline{B}$。反之，$\overline{A}\ \overline{B}$表示“$A$和$B$都不出现”，所以表示“$A$和$B$至少有一个出现”的$A+B$的对立事件$\overline{A+B}$一定出现，这样$\overline{A}\ \overline{B}\subset\overline{A+B}$。于是$\overline{A+B}=\overline{A}\ \overline{B}$。类似地可以证明$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$。

例 1-7 向指定的目标射击3枪。以A_1、A_2、A_3分别表示事件“第1、2、3枪击中目标”。试用A_1、A_2、A_3表达以下各事件：

1）只有第1枪击中； 2）只击中1枪；

3）3枪都未击中； 4）至少击中1枪。

解 1）事件“只有第1枪击中”，意味着第2枪不中，第3枪也不中。因此事件“只有第1枪击中”可以表示成

$$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$

2）事件“只击中1枪”，可能是第1枪击中，也可能是第2枪或第3枪击中。所以表示为

$$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

3）事件“3枪都未击中”，就是事件“第1、2、3枪都未击中”，所以表示为

$$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$

4）事件“至少击中1枪”，就是事件“第1、2、3枪至少有1枪击中”，所以可表示为

$$A_1+A_2+A_3$$

第三节 随机事件的概率

随机事件虽然有其偶然性的一面，即它在一次试验中，可能发生，也可能不发生；但在大量重复试验中，人们发现它的发生与否是具有内在规律的，也就是说它出现的可能性大

小是可以“度量”的。随机事件的概率就是用来计量随机事件出现可能性大小的数字特征。我们把事件A的概率用$P(A)$表示。

随机事件是客观存在的，我们不仅要判断一个随机试验里可能出现哪些随机事件，更重要的是研究这些随机事件发生的可能性大小。例如，修建大水坝时，必须根据历年水文资料估计发生洪水的可能程度来确定大坝的高度和泄洪（溢洪）建筑物的尺寸。

下面我们先从某些特殊场合来合理地规定事件概率的计算方法，然后以随机事件出现的频率为背景，用公理化方式引进（在一般情形下）随机事件的概率的定义，并由此推导出概率的一些性质。

一、古典型随机试验　概率的古典定义

古典型随机试验E是一类简单的随机试验，它具备两个特性：

1）有穷性：随机试验的可能结果是有限的，即它的基本事件空间$\Omega=\{\omega\}$只含有穷个基本事件ω；

2）等可能性：在每次试验中，各个基本事件出现的可能性都是相等的。

例如，掷一枚（完全均匀的）硬币；掷一颗（质地均匀的正六面体）骰子；从n个相同的球中随机地（任意地）取出一个球等，都是古典型随机试验。水文上，观测河流某断面的最高水位是否超过设计水位；旱季某定点地下水位是否下降到某深度以下；某站在一次降水过程中雨量是否超过50mm等，都不是古典型随机试验，因为它们都不具备等可能性。

由古典型随机试验的特性，很自然地引出概率的古典定义来。

定义 1-1　设古典型随机试验E的基本空间Ω共含n个基本事件，如果事件A包含m个基本事件，则A的概率定义为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1-7}$$

可见，古典概率的计算是比较简单的，问题归结为计算基本空间Ω和A事件包含的基本事件数。

例 1-8　掷一颗骰子，求1）掷出偶数点的概率；2）掷出不小于3点的概率；3）掷出3的倍数点的概率。

解　1）骰子是质地均匀的正六面体，所以掷一次各面出现的可能性是相同的，因此“掷骰子”是属于古典型随机试验。

设事件A表示“掷出偶数点”。由于基本空间$\Omega=\{1、2、3、4、5、6\}$，A由3个基本事件组成，即$A=\{2、4、6\}$，所以$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$。

2）设事件B表示“掷出不小于3点”，则$B=\{3、4、5、6\}$，所以$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$。

3）设事件C表示“掷出3的倍数点”，则$C=\{3、6\}$，所以$P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$。

在较为复杂的古典型随机试验中，基本空间Ω和事件A所包含的基本事件数主要是利用组合分析的方法进行计算，下面给出组合分析的主要结论。

（ 1 ）乘法法则　如果一个过程可以分成k个阶段进行，第i（$i=1, \cdots, k$）个阶段有n_i种不同做法，且每个阶段的任意一种做法，都可以和其余各个阶段的各种不同做法构成整个过程的一种做法，那么整个过程有$n_1 n_2 \cdots n_k$种不同做法。特别，当$n_1=\cdots=n_k=n$时，整个过程有n^k种不同做法。

（ 2 ）排列　从n个不同元素中每次选m（$m \leqslant n$）个按顺序进行排列，共有

$$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

种不同排法。特别，当$m=n$时有

$$P_n=A_n^n=n!=n(n-1)\cdots 2\cdot 1$$

种不同排法。$m<n$时叫做选排列，$m=n$时叫做全排列。

（ 3 ）组合　从n个不同的元素中每次选$m(m \leqslant n)$个为一组，共有

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{n!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

种不同组合。

例 1-9　从一批由90件正品、 3 件次品组成的产品中，任取 3 件产品（随机抽样），求取得 1 件次品、 2 件正品的概率。

解　这是一个古典型随机试验。因为从93件产品中每次任取 3 件，其基本空间$\Omega=C_{93}^3$，含有限个基本事件；由于是任意取样，每个产品（不论是正品还是次品）被取到的可能性都是相等的。

设A表示事件“取到的 3 件产品中， 1 件是次品， 2 件是正品”，也就是说从 3 件次品中取 1 件，从90件正品中取 2 件，它们的组合数分别为C_3^1和C_{90}^2。根据组合分析的乘法法则，A包含的基本事件数为$C_3^1 C_{90}^2$，于是事件A的概率为

$$P(A)=\frac{C_3^1 C_{90}^2}{C_{93}^3}=0.0926$$

例 1-10　电话号码由 6 位数字组成，每位数字都可以是 0 ， 1 …， 9 中的任何一个。假设各数字出现在任何一位上都是等可能的，求电话号码上的六位数字全不相同的概率。

解　由题设可知这是个古典型随机试验。电话号码由六位数字组成，每位数字都有10种可能，根据乘法法则，6 位数字就有10^6种可能，也就是说基本空间Ω含10^6个基本事件。设事件B表示“电话号码的 6 位数字全不相同”，则B包含A_{10}^6个基本事件，所以

$$P(B)=\frac{A_{10}^6}{10^6}=0.1512$$

在随机抽样中有“放回抽样”和“不放回抽样”两种方式，从下面的例子里我们将看到在这两种不同方式下概率的计算是不同的。

例 1-11　一个口袋装有 6 只玻璃球，其中 4 只是白球， 2 只是红球，从袋中取球两次，每次取一只。考虑两种情况： 1 ）第一次取一球观察其颜色后放回袋中，第二次再取一球，这种情况叫做放回抽样； 2 ）第一次取一球不放回袋中，第二次再取一球，这种情

况叫做不放回抽样。试分别就上面二种情况求事件“取到两只都是白球”、“取到两只球至少有一只是白球”的概率。

解 1）放回抽样情况

设样本空间Ω，事件A、B分别表示“取到两只都是白球”和“取到两只球至少一只是白球”。

第一次从袋中取球，有6只球可供抽取，第二次也有6只球可供抽取，由组合分析的乘法法则，共有6×6种取法，每种取法是一基本事件，所以Ω含6×6个基本事件。又由于第一次有4只白球可供抽取，第二次也有4只白球可供抽取，因此共有4×4种取法，即事件A包含4×4个基本事件，于是

$$P(A)=\frac{4\times4}{6\times6}=0.4444$$

“取到两只球至少一只是白球”即“第一次取到白球，第二次取到红球；第一次取到红球，第二次取到白球；两次都取到白球”，所以B事件包含$4\times2+2\times4+4\times4=32$个基本事件，于是

$$P(B)=\frac{32}{6\times6}=0.8889$$

2）不放回抽样情况

这种情况下，第一次有6只球可供抽取，第二次只有5只球可供抽取，所以Ω含6×5个基本事件。又由于第一次有4只白球可供抽取，在第一次取到白球下，第二次只有3只白球可供抽取，因此A事件包含4×3个基本事件，于是

$$P(A)=\frac{4\times3}{6\times5}=0.4$$

对于事件B，根据上述分析，它包含$4\times2+2\times4+4\times3=28$个基本事件，于是

$$P(B)=\frac{28}{6\times5}=0.9334$$

由（1-7）式定义的古典概率具有下列性质

1）非负性：对于任意事件A，有$0\leqslant P(A)\leqslant1$；

2）规范性：$P(\Omega)=1$；

3）可加性：如果事件A和B不相容，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1-8}$$

性质1）、2）是显然的，下面给出性质3）的证明。

设$\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$，$A=\{\omega_1^{(1)},\cdots,\omega_{m_1}^{(1)}\}$，$B=\{\omega_1^{(2)},\cdots,\omega_{m_2}^{(2)}\}$，因此

$$P(A)=\frac{m_1}{n},\quad P(B)=\frac{m_2}{n}$$

由于A和B不相容，所以$A+B=\{\omega_1^{(1)},\cdots,\omega_{m_1}^{(1)};\ \omega_1^{(2)},\cdots,\omega_{m_2}^{(2)}\}$，含有$m_1+m_2$个基本事件，于是

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$$

二、几何型随机试验　几何概率

古典型随机试验是假定试验的可能结果是有穷的，对于试验的可能结果为无穷的情形显然是不适用的。几何型随机试验正是弥补了这个局限。

假设Ω是m维空间中一有界区域。以$L(\Omega)$表示Ω的m维体积（一维体积是长度，二维体积是面积，三维体积是普通的体积）。考虑随机试验E：向区域Ω中均匀地投掷一随机点，假设：

1）随机点可能落到区域Ω内的任何一点，但是不可能落在Ω之外；

2）随机点在Ω中分布均匀：它落入Ω中任何区域的可能性与该区域的m维体积成正比，而与该区域的形状及其在Ω中的位置无关。

我们称随机试验E为几何型随机试验，Ω是它的基本事件空间。

定义 1-2　假设Ω是几何型随机试验E的基本事件空间，$A\subset\Omega$是Ω中可以用体积来度量的子集，$L(A)$是它的m维体积，以A表示E的事件"随机点落入区域A"，称

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)} \tag{1-9}$$

为A的概率，其中$L(A)$、$L(\Omega)$分别为A和Ω的m维体积。

例 1-12　公共汽车每隔 3 min来 1 辆，求每一个乘客来到停车站后等车时间不超过 1 min（事件A）的概率？

解　乘客可以在接连两辆车之间的任何一个时刻到达停车站，因此每一个乘客到达停车站时间τ可以看成是均匀出现在长为 3 min的时间区域上的一个随机点。假设上一辆汽车于时刻T_1开出，而下一辆汽车于时刻T_2到达，线段T_1T_2的长度等于 3（图1-2）；T是T_1T_2上的一点，且TT_2的长度等于 1。显然，乘客只有在T时刻后到达（即只有τ落在线段TT_2上），等车时间才不会超过 1 min。因此

$$P(A)=\frac{L(TT_2)}{L(T_1T_2)}=\frac{1}{3}$$

其中$L(TT_2)$，$L(T_1T_2)$分别为线段TT_2和T_1T_2的长度。

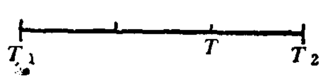

图 1-2

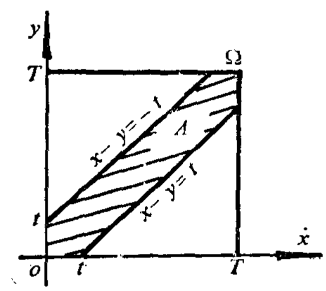

图 1-3

例 1-13　二人约定于o到T时内在某地相见，先到者等t（$t\leqslant T$）时后离去，试求二人能会见（事件A）的概率？

解　以x、y分别表示二人到达的时刻，则$o\leqslant x\leqslant T$，$o\leqslant y\leqslant T$，随机点(x,y)构成一边长为T的正方形Ω。二人能会见的充要条件是$|x-y|\leqslant t$，这个条件在正方形Ω中决定一个区域A（图1-3中阴影部分）。换句话说，二人相遇的充要条件是随机点(x,y)落入区域A中。因此二人相会的概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$$

其中$L(A)$和$L(\Omega)$分别为A和Ω的面积。

由（1-9）式定义的几何概率具有和古典概率完全类似的性质，即

1）非负性：对任意事件A，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

2）规范性：$P(\Omega)=1$；

3）完全可加性：假设可数多个事件A_1，A_2，…两两不相容，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1-10}$$

证明 由于$A \subset \Omega$，故$0 \leqslant L(A) \leqslant L(\Omega)$，其中$L(A)$、$L(\Omega)$分别表示$A$和$\Omega$的$m$维体积，于是$0 \leqslant L(A)/L(\Omega) \leqslant 1$，即$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$，特别$P(\Omega)=L(\Omega)/L(\Omega)=1$。

由于A_i（$i=1,2,\cdots$）都可以用m维体积度量，而且互不相交，所以

$$L\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} L(A_i)$$

由几何概率定义得

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\frac{L\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)}{L(\Omega)}=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{L(A_i)}{L(\Omega)}=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

三、随机事件的频率 概率的统计意义

概率的古典定义及几何定义都是以等可能性为基础的，而很多情况下随机试验不一定具备这种性质。为了引出在一般情况下（其中包括古典型和几何型）随机事件的概率，我们首先提出随机事件频率的概念。

设随机事件A在重复n次试验中出现了r次，则称r为**频数**，比值$\frac{r}{n}$为这n次试验中事件A出现的**频率**，记作

$$\widehat{P}_n(A)=\frac{r}{n} \tag{1-11}$$

显然，任何随机事件在n次试验中出现的频率总是介于0与1之间，即

$$0 \leqslant \widehat{P}_n(A) \leqslant 1$$

经验表明，当试验重复多次时，随机事件A出现的频率具有一定的稳定性。这就是说，当试验次数充分多时，随机事件A出现的频率在区间[0，1]上的某个确定的数字p附近摆动。

例如，我们来看有人做的抛掷硬币试验，其结果列于表1-1，其中n为抛掷次数，r表示出现正面（事件A）的次数，$\widehat{P}_n(A)=\frac{r}{n}$表示出现正面的频率。

从表1-1中我们可以看出：1）随着抛掷次数的增多，频率明显地趋于稳定；2）对于固定的n，具体地进行n次试验称为一轮试验。显然，一个事件的频率$\widehat{P}_n(A)$既依赖于试验次数n，又依赖于试验的轮次。

随机事件频率具有以下性质：

1）非负性：对于任意事件A，$0 \leqslant \widehat{P}_n(A) \leqslant 1$；

表 1-1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	r	$\widehat{P}_n(A)$	r	$\widehat{P}_n(A)$	r	$\widehat{P}_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

2）规范性：$\widehat{P}_n(\Omega)=1$；

3）完全可加性：假设可数多个事件A_1，A_2，…两两不相容，则

$$\widehat{P}_n\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\widehat{P}_n(A_i) \tag{1-12}$$

证明　性质1）和2）是显然的，下面证明性质3）。

由于任何两个事件都不会同时出现，所以$\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$、$A_1$、$A_2$、…的频数$r$、$r_1$、$r_2$…满足等式

$$r=r_1+r_2+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}r_i$$

由频率的定义得

$$\widehat{P}_n\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\frac{r}{n}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{r_i}{n}=\sum_{i=1}^{\infty}\widehat{P}_n(A_i)$$

如前所述，当试验次数增大时，频率趋于稳定。随着试验次数的无限增大，任一事件的频率都趋于稳定在某一个数附近，而这个数既不依赖于试验次数，也不依赖于试验的轮次。因此，自然应该用这个数来度量事件出现的可能性，并称之为概率。正是如此，对于任意随机试验，当n充分大时，我们用频率作为概率的近似值而应用于实际问题之中。

四、概率的公理化定义

概率的古典定义和几何定义都带有局限性，因为它们都是建立在等可能的假设基础上，而实际问题中往往是没有这种等可能性的。用频率来估计概率虽然适合一般情形且比较直观，但是频率的稳定性是以试验次数很大为基础的。然而试验次数究竟大到怎样的程度是不明确的。因此，有必要提出一组关于概率的公理。

公理1　非负性：对于任一随机事件A有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \tag{1-13}$$

公理2　规范性：$P(\Omega)=1$　(1-14)

公理 3　完全可加性：对于任意个可数事件$A_i(i=1,2,\cdots)$，如果$A_iA_j=\phi$，$i\neq j$，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1-15}$$

于是我们概括出下面关于概率的定义。

定义 1-3　设随机试验E的基本空间为Ω，对于E的每一个随机事件A赋予一个实数$P(A)$，如果它满足公理 1 、 2 、 3 ，则称$P(A)$为A的概率。

在概率的三条公理的基础上，可以推导出概率的下列性质：

1 ）$P(\phi)=0$，即不可能事件的概率等于 0 。

证明　因$\phi=\phi\cup\phi\cup\cdots\cup\phi\cup\cdots$，由完全可加性知

$$P(\phi)=P(\phi)+P(\phi)+\cdots+P(\phi)+\cdots$$

于是$P(\phi)=0$。

2 ）（有穷）可加性。对于有限多个事件$A_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果$A_iA_j=\phi$，$i\neq j$，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1-16}$$

证明　在公理 3 中，令$A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\phi$，从而$A_i(i=1,2,\cdots,n,n+1,n+2,\cdots)$是可数个互不相容事件。由公理 3 的完全可加性及$P(\phi)=0$，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

3 ）对立事件的概率有等式

$$P(\bar{A})=1-P(A) \tag{1-17}$$

证明　由（1-16）式有

$$P(A)+P(\bar{A})=P(A+\bar{A})=P(\Omega)=1$$

由此得（1-17）式。

4 ）如果事件B包含A（$A\subset B$），则

$$P(A)\leqslant P(B),\quad P(B-A)=P(B)-P(A) \tag{1-18}$$

证明　当$A\subset B$时，$B=A+(B-A)$，且$A(B-A)=\phi$，由（1-16）式有

$$P(B)=P(A)+P(B-A),\quad 即P(A-B)=P(B)-P(A)$$

由于$P(B-A)\geqslant 0$，于是$P(B)\geqslant P(A)$。

5 ）加法公式。对于任意两事件A、B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1-19}$$

证明　先把$A+B$表示成两个互不相容事件A及$(B-AB)$的和（图1-4），即$A+B=$