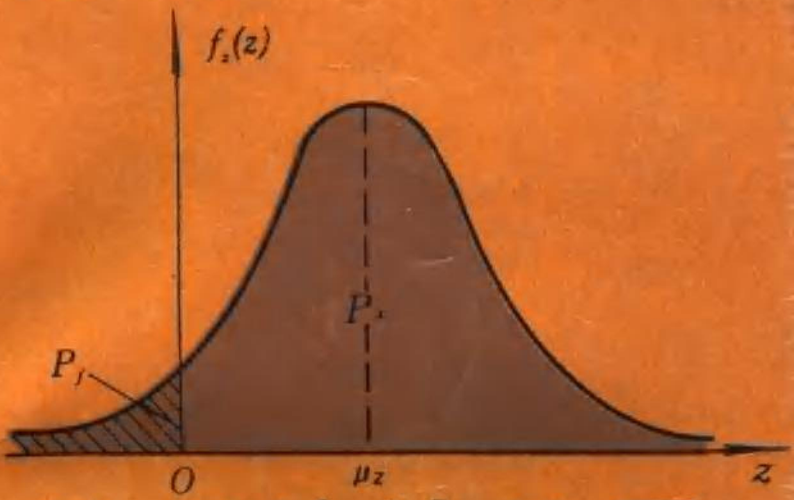
潘承毅　何迎晖　编著



数理统计的原理与方法

TONGJIDAXUE
CHUBANSHE
同济大学出版社

数理统计的原理与方法

潘承毅　何迎晖　编著

同济大学出版社

(沪)新登字204号

内 容 提 要

本书根据1991年国家教委关于工学(含工程类型)硕士研究生应用统计课程教学基本要求编写而成。内容有数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析和应用统计方法等。书中附有相当数量的习题;附录中列出了概率论内容的基本要点;书后还附有习题的答案,可供读者自我检核。

本书可供工学(含工程类型)硕士研究生作为教材,也可供广大工程技术人员和科技人员参考。

责任编辑 洪建华
封面设计 王肖生

数理统计的原理与方法
潘承毅 何迎晖 编著
同济大学出版社出版
(上海四平路1239号)
新华书店上海发行所发行
江苏启东印刷三厂印刷
上虞科技外文印刷厂排版
开本850×1168 1/32 印张 15.75 字数:449 千字
1993年10月第1版 1993年10月第1次印刷
印数:1—3000 定价:8.95元
ISBN7-5608-1184-1/O·105

前　言

数理统计是一门应用性很强的数学课程．数理统计应用的广泛性决定了这门学科的重要性．最近几十年以来，建立在概率论基础上的数理统计在理论上、方法上与应用上都得到了迅速的发展．特别是，计算机技术的长足进步为数理统计的普遍应用提供了广阔的前景．

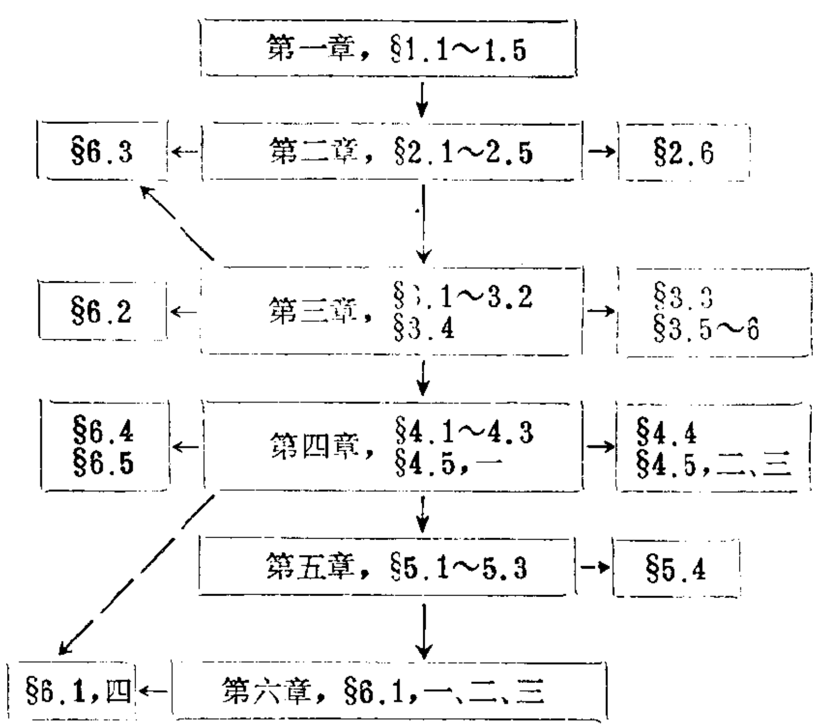
数理统计是绝大多数工学硕士研究生的必修课程．1991年 8月，国家教育委员会下达了该课程的“教学基本要求”．这个“教学基本要求”强调了重概念、重方法、重应用、重能力培养的精神．这与我们从多年教学实践中得到的认识不谋而合．工学硕士研究生由于其地位的特殊性已不满足于用数字代公式的那种学习方式，但对那种纯数学化的数理统计也望而生畏．既要讲清数理统计的基本原理，又要尽可能地强调数理统计的方法，这就是我们编写这本教材的立足点．

本书在编写过程中力求通过介绍实际例子引进统计概念，通过阐明统计思想介绍统计理论与统计方法．这有利于学生（特别是初学统计者）较快地掌握统计方法与提高处理随机性数据的能力．本书除了介绍经典的数理统计原理与方法之外，还介绍了一些近代的统计思想与统计方法，以便使学生尽早地接触近代统计知识．多年来，我们在与一些工科研究生打交道时，发现这是十分必要的．另外，本书以较多的篇幅介绍了应用统计方法．除了在每部分内容中提出一些应用统计工作者应注意的问题之外，在第六章里集中介绍了正交试验设计、抽样检查方法、可靠性统计（含结构可靠性）、判别分析与聚类分析．在介绍这些专门的统计分支时，我们力求深入浅

出，不追求枯燥的数学论证，而致力于让学生通过实例掌握方法。这些内容对学生撰写学位论文及今后的科研工作是有益的。

本书内容紧扣“教学基本要求”。全书分成六章。第一章讲述了数理统计的基本概念；第二章与第三章分别介绍了参数估计（包括点估计与区间估计）和假设检验的原理与方法；第四章与第五章分别介绍了应用价值很大的回归分析与方差分析这两个统计分支；第六章介绍了五类已经在各个领域中获得较大成功的应用统计方法。前五章的章末附有习题，书末附有习题答案。部分习题是正文内容的补充。对略有难度的习题我们都给出了必要的提示。

为了便于读者有针对性地选学有关内容，本书采用“模块”方式组织材料。各章节的逻辑框图（中间主干部分是“教学基本要求”所规定的内容，约需 40 学时）如下：



阅读本书的准备知识是微积分、线性代数与概率论。这大致上相当于目前我国高等工业学校大学生二、三年级的数学水平。为了便于读者查阅，我们在附录中列出了概率论内容基本要点。

本书是以工学(含工程类型)硕士研究生为主要对象的教材。对处于学位论文阶段的本科生与研究生,以及广大的工程技术人员,本书也是一本有价值的参考书。

本书由华中理工大学于寅、哈尔滨工业大学赵达纲、浙江大学林春土等教授、专家审阅。在此,向他们表示衷心感谢。本书的初稿、修改与定稿出版工作得到了同济大学研究生院的大力支持和帮助,特表谢意。

由于我们水平有限,谬误之处在所难免,敬请读者不吝赐教。

编　者

1992年3月2日

目　录

第一章　数理统计的基本概念

数理统计是数学的一个分支，它主要研究如何以有效的方法去收集、整理与分析带有随机性影响的数据，从而对所考察的问题作出推断和预测，直至为采取某种决策提供依据和建议。

数理统计方法的应用极其广泛，几乎在人类活动的一切领域中都能不同程度地找到它的应用，其原因在于实验是科学研究的根本方法，而随机性因素对实验结果的影响是无所不在、无时不有的。另一方面，应用上层出不穷的需要又推动了数理统计的发展。

本章介绍数理统计中的一些基本知识，内容包括总体、样本、统计量及其分布等。

§1.1　数理统计的基本内容

数理统计是处理带有随机性影响的数据的一门学科。为了使读者对这门学科的概貌有一个了解，下面先举一个例子。

例 1.1　某食品厂为了加强质量管理，在某天生产的一大批罐头中抽查了 100 个，测得内装食品的净重数据（单位：克）如下：

342	341	348	346	343	342	346	341	344	348
346	346	341	344	342	344	345	340	344	344
343	344	342	342	343	345	339	350	337	345
349	336	348	344	345	332	342	341	350	343
347	340	344	353	341	340	358	346	345	346
341	339	342	352	342	350	348	344	350	335
340	338	345	345	349	336	342	338	343	343
341	347	341	347	344	339	347	348	343	347
346	344	345	350	341	338	343	339	343	346
342	339	343	350	341	346	341	345	344	342

试问该天生产的罐头中食品净重不足 340 克的概率有多大?

按照概率论的方法，设随机地抽取一个罐头内装食品的净重为 X 克，所求的概率为 $P(X<340)$。然而，在实际问题中，随机变量 X 的分布是不清楚的，因此无法算出这个概率的具体数值。

数理统计方法要利用已有的 100 个数据所提供的信息，因为这 100个数据是对随机变量 X 作 100 次观测(即做了 100 次随机试验)得到的，它们的值反映了随机变量 X 的分布。这 100 个数据中最小值为 332，最大值为 358。我们把这 100 个数据所属的区间(331.5, 358.5]等分成长度为 3 的 9 个小区间(称为组)，并分别算出频数(即每组中数据的个数)与频率(即每组中数据的个数与数据总个数之比)，列出下表：

序 号 j	组$(a_{j-1},a_j]$	频数 n_j	频率f_j
1	(331.5,334.5]	1	0.01
2	(334.5,337.5]	4	0.04
3	(337.5,340.5]	12	0.12
4	(340.5,343.5]	32	0.32
5	(343.5,346.5]	30	0.30
6	(346.5,349.5]	12	0.12
7	(349.5,352.5]	7	0.07
8	(352.5,355.5]	1	0.01
9	(355.5,358.5]	1	0.01

根据上表中 9 个组$(a_{j-1},a_j]$及其相应的频数 n_j(或频率f_j) ($j=1,\cdots,9$)作出如图 1.1 的图形，这个图形称为**直方图**。

从直方图看，可以认为X大致上服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。于

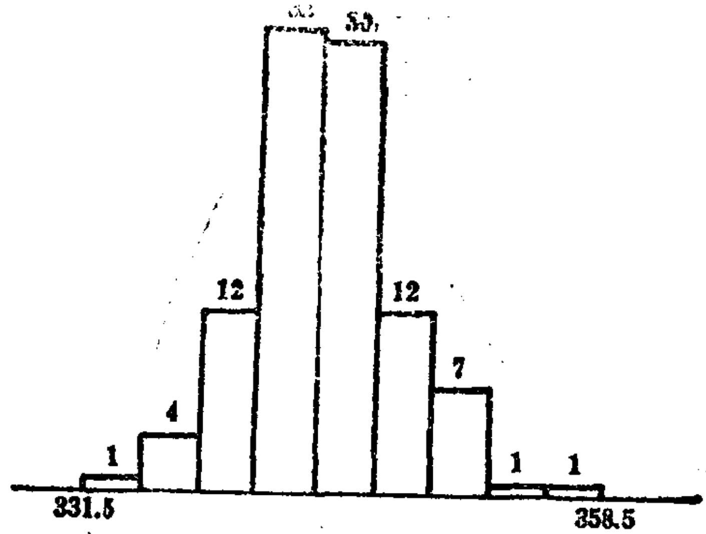


图 1.1　例 1.1 中的直方图

是，所求概率为 $P(X<340)=\Phi\left(\dfrac{340-\mu}{\sigma}\right)$[①]. 尽管如此，我们还是无法得到这个概率的具体数值，因为 μ 与 σ 的值未知。数理统计提供了一些方法，使我们可以从这 100 个数据出发对 μ 与 σ 的值作出推测。例如，以后我们将会看到，可以推测 μ 为 343.83，σ 为 4.04。这样，所求概率约为

$$P(X<340)=\Phi\left(\frac{340-343.83}{4.04}\right)=\Phi(-0.948)=0.1716.$$

从例 1.1 可以看到，数理统计的内容有以下两个特点：

(1) 数理统计的出发点是数据，因此必须先收集一批数据。如何收集数据？这是数理统计的两个重要分支——抽样方法与试验设计的基本内容。

(2) 有了数据之后，我们需要根据数据对所关心的问题（例如，例 1.1 中的概率 $P(X<340)$）进行推测。当然，这种推测是不可能

① $\Phi(x)$ 是标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数，即 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，$-\infty<x<\infty$.

绝对准确的，它总含有一定程度的不确定性，而概率正是不确定性大小的数量表示。这样，任何一种推测必须用一定的概率来表明推测的可靠程度。这种在一定的概率意义下的推测称为**统计推断**。统计推断的基本形式是**估计**（包括**点估计**与**区间估计**）与**检验**。

本书主要介绍统计推断的基本原理与方法，除 §6.1 外，一般不涉及抽样方法与试验设计的内容。

§1.2 总体与样本

在数理统计中，我们把研究对象的全体称为**总体**（或**母体**），把组成总体的每个成员称为**个体**。例如，在例 1.1 中，该天生产的所有罐头构成了一个总体，而每一个罐头是个体。在这个问题中，实际关心的仅仅是罐头内装食品的净重。因此，为了方便我们也把该天生产的所有各个罐头的净重看成一个总体，每个罐头的净重视为个体。

例 1.2 某厂要检查一大批产品的质量，每件产品可区分为合格品与不合格品。于是，这一大批产品便构成了一个总体，而每一件产品是个体。在这个问题中，实际关心的仅仅是产品的质量等级（合格或不合格）。因此，为了方便我们也把这一大批产品中所有各个产品的质量等级看成一个总体（等级允许重复），每一件产品的质量等级视为个体。这里，产品的质量等级是定性描写的，我们不难把它用一个数值指标来表示。例如，今后我们总是用数字“0”表示合格品，用数字“1”表示不合格品。

通过上面例子可以看到，在实际问题中，我们所关心的往往是总体中的个体的某个数值指标。不妨把个体的这个数值指标看作是随机变量，记作X，因为在实际测得一个罐头的净重（见例 1.1）或一件产品的质量（见例1.2）之前，试验结果是不确定的。X的分布称为**总体分布**，X的分布函数称为**总体分布函数**，记作$F(x)$。在例 1.2 中，随机变量 X 服从 0-1 分布 $B(1,p)$，因为随机地抽取一件产品作质

量检查，试验结果或者是“$X=0$”（这表示被检查的那件产品是合格品），或者是“$X=1$”（这表示被检查的那件产品是不合格品）。

随机变量X的分布（或分布函数）反映了总体数值指标取值的统计规律性，因此，以后我们常说“总体X的分布函数为$F(x)$”。这意味着我们把总体用与其相应的随机变量X来表示。

当X是离散型随机变量时，相应地有**总体概率函数**；当X是连续型随机变量时，相应地有**总体密度函数**。我们把两者都记作$f(x)$。这样将会给今后的讨论带来叙述上的方便。这里要注意，当X为离散型随机变量时，概率函数$f(x)$的定义域不是$(-\infty,\infty)$，而是仅含有限个或可列个元素的数集，且$f(x)\triangleq P(X=x)$①。在例1.2中，总体$X\sim B(1,p)$，因此X的概率函数

$$f(x)=\begin{cases}1-p, & x=0\\ p, & x=1\end{cases}$$

$$=p^x(1-p)^{1-x}, x=0,1.$$

它就是概率函数

X	0	1
P_r	$1-p$	p

在数理统计中，总体分布永远是未知的。在例1.1中，罐头的净重究竟服从什么分布是不清楚的；即使有足够的理由可以认为罐头的净重服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，但μ与σ^2的值还是未知的。在例1.2中，虽然我们可以确定总体$X\sim B(1,p)$，但p的值有多大是不清楚的。诚然，我们把这一大批产品逐个作检查是可以得到p值的。但是，一则产品很多，逐个检查很不经济；二则在破坏性试验的情形（例如产品质量是灯泡寿命）下这是不现实的。我们希望从客观

① “$\triangleq$”表示“相当于”；这里表示规定$f(x)=P(X=x)$.

存在的总体中按一定原则选取一些个体(即抽样)，通过对这些个体作观察或测试来推断关于总体分布的某些量(例如总体 X 的均值、方差、中位数等)。观测到的这些个体的值便是实际问题中常见的数据。

在数理统计中，称数据为**样本观测值**，记作 $(x_1,\cdots,x_n)$，称 n 为**样本大小**。在作观测前，样本观测值是不确定的，为了体现随机性，记作 $(X_1,\cdots,X_n)$，称为**样本(或子样)**。因而样本 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是一个 n 维随机向量。这个随机向量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 可能取值的全体(即值域)称为**样本空间**。样本空间可以是 n 维欧氏空间，也可以是 n 维欧氏空间的一个子集。样本观测值 $(x_1,\cdots x_n)$ 是样本空间中的一个点。

从理论统计工作者的立场看，样本是一个 n 维随机向量；从应用统计工作者的立场看，样本就是一批已知的数据。这是因为前者站在抽样前的立场上，而后者站在抽样后的立场上。样本的这种二重性虽然是一件平凡的事情，但却很重要。对理论统计工作者而言，为了使统计方法不仅仅适用于某些具体样本观测值而带有一定的普遍性，必须更多地注意到样本是随机向量；对应用统计工作者而言，虽然他们已经习惯于把样本看成数据，但仍要注意"样本是随机向量"这一概率背景，不然的话，样本便成了一堆杂乱无章、毫无规律性可言的数字，无法进行任何统计处理。

在实际问题中可以有各种不同的方法从总体中抽取样本。本书主要涉及一种**简单随机抽样方法**，用这种抽样方法得到的样本称为**简单随机样本**。由于本书仅仅涉及简单随机样本，因此今后提到"样本"均指简单随机样本。

简单随机抽样相当于概率论中的**有放回抽样**。当我们从某个总体中抽取大小为 n 的样本时，每抽取一个个体作观测后立即放回并搅匀，然后再抽取下一个个体。当然，实际情形中往往采用的是**无放回抽样**。但是，当样本大小 n 与总体所含个体的个数 N 之比很小