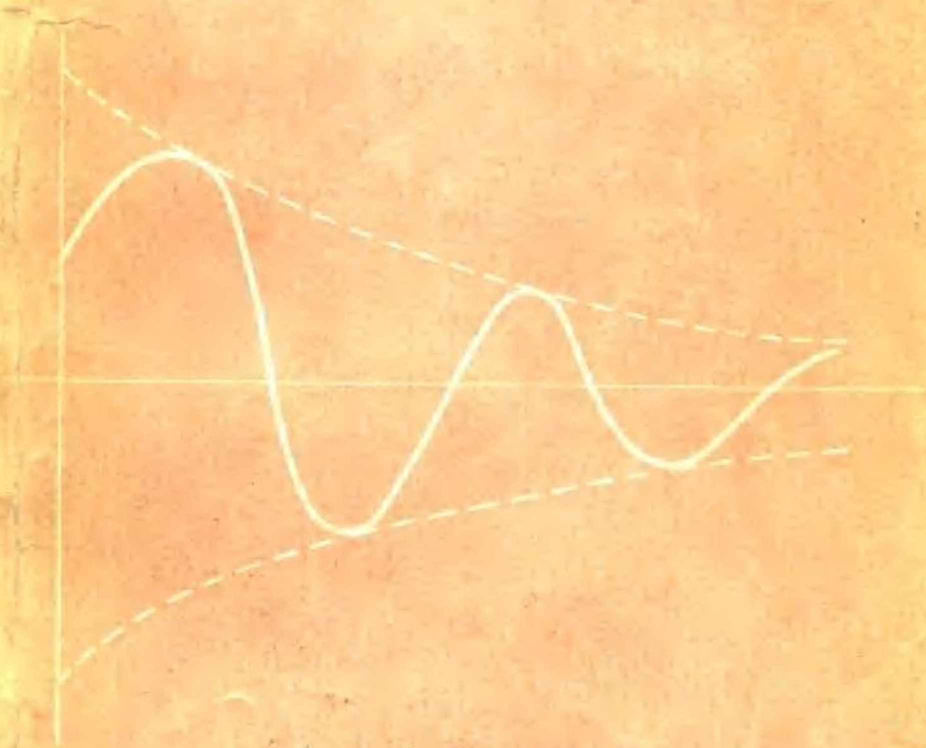
M. Braun 著

张鸿林 译

微分方程及其应用

上 册



人民教育出版社

微分方程及其应用

上　册

M. 布朗 著　张鸿林 译

人民教育出版社

微分方程及其应用

上　　册

M.布朗 著　张鸿林 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 10.25　字数 240,000

1979年12月第1版　1980年9月第1次印刷

印数 00,001—13,000

书号 13012·0418　定价 0.90 元

译　序

本书是 Springer 出版社出版的《应用数学丛书》中的一卷. 作者在第一版(1975 年)的序言中写道: “最近几年, Brown 大学应用数学系为二年级学生开设了一门极受欢迎的微分方程课程. 这门课程之所以取得巨大成功, 主要由于两个原因: 第一, 教材表述的方式对于数学专业和应用数学专业来说是足够严格的, 而对于工程、生物、经济、物理、地质等专业来说又是足够直观和实用的; 第二, 介绍了关于科学工作者怎样运用微分方程来解决各种实际问题的大量历史事例.”本书就是在这门课程的基础上写成的. 第二版(1978 年)在基本理论和应用实例两方面又作了若干补充.

本书是微分方程的基本理论、实际应用和数值计算的有机结合体; 然而, 对于常微分方程基本理论的论述是相当系统和严格的, 同一般常微分方程教程相比, 可以说毫不逊色. 作为初学者, 即使略去应用实例而单独学习理论部分, 也能够掌握常微分方程论的主要内容.

本书区别于其他微分方程教程的突出特点是详细而又生动地介绍了许多应用实例, 涉及的领域很广, 例如物理学、工程学、地质学、生物学、医学、经济学、军事科学等. 这些精采的实例, 对于理、工、农、医、经济等专业的学生和科学工作者如何运用微分方程来描述和解决他们所遇到的各种实际问题, 都是很有启发性的.

实际应用中提出的大量微分方程问题, 往往只有利用数值方法才能求解. 本书对于微分方程数值解法予以了很大的注意, 介绍了各种常用的数值方法、误差分析和程序设计语言 APL; 特别是通过实例使得读者了解使用电子计算机求解实际问题的整个过

程——数学模型的建立、计算方案的选择、计算机程序设计以及对于计算结果的分析.

本书第一、二、三章分别论述一阶微分方程、二阶线性微分方程和微分方程组的基本理论及解法；第四章介绍常微分方程定性理论的一些结果，并通过几个生动的实例说明了定性理论的实际背景；第五章简单地介绍几个典型的偏微分方程及其解法，主要是分离变量法和傅立叶级数的应用.

本书译稿经张理京同志细心校阅；在翻译过程中多得庄峰青、陶士清等同志的帮助. 译者谨在此向他们表示衷心的感谢.

译者

1979年 1月

序　　言

这本教科书是把微分方程理论和它们在各种“现实世界”问题中的精采应用结合起来的唯一教材．首先而又最重要的一点是，本书严格地研究了常微分方程，并且任何学过一年微积分的读者都能够充分理解．但是，除了传统的应用以外，它还包含许多生动的“现实生活”中的问题．这些应用问题完全是自成体系的．首先简单扼要地阐明所要解决的问题，并推导出一个或几个微分方程作为该问题的数学模型．然后求解这些方程，并把得到的结果同实际资料进行比较．本书包括下列应用问题：

1．在 1.3 节中，我们证明了比利时伦布兰特(Rembrandt)学会花了 170,000 美元收买的名画“在埃牟斯的门徒”是一个现代的伪制品．

2．在 1.5 节中，我们推导了各种生物总数增长所遵循的微分方程，并且把由我们的数学模型求得的结果同已知的生物总数值作了比较．

3．在 1.6 节中，我们推导了农场主采用革新成果的速率所遵循的微分方程．令人惊异的是，在象煤炭、钢铁、酿酒和铁路这样一些不同的工业部门中采用技术革新成果的速率遵循同样的微分方程．

4．在 1.7 节中，我们试图确定充满浓缩放射性废物的密闭圆桶是否会因同海底碰撞而发生破裂．在这一节中我们还叙述了用来获得不能用显式求解的微分方程之解的性状的几种技巧．

5．在 2.7 节中，我们推导了血糖调节系统的一种很简单的数学模型，并且得到了诊断糖尿病的相当可靠的判据．

6. 4.5节叙述了微分方程在军备竞赛和实际战争中的两种应用. 在4.5.1节中，我们讨论了L. F. 理查森(Richardson)的“军备竞赛升级理论”，并且把他的数学模型应用于最终导致第一次世界大战的军备竞赛. 这一节还为读者提供了关于稳定性概念的一种具体的感性认识. 在4.5.2节中，我们导出了两个兰切斯特(Lanchester)作战数学模型，其中之一同第二次世界大战中硫黄岛之役的实况十分吻合.

7. 在4.9节中,我们证明了为什么第一次世界大战期间在意大利阜姆港捕到的各种鱼类当中食肉鱼(鲨鱼、鳐鱼、鹞鱼等)占的比例曾戏剧性地增加. 这一节中所阐述的理论在喷洒杀虫剂方面也有精采的应用.

8. 在4.10节中，我们推导了所谓“竞争排斥原理”. 这一原理实质上是说:没有两个种群能以同一方式谋生.

9. 在4.11节中，我们研究了传染病在居民中传播所遵循的微分方程. 我们能够应用这个数学模型来证明著名的“传染病学中的阈值定理”，该定理断言:只有当易受感染的人数超过某一阈值时，才会发生传染病. 我们还把由这个数学模型求得的结果同在孟买实际发生的瘟疫的资料进行了比较.

10. 在4.12节中，我们推导出了淋病传染的数学模型，并且证明了：或者是这种疾病被消灭，或者是患有这种疾病的人数最终趋向于一个固定值①.

这本教科书还具有下述重要而往往是独有的特点:

1. 在1.10节中，我们给出了一阶方程解的存在和唯一性定理的完满的证明. 我们的证明根据的是毕卡(Picard)迭代法，任何学过一年微积分的读者都能够充分理解.

---

① 由于这种疾病在我国已基本消灭, 故中译本删去了这一节. ——译者注

2. 在 1.11 节中，我们指出了怎样用迭代法来求方程的根. 这一节对于增进读者理解存在和唯一性定理的证明也有所裨益.

3. 对于正文中的每一个计算机练习都给出了完整的 Fortran 程序和 APL 程序. 计算机练习出现于下列各节中：1.13 节至 1.17 节，这几节论述微分方程的近似数值解法；1.11 节，这一节论述方程 $x=f(x)$ 和 $g(x)=0$ 的解法；2.8 节，在这一节中我们指出了如何求微分方程的幂级数解，即使不能用显式解出幂级数系数的递推公式.

4. 在附录 C 中对于程序设计语言 APL 进行了完整的介绍. 利用这个附录，我们就能够在两次课堂教学中使学生学会使用 APL.

5. 不客气地说，2.12 节给出了对于狄拉克(Dirac)δ 函数的一种完美而独特的处理. 我们之所以对于这一节感到非常满意，是因为它排除了这个论题的传统解释所固有的一切模糊性.

6. 在 3.1 节至 3.7 节中，我们介绍了研究方程组所需要的一切线性代数的知识. 我们的处理方法的一个优点是：可使读者对于线性无关、生成、维数等概念的十分重要但又非常抽象的性质得到具体的感性认识. 事实上，许多线性代数专业的学生都来旁听我们这一门课，目的是要了解在他们的课程中讲授的究竟是什么.

(下略)

M. 布朗

1976 年 7 月

上册目录

第一章　一阶微分方程

1.1　引言

本书研究微分方程及其应用. 微分方程是时间的函数及其导数之间的关系式. 方程

$$\frac{dy}{dt}=3y^2\sin(t+y) \tag{i}$$

和

$$\frac{d^3y}{dt^3}=e^{-y}+t+\frac{d^2y}{dt^2} \tag{ii}$$

就是微分方程的两个实例. 微分方程的阶, 指的是方程中出现的函数 $y(t)$ 的最高阶导数的阶. 因此, (i)是一阶微分方程, (ii)是三阶微分方程. 微分方程的解, 指的是一个连续函数 $y(t)$, 这个函数同其导数一起满足该微分方程关系式. 例如, 函数

$$y(t)=2\sin t-\frac{1}{3}\cos 2t$$

是二阶微分方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\cos 2t$$

的解, 因为

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(2\sin t-\frac{1}{3}\cos 2t\right)+\left(2\sin t-\frac{1}{3}\cos 2t\right)$$
$$=\left(-2\sin t+\frac{4}{3}\cos 2t\right)+2\sin t-\frac{1}{3}\cos 2t=\cos 2t.$$

在自然科学和人文科学的许多领域中, 都常常会出现微分方程. 在本书中, 我们将认真讨论微分方程在各种各样的精采的问

题(例如艺术伪制品的发觉、糖尿病的诊断、第一次世界大战期间地中海里出现的鲨鱼比率的增加等问题)中的应用. 我们的目的是要说明研究工作者是怎样运用微分方程来解决(或试图解决)各种实际问题的. 我们在讨论微分方程取得巨大成功的一些事实的同时,还将指出它们的局限性,并举例说明它们的某些失败.

1.2 一阶线性微分方程

我们首先来研究一阶微分方程,并且假设所考虑的方程具有(或者可以化成)下列形式:

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y). \tag{1}$$

摆在我们面前的问题是:给定 $f(t,y)$,试求满足微分方程(1)的一切函数 $y(t)$. 我们按下述方式着手解决这个问题. 数学上的一个基本原则是:以某种方式把新的问题化成我们已经解决过的问题来处理. 实际做的时候,这通常需要一步步简化问题,直到它类似于我们已经解决的一个问题时为止. 因为我们就要正式着手解微分方程,所以我们应当清理并列出我们能够解的一切微分方程. 假如我们具备的数学基础只是初等微积分的话,那么十分遗憾的是:目前我们所能解的一阶微分方程只是

$$\frac{dy}{dt}=g(t), \tag{2}$$

其中 g 是任何对于时间的可积函数. 为了解方程(2),只需把方程的两端对 t 积分,由此得到

$$y(t)=\int g(t)dt+c,$$

其中 c 是任意积分常数,$\int g(t)dt$ 指的是 g 的反导数,即导数为 g 的函数. 于是,为了解任何其他微分方程,都必须设法把它化成形

式(2). 在1.9节中我们将要看到，在大多数情况下这是做不到的. 因此，如果不借助于计算机，我们就不能解大多数的微分方程. 所以,为了找出我们能够解的那些微分方程,显然应当从一些最简单的方程着手,而不是从象

$$\frac{dy}{dt}=e^{\sin(t-37\sqrt{|y|})}$$

这样的方程着手(顺便指出，这个方程是不能精确求解的). 经验告诉我们,"最简单的"方程是对函数 y 来说为线性的那些方程.

定义 一般的一阶线性微分方程是

$$\frac{dy}{dt}+a(t)y=b(t). \tag{3}$$

除非另加说明,一般假设函数 $a(t)$和$b(t)$是时间的连续函数. 我们特别指出这个方程,并且称之为线性的,是因为方程中只出现函数 y 本身,也就是说,不出现像 e^{-y}, y^3 或 $\sin y$ 这样一些项. 例如,

$$\frac{dy}{dt}=y^2+\sin t$$

和

$$\frac{dy}{dt}=\cos y+t$$

是两个非线性方程,因为其中分别出现 y^2 和$\cos y$ 等项.

怎样解方程(3)，现在还不能一下子就看出来. 因此，我们设 $b(t)=0$,把它再进一步简化.

定义 方程

$$\frac{dy}{dt}+a(t)y=0 \tag{4}$$

称为齐次一阶线性微分方程;而当 $b(t)$不恒等于零时,方程(3)称为非齐次一阶线性微分方程.

幸好，齐次方程(4)是很容易求解的. 首先，把方程的两端除

以 y，并且把它改写成下列形式

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y}=-a(t).$$

其次，注意到

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y}\equiv\frac{d}{dt}\ln|y(t)|,$$

其中 $\ln|y(t)|$ 表示 $|y(t)|$ 的自然对数. 因此，方程(4)能够写成下列形式:

$$\frac{d}{dt}\ln|y(t)|=-a(t). \tag{5}$$

但是，这个方程“实质上”就是方程(2)，因为我们能够把方程(5)的两端积分，得到

$$\ln|y(t)|=-\int a(t)dt+c_1,$$

其中 c_1 是任意积分常数. 取两端的指数函数，得到

$$|y(t)|=\exp\left(-\int a(t)dt+c_1\right)=c\exp\left(-\int a(t)dt\right)$$

或者

$$\left|y(t)\exp\left(\int a(t)dt\right)\right|=c. \tag{6}$$

现在，$y(t)\exp\left(\int a(t)dt\right)$ 是时间的连续函数，而方程(6)表示它的绝对值是常数. 但是，如果连续函数 $g(t)$ 的绝对值是常数，那么 $g(t)$ 本身也必须是常数. 为了证明这一点，我们注意到：如果 g 不是常数，则存在两个不同的时间 t_1 和 t_2，使得 $g(t_1)=c$，$g(t_2)=-c$. 根据微积分里的介值定理，g 必须取遍 $-c$ 和 $+c$ 之间的一切值；如果 $|g(t)|=c$ 的话，这是不可能的. 因此，我们得到方程

$$y(t)\exp\left(\int a(t)dt\right)=c.$$

或者

$$y(t)=c\exp\left(-\int a(t)dt\right). \tag{7}$$

方程(7)称为齐次方程(4)的**通解**,因为方程(4)的每一个解都必须具有这种形式. 我们注意到: 在方程(7)中出现任意常数 c. 这不应感到太奇怪. 事实上, 我们总可以料到在任何一阶微分方程的通解中会出现任意常数. 就是说,如果我们已知 $\frac{dy}{dt}$, 而想要求出 $y(t)$,那么我们就必须进行积分, 这就必定会产生任意常数. 还要注意到:方程(4)具有无穷多个解;对于每一个 c 值,我们都会得到一个不同的解.

例 1 试求方程

$$\frac{dy}{dt}+2ty=0$$

的通解.

解 这里 $a(t)=2t$, 于是 $y(t)=c\exp\left(-\int 2t\,dt\right)=ce^{-t^2}$.

例 2 试确定方程

$$\frac{dy}{dt}+ay=0 \quad (a\text{ 为常数})$$

的一切解当 $t\to\infty$ 时的性状.

解 通解是

$$y(t)=c\exp\left(-\int a\,dt\right)=ce^{-at}.$$

因此,除了 $y=0$ 的情况以外,如果 $a<0$,则当 $t\to\infty$ 时, 一切解都趋向于无穷大,而如果 $a>0$,则一切解都趋向于零.

在应用中,我们所感兴趣的常常不是方程(4)的一切解.相反,

我们要寻找在某一初始时间 t_0 具有值 y_0 的特解 $y(t)$. 因此，我们要确定函数 $y(t)$，使得

$$\frac{dy}{dt}+a(t)y=0,\quad y(t_0)=y_0. \tag{8}$$

方程(8)称为初值问题，这显然是因为：我们要从微分方程的全体解中找出这样的一个解，它在开始时(在时间 t_0)具有值 y_0. 为了求出这个解，我们把方程(5)的两端在 t_0 和 t 之间积分. 于是

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{ds}\ln|y(s)|ds=-\int_{t_0}^{t}a(s)ds,$$

所以

$$\ln|y(t)|-\ln|y(t_0)|=\ln\left|\frac{y(t)}{y(t_0)}\right|=-\int_{t_0}^{t}a(s)ds.$$

取这个方程两端的指数函数，我们得到

$$\left|\frac{y(t)}{y(t_0)}\right|=\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)$$

或者

$$\left|\frac{y(t)}{y(t_0)}\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)\right|=1.$$

绝对值符号内的函数是时间的连续函数. 因此，根据前面给出的论证，它或者恒等于 $+1$，或者恒等于 -1. 为了确定是哪一种情况，我们计算它在点 t_0 的值；因为

$$\frac{y(t_0)}{y(t_0)}\exp\left(\int_{t_0}^{t_0}a(s)ds\right)=1,$$

所以我们看出

$$\frac{y(t)}{y(t_0)}\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)=1.$$

因此

$$y(t)=y(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)=y_0\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right).$$

例 3 试求初值问题

$$\frac{dy}{dt}+(\sin t)y=0,\quad y(0)=\frac{3}{2}$$

的解.

解 这里 $a(t)=\sin t$, 于是

$$y(t)=\frac{3}{2}\exp\left(-\int_0^t \sin s ds\right)=\frac{3}{2}e^{(\cos t)-1}.$$

例 4 试求初值问题

$$\frac{dy}{dt}+e^{t^2}y=0,\quad y(1)=2$$

的解.

解 这里 $a(t)=e^{t^2}$, 于是

$$y(t)=2\exp\left(-\int_1^t e^{s^2}ds\right).$$

现在,初看起来,这个问题似乎引起了重大困难,因为我们不能直接积分函数 e^{s^2}. 然而,这个解和例 3 的解是同样有效、同样有用的. 其原因有两方面:第一,存在着借助于计算机求上面的积分值并可达到任何精确度的非常简单的数值方法;第二,虽然例 3 的解用显式给出了,但是如果不借助于三角函数表和某些计算工具(例如计算尺、电子计算器或电子数字计算机),我们仍然不能算出这个解在任何时间 t 的值.

现在,我们再来考虑非齐次方程

$$\frac{dy}{dt}+a(t)y=b(t).$$

由上面对于齐次方程的分析即可得知,解非齐次方程的方法是:把它表示成下列形式:

$$\frac{d}{dt}(\text{“某式”})=b(t),$$

然后把两端积分,解出“某式”. 可是,表达式 $\frac{dy}{dt}+a(t)y$ 并不是作