# 几 何 证 题 法

（新一版）

严济慈 编著



高等教育出版社

# 几何证题法

（新一版）

严济慈 编著

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 6.5 字数 150,000
1982 年 10 月新 1 版 1933 年 8 月第 1 次印刷
印数 00,001—31,000
书号 13010·0824 定价 1.00 元

# 出 版 前 言

本书初版于 1928 年 1 月，以文言文由商务印书馆出版，解放后又重印过多次．本版是应读者的要求，编者把它改写成语体文由人民教育出版社出版．

全书内容共分十章：几何上常用名词的解释，证题步骤，证法通论，轨迹，交轨法，助图法，变位法，相似形法，位似图，反演图．详尽地叙述了各种证题方法，并有一定数量的习题供读者练习和研究．

本书可供高中学生，大专学生及有兴趣的读者阅读，也可供中学及大学数学教师参考。

# 新一版(语体文版)序

平面几何是中学数学课程中的一个重要组成部分．初学的青年对于几何定理证明的严密，推理之合乎逻辑，往往衷心喜悦，爱不释卷；而要自己解答问题时，则又每觉不知从何下手，深感没有掌握方法之苦．

为了帮助青年学生克服上述困难，我在南京高等师范读书期间，先后任教南高附中补习班和东南大学一九二三年暑期学校，曾介绍了各种证明几何问题和定理的方法，收集了一些典型例题和习题，编写成一本《几何证题法》．后由商务印书馆于一九二八年出版，作为算学丛书的一种．

该书出版以来，作为一种课外读物，颇受读者欢迎．对于补充教材的不足，开拓知识领域，以及培养青少年钻研数学的兴趣，都起了一定的作用．

解放以后，商务印书馆还曾将该书重印过多次．即使是在最近几年内，仍有不少青年学生向北京图书馆借阅该书，作为自修读物．人民日报记者访问在北京图书馆刻苦攻读的青年朋友们后所发表的《天地最有情，少年莫浪投》(见人民日报一九七九年三月廿一日第四版)的文章中提到对一位热爱数学青年的访问，说："严济慈教授编著的《几何证题法》是吸引他酷爱数学、钻研数学最有影响的一本书．""这本书是用文言文叙述的，扉页上留下不少读者写的'难懂'、'不好理解'的批语．"不过他"没有在困难面前望而生畏，止步不前；而是从严要求，勇于探索，一字字、一句句顽强地读下去，并且把书中的例题、习题全部研究一遍，其中一道难题他是

用了一个月的时间解出来的.”

像这样用文言写成的书,确是给读者增添了不少额外负担.广大读者和中学教师希望把《几何证题法》一书修订,用语体文重新改写后出版.

近由中国科学技术大学研究生院葛荣寿副教授帮助,将《几何证题法》用语体文改写,以供青年学生学习参考.本语体文版除了一些名词采用目前更为通用的以外,还重新描绘了全部插图,而编写的体裁和内容,一概依旧,并无增删.因此,希望读者阅读本书时,要把它主要看成一本旧著.本书在内容编排和叙述上,不免有谬误之处,谨请批评指正.

严济慈

一九八二年三月

# 目 录

# 第一章　几何学上常用名词的解释

**§1. 什么是数学?**

数学是演绎科学，不依赖观察，不需要实验；通常借助于定义和证明，用可靠的方法，按照定律推演，蔚然成为一门学科. 由甲定理推得乙定理，再由乙定理推得丙定理，以致丁定理或戊定理，如同抽丝那样. 在数学的定义与证明中，常常包含公理. 公理的来源，或来自先前知识，或由于经验，或由于约定；总之都与日常所见，极其相近；由此所成的数学，就可广泛应用于实际. 因此，数学不仅是逻辑上的推理而已.

**§2. 定义**　一个事物的所谓定义，就是用其它已知事物，说明它们之间的相互关系，来表明该事物的特性，以区别于其它事物，并且为该事物取个名词. 名词要词意简单而含义明显. 不过，定义的成立要有两个条件：一个是不自相矛盾，只有不自相矛盾，定义所规定的事物才能存在；另一个是要充分，只有充分，定义所规定的事物才是唯一的. 存在而唯一，方有研究的价值.

既然一个事物的定义，必须依赖其它预先知道的事物；那么最初一个事物的定义，又将如何作出呢？由此可知，在数学中所用名词，并非每一个都可以作出定义的；必须先认定若干事物的存在，而且作出各种假定，表明它们之间的关系，以为推理的基础，这些就是**原理**.

**§3. 证明**　一个命题的证明，就是从已知的命题，推得这个命题的过程. 由乙命题证得甲命题，而由丙命题又可推出乙命题，穷根思源，必有尽处，此尽处就是假定的命题，也就是我们事先所

认为正确的命题．这种假定而不可证明的命题，称为**自理**；自理就是不必讨论理由而自然明白的命题．

**§4. 公理** 自理和原理统称为公理．

自理为各种数学所公有，表示数量的特性，例如：

全量大于其部分；

等于同量的各个量互等，……，等等；

也就是所谓普遍的公理．

原理则为各门数学所特具，分析有分析的原理，几何有几何的原理，力学有力学的原理．分析的原理与力学的原理姑且不论．就几何而言，则有结合原理，相等原理，和平行原理，…….

**§5. 几何学** 几何学是研究物体的形状、大小、位置的科学．

**§6. 几何的元素** 凡在宇宙间占有位置的，都是物体．不管物体的性质，只谈其形状、大小、位置时，就叫做实体．实体的边界为面，面的边界则为线，线的边界乃是点．所以点、线、面、体各种概念，都由观察实物而来．点、直线、平面都有物体作为它们的影子，例如星可看成为点的影子，光线是直线的影子，而静止的水面则是平面的影子．至于说点无大小，线无粗细，面无厚薄，这些是不可从实物中求得的；而是抽象成为几何学家理想中的图形，便于推理罢了．因此，点、线、面实在是几何学的无定义元素，我们可以把它们看成为独立存在的物体．面就是面，不管面究竟是由多少个点和线所组成；线就是线，不管线究竟是由多少个点所连成，或由多少个面相交而组成；点就是点，不管是否由线与面相交而成．

**§7. 结合原理** 几何学家既然假定点、线、面是无定义的元素，那就必须要有一种原理，表明它们之间的相互关系，此种原理称为结合原理，例如：

1° 两点定一直线，直线长无限．

2° 一直线上有两点在一平面内，则该直线全在此平面内；平

面的任何方向，都可无限延伸.

**§8. 点** 点有位置而不计其大小.

**§9. 直线的性质**

1° 在一直线上可取无穷多个点；过任一点可作无穷多条直线.

2° 把一直线放在另一直线上面，那么这直线上的任何一点，可与另一直线上的任何一点重合，不过只以一点为限.

3° 相交于一点的两直线，假如不是全部重合的话，那就不能再有第二个交点.

**§10. 平面的性质**

1° 在一平面上，可以作出无穷多条直线；过一直线，可以作出无穷多个平面.

2° 不在同一直线上的三个点决定一个平面.

3° 把一平面放在另一平面上，那么这平面中的任何一条直线，都可与另一平面中的任何直线重合，但只以一条直线为限.

4° 与平面相交于一点的直线，假如直线不是全部在该平面上的话，那就不能再有第二个交点.

**§11. 几何形** 体，面，线，点和它们的集合，构成几何形. 在平面上的几何形，叫作平面形.

**§12. 全等原理** 在空间的几何形，经历任何移动，不变其形状与大小. 因此，凡是可以使得它们全合(重叠而相合)的几何形，除了它们所在位置以外，无不相同，称为全等.

**§13. 平行原理** 通过线外一点，能够作出而且只能作出该直线的一条平行线，称为平行原理，也就是欧几里得原理. 它是普通几何学(欧几里得几何学)的基础.

按照上面三条原理，推演而成普通几何学(欧几里得几何学). 原理稍改，所成几何学，也就不同. 例如非欧几里得几何学的定理

多与欧几里得几何学的定理不相一致，但各有其说，各成其理．它们各自不相矛盾而合逻辑，蔚然成为一门学科，一如欧几里得几何学那样．欧几里得几何学与非欧几里得几何学，没有那个更为正确可说，而只有方便与不方便的差别．此种纯粹几何学与实用无关，因为点、线、面既是假定的名词，而各个原理又只是为了支配假定的名词而设立的，完全脱离实验范畴，也不因实验而动摇其基础；所以，虽然难以实用，但是无损于它们的精华．实际上，普通几何学（欧几里得几何学）应用甚多，以普通几何所得结果计算，与事实相差不远；因为一般的固体与欧几里得几何学中的体大致相同．研究几何学是一回事，研究几何学是否合乎实用则又是另一回事．只从假定原理推演，得到纯粹几何定理，必须附加物理原则，才能适合应用；例如几何注重量测长度，而量测长度必受物理原则支配，从而才能合乎实用．

§14. **定理** 凡是得到证明其为正确的命题，称为定理．从定理直接推得的，叫作推论．

§15. **条件的命题** 数学真理大多数是有条件的，而不是绝对的，所以定理往往有两部分：**前提**和**结论**．

**例**．比如某物含有性质 $A$（前提），则也必含有性质 $B$（结论）；即为 $A$ 牵涉 $B$．

证明就是依据逻辑，用定义、公理或已知的定理，把结论表示成为前提应有的结果．

§16. **定理之间的关系** 比如"有 $A$ 则有 $B$"是一条定理，"有 $A$"是前提，"有 $B$"是结论．若将前提与结论互换，则得定理如下：

有 $B$ 则有 $A$，

是为**逆定理**．

若将定理的前提与结论，各改为否定语，则有

无 $A$ 则无 $B$，

是为**否定理**.

若将定理的前提与结论互换以后，再各改为否定语，则有

无$B$则无$A$，

是为**逆否定理**.

所以每一定理通常可有三条定理和它并立，列举如下：

| | | |
|---|---|---|
| 定理 | 有$A$则有$B$； | (1) |
| 逆定理 | 有$B$则有$A$； | (2) |
| 否定理 | 无$A$则无$B$； | (3) |
| 逆否定理 | 无$B$则无$A$. | (4) |

从上表可知(2)和(3)互为逆否定理，(2)和(4)互为否定理，(3)和(4)互为逆定理．四种定理不必同时都真，也不必同时都假，可是(1)和(4)，(2)和(3)则常同时为真或同时为假，看下一规律就可明白.

**§17. 逆否定理律**　两定理若互为逆否定理，则有一为真，二者都真；有一为假，二者都假．证明如下：

1°　设有一为真，即有$A$则有$B$，则无$B$就不能有$A$；因为如果有$A$，将按«有$A$则有$B$»的定理，必将有$B$．于是同时无$B$而又有$B$，是为荒谬，所以无$B$就无$A$．由此可见，凡是一定理为真，则其逆否定理必真.

2°　设有一为假，则另一个也必为假；因为如果另一个是真的话，那么按照1°的证明，二者将都是真，而这与假设不符.

**应用**　如果两定理互为逆否定理，任意证明其中一个即可.

互为逆否定理的两个定理，实一而二，二而一，是等价的.

**§18. 选言命题**　命题的前提可有各种变化，因而得到不同的结论，成为一组定理．例如：

$A$大于$B$，则$C$大于$D$；

$A$等于$B$，则$C$等于$D$；

$$A\text{小于}B，\text{则}C\text{小于}D；$$

即可写成：

$$A\gtrless B，\quad \text{则}\ C\gtrless D；$$

其中

$$\not> \text{ 与 } \leqslant \text{ 等价，}$$

$$\neq \text{ 与 } \gtrless \text{ 等价，}$$

$$\not< \text{ 与 } \geqslant \text{ 等价.}$$

即任一情形的否定语，都可以代表其余情形，而与它们等价．此种命题，称为选言命题，其定理实已包含否定理于其中．因为定理

$$A>B，\text{ 则 } C>D$$

的否定理为

$$A\leqslant B，\text{ 则 } C\leqslant D，$$

因而如果定理为真，否定理也真．如果否定理为真，那么否定理的逆否定理

$$C\gtrless D，\text{ 则 } A\gtrless B$$

也是真，这就是原定理的逆定理．所以选言命题是真，它的逆定理也必定是真．

如同圆或等圆的两圆心角如果相等，则它们所对的弧也相等；如果不等，则所对的弧也不相等，大角对大弧，小角对小弧．这是一个选言命题，从而它的逆定理：

同圆或等圆的两圆弧如果相等则它们所对的圆心角也相等；如果不等，则所对的圆心角也不相等，大弧对大角，小弧对小角，也正确．

等价原理，应用极多，化繁就简，在于变换．所谓变换也就是等价互换，读者应当随时留意．

# 第二章　证题的步骤

**§19. 几何问题的分类**　几何学研究的问题有两类：一类是按照某种条件画一图，然后求证此图符合某种情形，这就是定理；另一类则为求作一图符合某种条件，这就是问题．对于定理，则有前提，有结论，应当依照前提推导得到结论，这就是所谓证明．至于问题，或有前提无结论，或有结论无前提，由此应该求出其所缺的前提或结论，这就是所谓求解．接着是画图和证明，这样，问题就完全解决了．

## I. 定理的求证

**§20. 前提与结论的分辨**　定理既由前提与结论所组成，那么哪些是前提，哪些是结论，首先应当辨别清楚；就是什么是已知，什么要证明，由已知推得其所要证明的，这就是几何学家的事情．例如：

在角的平分线上各点，与其两边的距离相等．这是一个定理，它的前提和结论各为(图 2-1)：

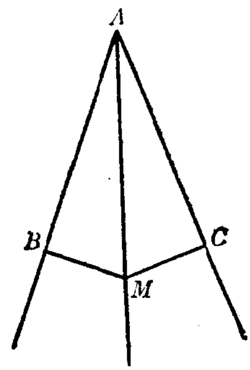


图　2-1

前提　若 $M$ 在 $\angle BAC$ 的平分线上．

结论　那么 $M$ 与 $AB, AC$ 两边的距离相等．

**§21. 术语与式子的改换**　我们对于定理中所用的名词，应

当明瞭它们的意义．如同在上述例子中，我们可有下列问答：

问：什么是$\angle BAC$的平分线$MA$？

答：$MA$分$\angle BAC$为二等分，即$\angle BAM=\angle MAC$．

问：什么是$M$点与$AB$线之间的距离？

答：$M$点与$AB$线之间的距离，即自$M$所作$AB$的垂直线的长度．

于是我们可把前提和结论用式子表述如下：

$$\text{前提}\quad \begin{cases} \angle BAM=\angle MAC \\ MB\perp AB \\ MC\perp AC \end{cases}$$

$$\text{结论}\quad MB=MC$$

式子是数学家运算所用的符号．

用定义代替名词，作为运算的基础，确实是证明定理和求解问题的重要步骤．可是一个名词通常可有各种不同的表示方式，所以必须因地制宜，选择对于此处最为方便的定义式子．例如$MA$是$\angle BAC$的平分线可以用

$$\angle BAM=\frac{1}{2}\angle BAC$$

表示，但在此处不如表示成为

$$\angle BAM=\angle MAC$$

更为合适．

又如两平行线的定义，可看成为这两直线与一直线相交，它们的内错角相等；或它们的同位角相等；或它们的同侧内角互为补角；以及或者它们的同侧外角互为补角．在这四种有关两平行线的定义中，各有其方便的地方，要按照情形善于采用合适的定义表示式子．

再如设$A$是圆周上一点，把该点与圆心$O$连结成线，而有