建筑工程基础数学

（第二版）

孙福兴 编著

中国建筑工业出版社

在建筑工程的实践中，存在着大量的“数”和“形”的问题。例如，在房屋设计中，要进行各种技术经济指标以及荷载、内力、构件截面等数量的分析与计算，要进行建筑、结构、水暖电卫等图形的分析与绘制；在组织施工中，要进行建筑资源（如材料量、劳动力…）等数量的分析与计算，要进行建筑资源使用的时间安排和空间布置等图形的分析与绘制。尤其是在我国实现建筑工业现代化的过程中，会遇到更多的“数”和“形”的问题。因此，学习数学，熟悉“数”和“形”的知识，掌握数学这个工具，是实践的需要，是实现四个现代化的需要。

学习数学，需要有书本。目前社会上的数学读物不少，但大都是分科立册，不仅本本较多，篇幅较大，而且未能联系建筑工程的实际，一般不太适合从事建筑工程的同志的自学需要。为了适应这些同志学习（特别是自学）数学的需要，编写了这本《建筑工程基础数学》。本书在内容选择上，根据建筑工程（特别是建筑施工）的需要，系统而有重点地介绍了代数、几何和微积分的基本知识，努力把学习数学和运用数学分析解决实际问题结合起来。在编写安排上，以实践中最常见的函数关系为主要线索，把代数、平面几何、平面三角、平面解析几何和一元函数微积分等内容统一进行了组织，由浅入深地、形数结合地讨论了常见函数及其有关的问题；以数学的基本概念和基本运算为重点，通过例题，分析了许多建筑施工中常见的问题，如建筑构件的形体计算，钢筋料表的编算，常见曲线的放样，简单的静力分析等等。为了便于自学，概念的叙述比较详细，不仅从实际出发引入概念，而且注意与前、后、左、右的联系和不同概念间的比较；式子的推演、问题的求解，力求思路简明，层次清楚，并注意归纳小结；例子也多，除基本题外，还有不少综合题（其中基本题和综合题都选了很多的高考题）和大量的联系实际的应用题。本书是一本联系建筑工程实际的基础数学读物，向读者介绍了一些常见的基本的数学概念和数学方法，既是解决简单的实际问题的基础，又是进一步学习科学技术的基础。

本书在编写过程中，曾得到西安冶金建筑学院不少同志的支持和帮助，特别是数学教研室主任刘则刚副教授、数学教研室潘鼎坤副教授、梅己诚先生三位老师，他们分别看了本书各章的初稿，并提出了许多宝贵意见，特此表示感谢。

本书是在业余时间编写的。由于编者水平很低，加上调查研究不够、时间零碎而短少，所以书中的缺点、错误一定不少，欢迎读者批评指正。

编　者

1980年于西安冶金建筑学院

（京）新登字035号

本书结合建筑工程的实际，系统且有重点地叙述了初等数学、高等数学、工程数学方面的基础知识。全书的主要章次有：基本的代数运算，三角形及其计算，一次、二次函数与幂函数，圆和圆的方程，三角、反三角、指数、对数函数与初等函数，导数与微分，不定积分与定积分，矩阵代数与线性方程组，概率论。全书以常用的数学方法及其应用为重点，介绍了基本的数学方法：代数（包括矩阵代数）方法，几何方法，微积分（包括微分方程）方法和概率论方法；分析了大量的建筑工程问题：建筑材料的代换，建筑构件的形体与重心计算，常用曲线的放样，钢筋料表的编制，简单结构的静力计算与矩阵分析，建筑量的优化计算，建筑构件的振动分析，梁的内力、变形、可靠度计算，建筑产品或用品的概率分析，建设方案或生产计划的决策，施工网络的概率分析，$\bar{\xi}-R$质量控制图等。本书起点低，选材精，叙述详细，实例很多。

本书可供从事土建工程的各个层次的读者自学，也可作土建工程大专班教学参考书。

* * *

责任编辑：林婉华

建筑工程基础数学
（第二版）
孙福兴　编著
*
中国建筑工业出版社出版、发行（北京西郊百万庄）
新华书店经销
中国建筑工业出版社印刷厂印刷（北京阜外南礼士路）
*
开本：787×1092毫米 1/16 印张：52 字数：1264千字
1992年1月第二版　1992年1月第二次印刷
印数：34,101—36,200册　定价：31.50元
ISBN7—112—01321—6/TU·965
（6363）

第二版前言

在改革的年代里，事物在变化，形势在发展。为了适应这种变化、发展，现对本书第一版进行了修改和补充，以满足广大读者的需要。

这次修订，主要考虑了如下几点：（1）压缩了初等数学部分的内容，把原来的八章改写为五章。在简要地叙述了一些基本的代数方法和几何方法之后，着重举例说明了这些方法在建筑工程方面的应用。（2）把作为微积分方法的重要应用的“微分方程”一节，单独立为一章。比较系统地介绍了几类常见微分方程的解法以及它们在建筑工程方面的应用。（3）鉴于电子计算机日益普及，增写了“矩阵代数与线性方程组”一章，它是计算机数学的主要基础之一。（4）鉴于统计分析在生产、管理等方面有越来越大的影响，增写“概率论”一章，它是进行统计分析的理论基础。此外，在安排处理上，突出基本概念、基本运算与实际应用；在叙述表达上，强调简明、通俗，便于自学；在例题、习题配置上，力求基本、典型、结合建筑工程实际，其中选了不少大学或硕士研究生入学试题（题前冠以“*”或“△”号）；在联系实际上，分析了大量的建筑工程问题：建筑材料的代换，建筑构件的形体与重心计算，常用曲线的放样，钢筋料表的编制，简单结构的静力计算与矩阵分析，建筑量的优化计算，建筑构件的振动分析，梁的内力、变形、可靠度计算，建筑产品或用品的概率分析，建设方案或生产计划的决策，施工网络的概率分析，$\bar{\xi}-R$质量控制图等。希望本书成为从事建筑工程的不同层次的读者学习现代科学技术和解决一些实际问题的基础数学读物。

限于水平，不妥以至错误之处，可能很多，敬请读者批评指正。

第 一 版 前 言

在建筑工程的施工现场，可以看到各种各样的建筑构件（或结构）。例如，基础、柱、墙、梁、板、屋架、门窗、楼梯、烟囱、水塔等等。观察和比较这些建筑构件（或结构）就容易发现：柱或梁的截面、门窗的形状大都是长方形的；很多屋架是三角形的；楼梯和许多基础的截面是阶梯形的；烟囱和水塔的截面是圆形的。舍去这些构件（或结构）的实际意义，仅从形状方面加以抽象，就可概括出反映这些构件（或结构）的一些平面图形——长方形、三角形、圆等“形”的概念。

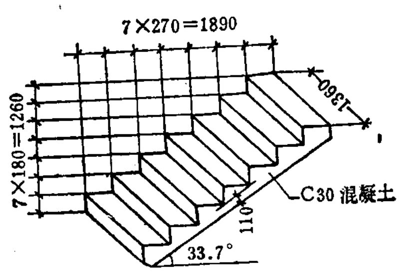

图 0-1　预制的钢筋混凝土板式楼梯段

对于这些建筑构件（或结构），如用某种标准（计量单位）去度量一下，就可得到反映这些构件（或结构）的一些量的大小。例如，对于一个预制的钢筋混凝土板式楼梯段（如图0-1所示），用有关工具就可测得以下数据：

楼梯宽	1360mm[1]
楼梯段板厚	110mm
踏步宽	270mm
踏步高	180mm
踏步数	7 个
楼梯段体积	$0.571m^3$
楼梯段重量	1430kg
楼梯段倾斜角	33.7度
楼梯段混凝土抗压强度	$20N/mm^2$

这些数量反映了预制钢筋混凝土板式楼梯段的一些特征。而这里的1360、110、270、180、7、0.571、1430、33.7、20等“数”，反映了楼梯段的长度、体积、重量、角度、强度等“量”的大小。

上面的例子说明了一个重要的事实：“形”和“数”的概念“是从现实物质世界中得来的”“而不是在头脑里由纯碎的思维产生出来的”。人们正是在长期的实践中，才逐渐形成“形”和“数”的概念，才逐渐认识“形”和“数”的丰富内容。数学正是研究现实世界的“形”和“数”的一门科学，正如恩格斯所指出的那样：“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。”[2]

[1] 本书图上的尺寸，凡是未注明单位的，一律指毫米。

[2] 引自恩格斯《反杜林论》，人民出版社1970年版。

目　录

第一章　基本的代数运算

数学，是从研究具体的数开始的。但具体的数或由具体的数组成的式子，只能表达实践中具体的个别的数量关系，适应不了实践的需要。例如，静定梁支座反力的一般计算，建筑材料的一般代换，混凝土、砂浆的配料误差的一般分析，风力作用下大模板稳定的一般验算等，就需要用字母代替数，通过解含有字母的等式或不等式来解决。用字母代替数，就是代数。它把对“数”的研究发展成为对含有字母的“式”的研究，从而在较为广泛的范围内讨论实践中的数量关系。

本章简要叙述含有字母的运算（即代数运算）的一些概念和方法。虽然很简单，但却很基本。既可解决一些简单的实际问题，又是进行分析、推理的基础。

第一节　代　数　式

在含有字母的式子中，有一类由数字及字母通过加、减、乘、除、乘方、开方运算符号连接起来的式子，最为简单、最为基本。它就是代数式。我们就从这里开始讨论。为叙述方便，先谈一点实数。

一、实　　数

数是随着实践的需要而逐渐形成和发展的。早在人类社会发展的最初阶段，由于计数和测量的需要，就产生了正整数（即自然数）。随着人类实践活动的扩大和发展，因为要分割物品形成了正分数（正整数和正分数统称为正有理数）；为了刻划自然界存在着的相反意义的量，引入了负有理数（负整数和负分数）。零，既不是正数也不是负数，它是“作为一切正数和负数之间的界线”❶，且有确切的涵义（如摄氏零度，就是在通常条件下水结成冰的一个确切的温度）。正有理数、零、负有理数统称为有理数。用十进制记数法，有理数可表示为有限小数（如$\frac{34}{8}=4.25$），或表示为无限循环小数$\left(\text{如}\frac{20}{6}=3.333\cdots\right)$。以后，人们在实践中又发现，对连续量进行度量（如用正方形一边长作单位去度量正方形对角线长）时，存在着不能用有理数来表示的量，从而产生了无理数。用十进制记数法，无理数可表示为无限不循环小数（如$\sqrt{2}=1.414213562\cdots$）。有理数和无理数统称为**实数**。实数系统如下所示。

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

❶ 引自恩格斯《自然辩证法》，人民出版社1971年版。

规定了原点、正方向及单位长度的直线称为**数轴**。任意一个实数，可用数轴上唯一的点来表示；反之，数轴上的任意一点，都表示唯一的实数。实数与数轴上的点有一一对应关系。

数轴上在原点两旁、离开原点的长度相等的两个点所表示的两个数，互称为**相反数**。实数a与$-a(a\neq 0)$是互为相反数。

在数轴上表示一个数的点离开原点的长度称为这个数的**绝对值**。一个正实数的绝对值是它本身，一个负实数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零。任何一个实数都可用该数的绝对值及其前面加一个正、负号来表示。

本书，基本上是在实数范围内讨论的。如无特别说明，凡遇到的数均指实数。

二、代数式概念

我们知道，具体的数或由具体的数组成的式子，只能表示实践中个别的数量关系。为了在较广泛的范围内讨论实践中的数量关系，就需要引入字母，用字母代替数。例如，在数的加法运算中，有$5+3=3+5$、$(-2)+4=4+(-2)$等式子，它表示“两数相加，交换其位置，和不变”，如用字母a、b代表两个数，那么上述加法交换律就可简明地表达为$a+b=b+a$。又如，根据绝对值概念，有$|3|=3$、$|0|=0$、$|-5|=5$等式子，它表示“正数和零的绝对值就是它本身，负数的绝对值等于它的相反数”，如用字母a代替数，那么上述绝对值概念可简洁地表达为$|a|=\begin{cases} a, & \text{当}a\geqslant 0\text{时}, \\ -a, & \text{当}a<0\text{时}。\end{cases}$由此可以看出，用字母代替数所列出的式子，不仅形式简明、书写方便；而且意义广泛，便于表达数量关系的一般规律；还将便于分析与运算。

用字母代替数，虽然是一种比较抽象的方法，但正如列宁所指出的：“一切科学的（正确的、郑重的、不是荒唐的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然”❶，所以在数学、其它自然科学以及工程实践中广泛地运用着这种方法。

例如，当建筑物某层楼面的标高❷为h（米）时，那么在其上面0.82（m）的窗台标高就为$h+0.82$（m）；当配制砌筑的水泥砂浆抗压强度为M（千牛顿/平方毫米❸）、使用的水泥强度为f_c（N/mm²）时，那么每立方米砂浆所用的水泥量就为$\frac{1000M}{Kf_c}$(kg)，其中K为调整系数；当混凝土的浇筑速度为v(m/h)、新浇混凝土初凝时间为t_0，混凝土的重力密度为γ时，那么采用内部振捣器时新浇筑的混凝土作用于模板上的侧压力强度为$0.22\gamma t_0\beta_1\beta_2 v^{\frac{1}{2}}$（kN/m²），其中$\beta_1$、$\beta_2$分别为外加剂、坍落度影响的修正系数。

❶ 引自列宁《哲学笔记“黑格尔（逻辑学）一书摘要”》，人民出版社1956年第一版。

❷ 标高就是以一个标准水平面为基准来标明的高度。工业和民用建筑物，一般以底层室内地坪为标准面，把这个面的标高称为±00（读作“正负零”）。窗台在底层室内地坪以上0.8m，就称它的标高为+0.8(m)；基础底面在底层室内地坪以下1.8m，就称它的标高为-1.8(m)。

❸ 本书基本采用法定计量单位。压强、应力的单位为Pa（帕斯卡），它是1N（牛顿）的力均匀而垂直地作用于1m²（平方米）的面上所产生的压力，即$1\text{Pa}=1\text{N/m}^2$；它与非法定计量单位kgf/m²（千克力/平方米）的转换关系是$1\text{kgf/m}^2=9.80665\text{Pa}\approx 9.8\text{Pa}$。力的单位为N（牛顿），它是使质量为1kg（千克）的物体产生加速度1m/s²（1米每二次方秒）的力，即$1\text{N}=1\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$；它与非法定计量单位kgf（千克力）的转换关系是$1\text{kgf}=9.80665\text{N}\approx 9.8\text{N}$。但为了适应习惯用法，本书的压强、应力单位多用kN/m²（千牛顿每平方米）或1N/mm²（1牛顿每平方毫米），它与非法定计量单位1kgf/cm²的转换关系是：$1\text{kgf/cm}^2\approx 98\text{kN/m}^2$或$1\text{kgf/cm}^2\approx 0.098\text{N/mm}^2$。

又如，当字母D、G分别表示钢筋的直径（mm）、1m长该钢筋的重量（kg）时，那么就有$G=0.006165D^2$；当字母f、$[f]$（kN/m²）分别表示荷载作用下建筑构件截面上的内力值、允许内力值时，那么就有$f\leqslant[f]$；当字母D、l（mm）分别表示绑扎的受拉的Ⅱ级钢筋的直径、搭接长度时，那么就有$l\geqslant35D$。

用字母代替数，可以把客观事物中的数量关系一般化。而要分析、研究这种数量关系，就需要对字母进行各种运算。我们把含有字母的运算称为**代数运算**（或字母运算），而数的运算称为算术运算。

算术运算的规律大家已熟悉。由于字母是代替数的，所以象前面加法交换律那样加以抽象，就可得到代数运算的规律。它是进行字母运算的基础。

代数运算的规律　　表 1-1

名称		数字例子	代数运算	备注
基本运算律	加法交换律	$(-2)+3=3+(-2)$	$a+b=b+a$	a、b、c均为实数，m、n均为正整数
	加法结合律	$(-1)+2+3=[(-1)+2]+3$	$a+b+c=(a+b)+c$	
	乘法交换律	$(-2)\times3=3\times(-2)$	$a\cdot b=b\cdot a$	
	乘法结合律	$(-1)\times2\times3=[(-1)\times2]\times3$	$a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c$	
	乘法对加法分配律	$2\times(3+4)=2\times3+2\times4$	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	
指数律	同底幂相乘	$3^2\times3^4=3^{2+4}$	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	
	幂的乘方	$(2^3)^4=2^{3\times4}$	$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$	
	乘积的幂	$(2\times3)^4=2^4\times3^4$	$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$	
四则转化规则	加减互化	$2-3=2+(-3)$ $2+(-3)=2-3$	$a-b=a+(-b)$ $a+b=a-(-b)$	
	乘除互化	$2\times\frac{2}{5}=2\div\frac{5}{2}$ $2\div3=2\times\frac{1}{3}$	$a\times b=a\div\frac{1}{b}$ $a\div b=a\times\frac{1}{b}$	
符号规则	乘法符号	$(-3)\times(-4)=3\times4$ $(-3)\times4=3\times(-4)=-3\times4$	$(-a)\cdot(-b)=ab$ $(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-a\cdot b$	
	除法符号	$\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$ $\frac{-3}{4}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}$	$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$ $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$	
去括号规则		$2-[3-(-4)]=2-3+(-4)$ $2+[3-(-4)]=2+3-(-4)$	$a-(b-c)=a-b+c$ $a+(b-c)=a+b-c$	

用字母代替数，最常用有拉丁字母和希腊字母，都有大写与小写之分。现列表如下。

拉丁字母表(按英文字母读音读出)　　表 1-2

A a	B b	C c	D d	E e	F f	G g	H h	I i	J j	K k	L l	M m
N n	O o	P p	Q q	R r	S s	T t	U u	V v	W w	X x	Y y	Z z

希腊字母表　　　　表 1-3

字母	读音	字母	读音	字母	读音
A α	阿尔法	I ι	约塔	P ρ	洛
B β	贝塔	K κ	卡帕	Σ σ	西格马
Γ γ	伽马	Λ λ	兰布达	T τ	陶
Δ δ	德耳塔	M μ	米尤	Υ υ	宇普西隆
E ε	艾普西隆	N ν	纽	Φ φ	斐
Z ζ	截塔	Ξ ξ	克西	X χ	喜
H η	艾塔	O o	奥密克戎	Ψ ψ	普西
Θ θ	西塔	Π π	派	Ω ω	奥墨伽

用字母代替数，经过加、减、乘、除、乘方、除方运算，就可得到各种各式的式子：$h+0.82$，$0.006165D^2$，$\frac{1000M}{Kf_o}$，$0.22\gamma t_0\beta_1\beta_2 v^{\frac{1}{2}}$，等等。我们把用加、减、乘、除、乘方、开方运算符号将数或表示数的字母连接起来的式子称为**代数式**（简称**式**）。其中只含有加、减、乘（包括乘方）运算的代数式称为**整式**，例如$h+0.82$，0.006165；分母中含有字母的代数式称为**分式**，例如$\frac{1000M}{KR_o}$；根号内含有字母的代数式称为**根式或无理式**，例如$0.22\gamma t_0\beta_1\beta_2 v^{\frac{1}{2}}$。代数式分类如下所示。

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

因为代数式中的字母是代表数的，所以它可用具体的数值代替。我们把用具体的数值代替代数式中的字母，经计算得到的结果称**代数式的值**。

【例 1】在施工准备工作中，建筑材料仓库的面积由代数式$\frac{1.5T_nQ}{0.65RT}$（m^2）确定，其中字母T_n为仓库贮备的时间（天），Q为建筑材料的年需要量（吨或立方米），T为仓库的年工作时间（天），R为仓库每平方米能存放的建筑材料量（吨或立方米）。如果某工程的钢筋年需要量$Q=1000$t，贮备时间$T_n=30$d（即天），年工作时间$T=300$d，仓库每平方米贮存量$R=1.5$t，试计算钢筋仓库所需的面积？

【解】 把$Q=1000$，$T_n=30$，$T=300$，$R=1.5$代入代数式，就得仓库所需的面积

$$\left.\frac{1.5T_nQ}{0.65RT}\right|_{\substack{T_n=30,\ Q=1000\\ T=300,\ R=1.5}}=\frac{1.5\times30\times1000}{0.65\times1.5\times300}=153.9\,(m^2).$$

需要注意，在计算代数式的值时，字母所取的数值，不应当使代数式或它所表示的实际的量失去意义。例如，在代数式$\frac{a}{b}$中，b不能取零。

从研究具体的“数”到研究含有字母的“式”，是人们对数量关系的认识不断深化的表现。“数”与“式”既有联系，又有区别。在以后的讨论中，既要注意它们的联系，更要注意它们的区别。

三、整式及其运算

在代数式中，整式最为基本最为简单。形如$0.006165D^2$的整式，仅含有数和字母的乘法（包括乘方）运算，不含加减运算，把它称为**单项式**。形如$h+0.82$的整式是几个单项式的代数和❶，把它称为**多项式**。在单项式中，字母前面的数（包括正负号在内）称为单项式的**数字系数**，所有字母的指数的和称为单项式的**次数**。例如，$0.006165D^2$的系数为0.006165；次数为2。在多项式中，各个单项式（包括它前面的符号）称为多项式的**项**，而次数最高的项的次数称为该多项式的**次数**。例如，$h+0.82$有二项，最高次是一次，称为一次二项式，其中h称为一次项，0.82称为常数项；又如，$3a-7a^2+2$称为二次三项式，其中$-7a^2$称为二次项，$3a$称为一次项，2称为常数项。在多项式中，字母部分完全相同（字母和字母的次数完全相同）的项称为**同类项**。例如，$3b^2$与$(-5)b^2$，$-\frac{1}{2}mx^2$与$10mx^2$都是同类项；常数项与常数项也是同类项。单项式和多项式统称为整式。

为了便于分析，经常把多项式的各项按照某个字母的次数大小加以排列。例如，$3a-7a^2+2$可排成

$$-7a^2+3a+2\text{（次数从大到小）}$$

或

$$2+3a-7a^2\text{（次数从小到大）}$$

我们把各项次数从大到小的排列称为**降幂排列**，反之为**升幂排列**。习惯上多用降幂排列。

1.整式的加减法

整式的加减法与数的加减法不完全相同，它需要把式子中的括号去掉（该过程称为**去括号**，其规则见表1-1；如果括号有多层，常从里向外逐层去掉），还需要把几个同类项合并在一起（该过程称为**合并同类项**，其方法是：字母部分不变，系数相加减）。

【例 2】 计算$(x^3-3x^2+2)-(3x^3-7x-3)$，并求$x=1$时的值。

【解】 原式$=x^3-3x^2+2-3x^3+7x+3$ ［去括号］

$=x^3+(-3x^2)+2+(-3x^3)+7x+3$

$=[x^3+(-3x^3)]+(-3x^2)+7x+[2+3]$ ［加减交换律、结合律］

$=[1+(-3)]x^3+(-3x^2)+7x+[2+3]$

$=-2x^3-3x^2+7x+5$, ［合并同类项］

当$x=1$代入上式，有

$$\text{原式}|_{x=1}=-2x^3-3x^2+7x+5|_{x=1}=-2-3+7+5=7.$$

整式加减法的实质就是求一个多项式的代数和的运算，最后归结为对同类项的系数进行加减运算。

2.整式乘法、数乘的速算

我们知道，数的乘法口诀是乘法运算的基础。相类似，整式乘法的基础是正整数指数幂及其运算律（即指数律）：

---

❶ 两个单项式相减，可以在被减式上加上减式的相反式，因而若干单项式相加减的式子，都可化成全相加的式子，这种写法称为代数和。例如，$2a^2-3a-(-4)=2a^2+(-3a)+(+4)$。

$$\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n}=a^n;$$

及
$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\quad (a^m)^n=a^{mn},\quad (ab)^n=a^nb^n,$$
其中m、n为正整数。

运用指数律和基本运算律就可作整式乘法运算。

【例 3】 计算：$(a)(3ax^2)\cdot(4a^2bx)$；$(b)(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$.

【解】 $(a)(3ax^2)\cdot(4a^2bx)=3ax^2\cdot4a^2bx=(3\times4)\cdot(a\cdot a^2)\cdot b\cdot(x^2\cdot x)$ ［乘法交换律、结合律］

$=12a^3bx^3$； ［指数律］

$(b)(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)=(a+b)\cdot a^2+(a+b)\cdot(-ab)+(a+b)\cdot b^2$ ［乘法对加法分配律］

$=a\cdot a^2+b\cdot a^2+a\cdot(-ab)+b\cdot(-ab)+a\cdot b^2+b\cdot b^2$ ［乘法对加法分配律］

$=a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3=a^3+b^3$. ［指数律］

由例3(b)可以看出，有些多项式乘多项式是有规律可循的。我们把它们算出来并收集在一起，统称为乘法公式。它们是

$$\left.\begin{array}{ll}
\textbf{完全平方公式：} & \\
\quad \text{和的平方公式} & (a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \\
\quad \text{差的平方公式} & (a-b)^2=a^2-2ab+b^2; \\
\textbf{平方差公式} & (a+b)(a-b)=a^2-b^2; \\
\textbf{完全立方公式：} & \\
\quad \text{和的立方公式} & (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \\
\quad \text{差的立方公式} & (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3; \\
\textbf{立方和公式} & (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3; \\
\textbf{立方差公式} & (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.
\end{array}\right] \qquad (1\text{-}1)$$

在代数式运算中，灵活地运用乘法公式，可以简化计算，提高效率。

【例 4】 计算：$(3x+2y)^2$；$(2x+3)(4x^2-6x+9)$；$(a+2b+3c-d)(a+2b-3c+d)$.

【解】 $(3x+2y)^2=(3x)^2+2\cdot(3x)\cdot(2y)+(2y)^2=9x^2+12xy+4y^2$；

$(2x+3)(4x^2-6x+9)=(2x+3)[(2x)^2-(2x)\cdot3+3^2]$

$=(2x)^3+3^3=8x^3+27$；

$(a+2b+3c-d)(a+2b-3c+d)=[(a+2b)+(3c-d)][(a+2b)-(3c-d)]$

$=(a+2b)^2-(3c-d)^2=(a^2+4ab+4b^2)-(9c^2-6cd+d^2)$

$=a^2+4ab+4b^2-9c^2+6cd-d^2$.

我们已经知道：

$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

同样，由整式乘法得到

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$$

等等。我们把上述式子中等号右端的多项式称为**二项式幂的展开式**。

由上述几个展开式可以看出，二项式幂的展开式的规律是：

（ a ）展开式的项数比二项式的幂指数多 1；

（ b ）展开式中的字母a按降幂排列，字母 b 按升幂排列，且每一项中的a与b的指数和等于二项式的幂指数；

（ c ）展开式的系数按展开式系数表得到（上面的相邻两数相加而得下面一行的一个数），且具有对称性（即第一项系数与最后一项系数相同，第二项系数与倒数第二项系数相同等），见图1-1。

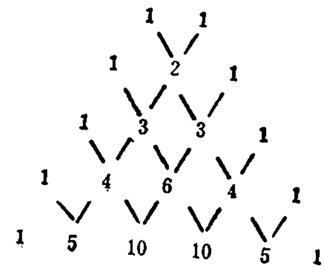

图 1-1

一般地，二项式幂的展开式可用下式表示：

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2\cdot1}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots[n-(m-1)]}{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}a^{n-m}b^m+\cdots\cdots+nab^{n-1}+b^n.\quad(1\text{-}2)$$

通常，把正整数的连乘积$m(m-1)(m-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$简记为$m!$，读作**$m$的阶乘**，即

$$m(m-1)(m-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1=m!\ .$$

这样，上式就可简化为

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{1}{2!}n(n-1)a^{n-2}b^2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{m!}n(n-1)\cdots\cdots[n-(m-1)]a^{n-m}b^m$$
$$+\cdots\cdots+nab^{n-1}+b^n,\quad(1\text{-}3)$$

其中第$m+1$项记为T_{m+1}，即

$$T_{m+1}=\frac{1}{m!}n(n-1)(n-2)\cdots\cdots[n-(m-1)]a^{n-m}b^m,\quad(1\text{-}4)$$

称为展开式的**一般项**（或**通项**）。

*【例 5】 求$(2-x)^{10}$展开式里的x^7项的系数❶。

【解】 把$(2-x)^{10}$与一般的二项式$(a+b)^n$相比较易知，2相当于a，$-x$相当于b，10相当于n。按二项式展开式的一般式，有

$$T_{m+1}=\frac{1}{m!}n(n-1)(n-2)\cdots\cdots[n-(m-1)]2^{n-m}(-x)^m,$$

而我们要求的是x^7的系数，对照上式知m应取7，于是x^7项的系数为

$$\frac{1}{7!}10(10-1)(10-2)\cdots[10-(7-1)]\cdot2^{10-7}\cdot(-1)^7=-960.$$

【例 6】 工字形柱子的截面尺寸如图 1-2 所示，试写出该截面面积的表达式，并按下表中数据算出截面面积的值。

【解】 柱子截面面积 = 大长方形面积 − 两个梯形面积

$$=h\cdot b-2\left\{\frac{1}{2}[(h-2h_1)+(h-2h_1-2c)]\cdot\frac{b-b_1}{2}\right\}$$

❶ 凡例题或习题中冠以符号“*”、“△”者，分别代表历届大学入学试题、硕士研究生入学试题。