模糊数学入门

青义学 编著

MOHUSHUXUERUMEN

知识出版社

模糊数学入门

青义学 编著

知识出版社
上海

模糊数学入门

青义学 编著

知识出版社出版发行

(上海古北路 650 号)

(沪 版)

新华书店上海发行所经销 上海东方印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 6.5 字数 138,000

1987 年 12 月第 1 版 1987 年 12 月第 1 次印刷

印数: 1—7,000

ISBN 7-5015-5234-7/O·23

定价: 1.30 元

内 容 提 要

模糊数学是一门新兴的数学分支，近二十年来发展非常迅速。本书作为模糊数学的入门书，比较通俗易懂地介绍了模糊数学的基础知识：模糊集、模糊关系、模式识别等，并收有模糊数学在人工智能、医学、气象预报、农业、矿业、体育、人文科学和管理科学等方面的应用。为帮助读者学习，每章后都附有习题和答案(或提示)。

本书可作为数学爱好者了解这方面知识的读物，也可供有关科技人员参考。

前　言

模糊数学是1965年由美国控制论专家扎德(L. A. Zadeh)首先提出来的，它是研究模糊领域中事物数学化的一门边缘学科，现已成为数学的一个重要分支.

模糊数学由英文 Fuzzy Mathematics 翻译而来. Fuzzy 的原意是"不分明"、"边界不清"、"模糊"的意思，开始有人译为"勿晰"、"乏晰"，以后才译为今名. 模糊数学是研究模糊现象的数学，不要误解为模糊的数学.

我们知道数学的源泉是实践，是起源于对实际问题的数学描述. 人类对在实践活动中所遇到的问题，往往要进行定量分析，将其数学化，建立数量关系或数学模型，再利用模型返回实际解决这类问题. 数学就在不断的实践中发展成长.

人类实践的范围是广阔的，用数学的观点可把实践中所遇到的现象大致分为三类：确定现象、随机现象和模糊现象. 为解决确定现象，逐步发展起来的数学工具有几何、代数、数学分析、微分方程等，习惯上把它称为经典数学；概率论与数理统计是研究随机现象的数学工具，而模糊数学则是研究模糊现象的数学工具.

经典数学的基础归结为集合论. 一个元素 x 是否属于集合 A 是明确的. 即

$$x \in A \quad 或 \quad x \overline{\in} A ①$$

二者必居其一，且只居其一. 它的逻辑基础是二值逻辑.

① $\in$—属于的符号，$\overline{\in}$—不属于的符号.

在经典数学里，对于一个概念要给出明确的定义，既要指出它所属的种(外延)，也要揭示它的本质属性(内涵)，对于命题要借推理来明辨真伪，于是就突出经典数学的三个重要的特征：精确性、逻辑性和实用性.

但是客观实际(现象和问题)并不都是精确的. 17世纪出现一个经典数学不能解决的问题. 赌徒梅累向数学家巴斯卡(B. Pascal)提出："两个赌徒相约赌若干局，谁先胜 n 局就可赢得赌金 m. 现一人胜 $a(<n)$ 局，另一人胜 $b(<n)$ 局，赌博因故中止，问应怎样分此赌金？"问题本身出现了随机性，这是经典数学中没有先例的. 巴斯卡于 1654 年将此问题的解法寄给费尔马(P.S.de Fermat)，成为第一篇概率论文. 这样随研究领域拓展到随机现象而诞生了以概率论为主的统计数学.

同时，对于经典数学所赖以建立的二值逻辑也是有争议的，著名的罗素(B. Russell)悖论和秃头悖论即其例证.

德国数学家策墨罗(E. Zermelo)认为

$$X=\{x|p(x)\}\text{①},$$

对于任意 x, $p(x)$ 与 $\overline{p(x)}$ 有一成立且只有一成立是无隙可乘的. 英国数学家罗素提出非议. 他的论点针锋相对：设

$$X=\{x|x\overline{\in}X\},$$

如果 $x\in X$，则 $x\overline{\in}X$；如果 $x\overline{\in}X$，则 $x\in X$. 显然 $x\in X$ 与 $x\overline{\in}X$ 自相矛盾，于是从根本上否定了"$p(x)$ 与 $\overline{p(x)}$ 二者必居其一". 这就是所谓罗素悖论，多值逻辑就是在它的启示下发展起来的.

所谓"秃头悖论"，首先约定只有 n_0 根头发的人为秃头，

① X 表集合，x 表集合 X 中的元素，$p(x)$ 表元素 x 所具有的某性质，$\overline{p(x)}$ 表 x 不具有某性质.

当 $n>n_0$ 则非秃. 挑战者问:“n_0+1 秃乎?”继而认为这种约定不够合理,才一发之间耳! 于是再约定:若 $n=n_0$ 为秃头,则 $n=n_0+1$ 亦秃,这就导致一切人都是秃头的悖论.

对于一个是非界限本来不清的概念,如果勉强用“是非”标准来作划分,必将导致谬论. 秃头悖论是对经典数学挑战的信号,说明这一类命题是不能用二值逻辑来作判断的.

实践的范围是广泛的,事物是复杂的,经典数学解决的问题不可能包罗万象. 有些概念并不都是明确的,如年轻、胖子、愉快、体虚这些概念都没有明确的外延;“张三年轻”、“李四性情温和”这类命题的判定也不是绝对的只分真假. 也许有人认为“张三年轻”只有一半是对的,或者“张三不大年轻”,“李四性情比较软弱”. 实际上,以上这些模糊概念和模糊命题过去也存在,只是经典数学难于给出它的数学描述而已.

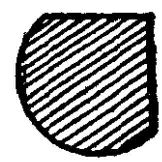


图 1

对于图 1,有人问:“它是圆吗?”如果回答是圆,或不是圆,都是不符合实际的、不正确的. 如果回答“它有 50% 的程度是圆”,这才符合实际.

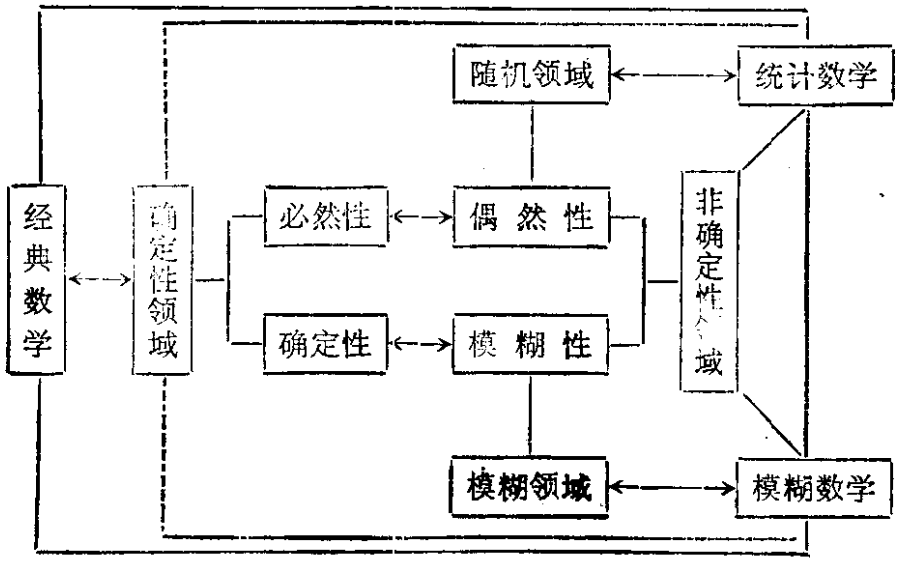
“50% 的程度是圆”给出了图 1 这个图形的数学描述,这正是模糊数学所用的术语.

可见模糊数学正是为了填补经典数学的“空白”应运而生的.

曾经有人认为模糊数学是研究不确定的现象,应该是概率论的分支. 事实上,概率论是研究随机性的问题,随机性虽然是不确定性,但它是由于条件不充分引起的. 概率论使数学的应用范围从必然现象扩大到偶然现象的领域. 而模糊数学则是研究模糊性的问题,这是另一类不确定性问题,事件本身是模糊的,但发生与否则是确定的,不是随机的. 模糊数学

使数学的应用范围从精确现象扩大到模糊现象的领域.

总之,随研究现象的确定性、随机性与模糊性而发展起来的经典数学、统计数学与模糊数学是各有专司、相辅相成、并行不悖的,三者关系可粗略地表示如下:



我们看到随着数学研究领域的拓展,为了解决经典数学不能解决的问题,模糊数学的诞生成为必然的趋势. 但是推动数学发展的直接因素,主要还是实践与实践的需求. 由于科学技术的发展,出现了电子计算机,三十年来更新了四代,现在正沿微型电子计算机发展,向第五代智能机过渡,一门崭新的学科——人工智能正在成长,它要求计算机代替人脑的活动. 但是使用计算机首先要构造数学模型,提供准确的信息;而对于具有二义性的、模糊性的自然语言,因不能编成程序,也就无法输入计算机. 模糊数学则能够解决自然语言的数学化,能够编制程序,使计算机执行模糊指令,从而使人工智能前进了一大步,模糊数学本身也迅速发展起来.

二值逻辑"或真或假,二者必居其一"这种绝对化的思想,实质上是扬弃了事物本身的模糊性并抽象出倾向于某一极端

的特点而达到精确的目的.

在以二值逻辑为逻辑基础的集合论里，对元素 x 和集合 A 给出一个特征函数

$$C(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0 & (x\overline{\in} A)\end{cases}$$

来描述元素对集合的隶属关系. 对于某些事物，这种绝对化的划分是合理的. 比如在分类学中，对于两个互相对立的类，不容许既属于甲类又属于非甲类. 对于另一些事物，这种绝对化的划分则是不合理的. 比如秃头，要找一个人为的划分界线，则是不可能的. 扎德把集合 $\{0, 1\}$（仅有 0, 1 两个元素的集合）改造为区间 $[0, 1]$（包括从 0 到 1 的全体实数），构造一个隶属函数

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \quad (0\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\leqslant 1)$$

来刻划元素 x 隶属于集合 $\underset{\sim}{A}$ 的程度. 例如某事物呈半圆形，硬说它是圆或不是圆，就不如说它是半圆 $\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\dfrac{1}{2}\right)$ 更符合实际. 这样就冲破了二值逻辑的局限，把它改造成能反映较复杂的实际情况的模糊数学了.

这个隶属函数我们并不陌生. 人们常说“某事有 80% 的把握”、“某人咳嗽多半是感冒引起的”，以及统计中常用的加权数等，都体现了隶属函数的思想. 因此，隶属函数的概念是模糊数学的最重要基础.

模糊数学的出现虽然只有短短二十多年的历史，由于它能用来描述、解决一系列实际问题，因此具有非常可观的发展前途. 日本浅居代治在其著作中谈到，1965～1975 年间模糊数学研究的领域有语言、自动机、系统科学、信息、控制、图形识别、逻辑、意识决策、生物、医学、心理、社会、测度、评判、人

工智能、算法语言、拓扑、网络等，近几年来更有增加. 中国在理论研究特别是模糊拓扑方面的研究处于领先的地位，在气象预报、医学、农业、工业、体育科学等方面的应用也取得了较好的进展.

模糊数学的研究领域非常广阔，在基础理论方面就有模糊集、模糊关系、模糊变换、模糊图论、聚类分析、综合评判、模式识别、模糊语言、模糊逻辑等. 由于模糊数学是一门边缘学科，它的成长又是和其它学科交织在一起的，因而还有模糊信息、模糊控制、模糊意识决策、模糊系统、模糊概率、模糊测度、模糊积分、模糊拓扑等多科性综合理论. 其中有些还不够成熟，还在继续发展完善.

为方便自学，本书先介绍有关集合、矩阵、概率的基础知识，然后再引入模糊数学的有关概念和应用.

目　录

第一章 预备知识

§1 集合

一、集合的概念

把自然数 1, 2, 3, 4, … 看成一个整体便形成一个集合，记为

$$N=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

N 就是自然数集，其中的元素是自然数 1, 2, 3, 4, ….

又如方程

$$x^3-6x^2+11x-6=0 \tag{1}$$

的根 1, 2, 3 组成一个集合，可以把它记为

$$A=\{x \mid x^3-6x^2+11x-6=0\}. \tag{2}$$

集合 A 的元素是 x，它是方程(1)的根．事实上

$$A=\{1, 2, 3\}.$$

一般来说，

$$X=\{x \mid p(x)\}, \tag{3}$$

表示集合 X 中的元素 x 具有属性 $p(x)$．在 (2) 式中这种属性就是方程(1)的根．

具有属性 $p(x)$ 的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 所组成的集合也可以记为

$$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}. \tag{4}$$

集合中的元素也可以是无限的，如自然数集就是．

一般有两种表示集合的方法：描述法(或揭示属性法)，如

(3)；列举法(或元素枚举法)，如(4).

元素与集合是不同层次的概念，它们只有属于或不属于的关系：

$$x \in A \quad 或 \quad x \overline{\in} A.$$

集合一般用大写字母表示，元素则用小写字母表示.

集合与集合之间有从属(包含)与相等的关系.

如果$x \in A$，有$x \in B$，则称A是B的子集，记为

$$A \subseteq B \quad 或 \quad B \supseteq A.$$

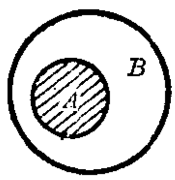


图 2

读为“A被B包含”或“B包含A”.

$B \supset A$表示真包含，A是B的真子集，即凡A中的元素都是B的元素，可用文氏图来表示这种关系，如图2.

如果$A \subseteq B$，$B \subseteq A$，则称A，B相等，记为$A = B$.

没有元素的集合称为空集，记为$\varnothing$，如

$$\{x \mid x+1 = x+2\} = \varnothing.$$

被讨论的对象的全体称为论域，论域的全体称为全集，用E表示.

二、集合的并、交、补

集合的运算是从现实生活里提炼出来的. 例如甲学生的文具盒里装有钢笔、铅笔、直尺、圆规、小刀、剪刀，乙学生的文具盒里装有钢笔、铅笔、三角板、铅笔刨、橡皮. 现在问：他们合起来有哪几件文具？相同的文具是哪几件？

甲的文具设为集合$A = \{a, b, c, d, e, f\}$，

乙的文具设为集合$B = \{a, b, g, h, i\}$，

合起来称为两个集合的并，记为

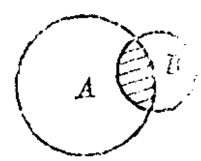
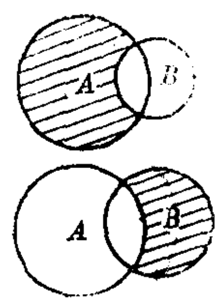
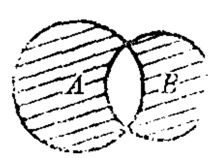
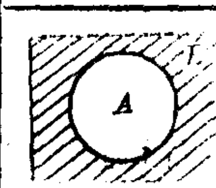
$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}.$$

相同的称为两个集合的交，记为

$$A\cap B=\{a,\ b\}.$$

集合的运算和数的运算是不相同的，可以用文氏图来帮助理解.

下面用表来给出集合的并、交、补、差的定义.

名称	定　　义	文　氏　图	例
并 (和)	$A\cup B$ $=\{x\|x\in A$ 或 $x\in B\}$		$\{1,\ 2\}\cup\{2,\ 3\}$ $=\{1,\ 2,\ 3\}$
交 (积)	$A\cap B$ $=\{x\|x\in A$ 且 $x\in B\}$		$\{1,\ 2\}\cap\{2,\ 3\}=\{2\}$ $\{1,\ 2\}\cap\{3,\ 4\}=\varnothing$
差	$A-B=\{x\|x\in A$ 且 $x\bar{\in}B\}$ $B-A=\{x\|x\in B$ 且 $x\bar{\in}A\}$		$\{1,\ 2\}-\{2,\ 3\}=\{1\}$ $\{2,\ 3\}-\{1,\ 2\}=\{3\}$
对 称 差	$A\ominus B$ $=(A-B)\cup(B-A)$		$\{1,\ 2\}\ominus\{2,\ 3\}$ $=\{1\}\cup\{3\}=\{1,\ 3\}$
补 (非)	$\overline{A}=E-A$ $=\{x\|x\bar{\in}A$ 且 $A\in E\}$		$\overline{\{1,\ 2\}}=\{x\|x\neq 1,\ 2\}$ $A=\{x\|x>0\}$ $\overline{A}=\{x\|x\leqslant 0\}$

集合的并、交、补与差是集合的基本运算，必须清楚地了解它们的涵义.

例 1　设 A 是不等式 $x^2-5x+6>0$ 的解集，则

$$A=\{x|x<2\}\cup\{x|x>3\}$$

例2 设 $A=\{x|1<x<4\}$, $B=\{x|2<x<5\}$, 则

$$A\cup B=\{x|1<x<5\},\ A\cap B=\{x|2<x<4\}.$$

例3 设 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{2, 7, 8\}$. 求 $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cap B}$.

解: $\overline{A}=\{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$,

$\overline{B}=\{1, 3, 4, 5, 6, 9\}$,

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1, 6, 9\}$,

$\overline{A}\cup\overline{B}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}=X$,

$A\cap B=\varnothing$,

$\overline{A\cap B}=X$,

例4 红、蓝、绿是光的三基色，试根据图3用集合表示{白}、{黄}、{青}、{品红}.

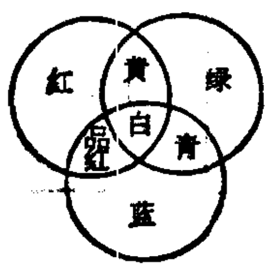


图 3

解: {白}={红}∩{绿}∩{蓝},

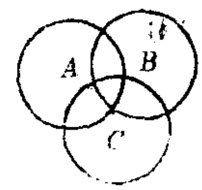
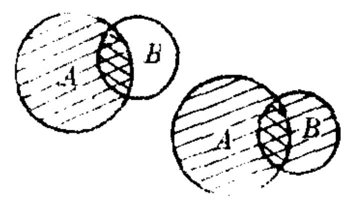
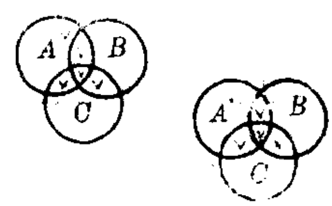
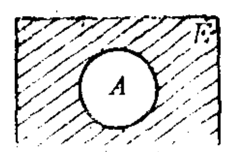
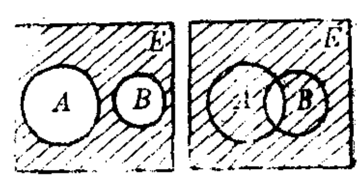
{黄}={红}∩{绿}−{蓝},

{青}={绿}∩{蓝}−{红},

{品红}={红}∩{蓝}−{绿}.

三、集合的运算法则

下表给出集合的运算法则，略去它们的数学证明，而用文氏图加以说明。

名　　称	运　算　法　则	文　　氏　　图
1. 幂等律	$A\cup A=A \quad A\cap A=A$	
2. 交换律	$A\cup B=B\cup A \quad A\cap B=B\cap A$	
3. 结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	
4. 吸收律	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	
5. 分配律	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	
6. 复原律	$\bar{\bar{A}}=A$ 或 $\neg(\neg A)=A$	
7. 对偶律	$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$	
8. 常数运算法则	$A\cup E=E \quad A\cap E=A$ $A\cup\varnothing=A \quad A\cap\varnothing=\varnothing$	
9. 互补律	$A\cup\bar{A}=E \quad A\cap\bar{A}=\varnothing$	