0.175

001403

高等学校教学参考书

微分方程

Л. Э. 艾利斯哥尔兹著

南开大学数学系编译中队译

崔　　士　　英　　校

人民教育出版社

高等学校教学参考书

微分方程

GF129/12

Л. Э. 艾利斯哥尔兹著

南开大学数学系编译中队译

崔士英校

人民教育

本书根据1957年出版的艾利斯哥尔兹(Л. Э. Эльстольц)著“微分方程”(Дифференциальные уравнения)译出。可作为高等学校数学各专业微分方程课程的教学参考书。

微分方程

Л. Э. 艾利斯哥尔兹著
南开大学数学系编译中队译
崔士英校

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)
北京印刷一厂印装
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售

统一书号13012·0116 开本 850×1168 1/32 印张 9 4/16
字数 308,900 印数 106,001—156,000 定价(6)¥0.90
1959 年5月第1版 1978 年3月北京第12次印刷

目　录

緒　論

在許多物理現象的研究中，不能直接找到联系所研究的那些量的規律，但是，却很容易建立起这些量和它們的导数或微分間的关系。这样，我們就得到含有带导数符号或微分符号的未知函数的方程。

含带导数符号或带微分符号的未知函数的方程称为**微分方程**。

例如:

$$1)\ \frac{dx}{dt}=x^2+t^2; \qquad 2)\ \frac{d^2y}{dx^2}=-a^2y;$$

$$3)\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0; \qquad 4)\ xdy-y^2dx=0.$$

如果指出了由微分方程所确定的未知函数的求法，那么未知量間的关系便找到了。寻求微分方程所确定的未知函数是微分方程理論的基本問題。

如果在微分方程里未知函数是一个变元的函数，那么，微分方程称为**常微分方程**。例如:

$$1)\ \dot{x}(t)+x(t)=0; \qquad 2)\ \frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+a^2y=\sin x;$$

$$3)\ (x+y)dx+(x-y)dy=0.$$

如果微分方程中的未知函数是两个或多于两个变元的函数，那么，微分方程就称为**偏微分方程**。例如:

$$1)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0; \qquad 2)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0;$$

$$3)\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z; \quad 4)\ xdx+ydy+z(x,y)dz(x,y)=0.$$

以后，我們仅研究常微分方程和最簡单形式的偏微分方程。

在微分方程中未知函数的导数(或微分)之最高阶数称为**微分方程的阶**。例如：方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2\sin x=0 \quad 和 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$$

是二阶方程，而方程

$$\frac{dx}{dt}+x=\sin t \quad 和 \quad (x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy=0$$

是一阶方程。

如果微分方程:

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0$$

的左端对于未知函数的最高阶导数是多項式，那么这个多項式的次数就称为**微分方程的次数**。例如:

$$(y'')^3+(y')^4-y^5+x^7=0$$

是二阶三次的方程，而方程

$$(y')^2+x^3y^5-y^9+x^4=0$$

是一阶二次的方程。

所謂**微分方程的解**就是这样的函数：将它代入方程后，会使方程变成恒等式。例如：1) 方程$\frac{dx}{dt}=x$ 有解 $x=e^t$; 2) 方程$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ 有解 $y=\cos x$ 和 $y=\sin x$。常微分方程的解的图形称为这个方程的**积分曲綫**。包含已給方程的所有解之解族称为**通解**。求微分方程的解的手續称为**积分微分方程**。如果方程的解求得为显式: $y=y(x)$，或由某个有限方程: $\Phi(x, y(x))=0$所确定，那么，就认为此微分方程已被积分出来。确定微分方程之解的有限方程 $\Phi(x, y(x))=0$ 称为**微分方程的积分**。

微分方程的积分法将在下面叙述。

第一章　一阶微分方程

§1. 导数已解出的一阶方程

一阶常微分方程导数解出后，就变成如下的形状：

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y).$$

这种方程的最简单的例子

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

已在积分学的教程中研究过。在这最简单的情况下解$y=\int f(x)dx+$ $+c$包含有一个任意常数。如果值 $y(x_0)=y_0$ 已知，那么，这个常数就被确定，这时 $y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x)dx$。

以后将证明：給函数$f(x, y)$以某些限制时，方程$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$便有满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的唯一解，而它的通解依賴于一个任意常数。

微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$建立了点的坐标与在这点处积分曲綫的切綫斜率$\frac{dy}{dx}$間的关系。知道 x 和 y 就能算出$\frac{dy}{dx}$。因此，上述的微分方程定义一个方向場（图 1），而积分微分方程的問題就归結到寻求一条这样的曲綫，它在每一点处的切綫方向与方向場的方向重合。

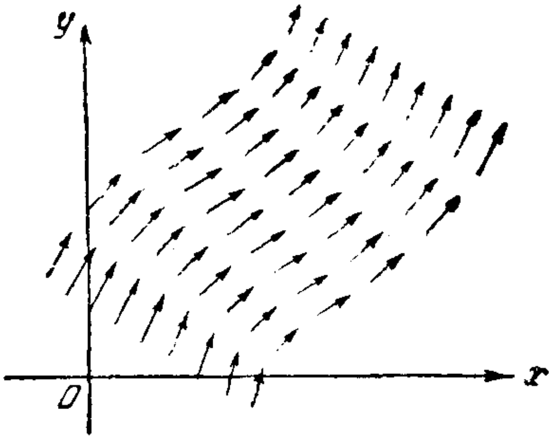

图 1.

例 1.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

未知积分曲綫上，除$(0,0)$点外，每一点处的切綫斜率都等于比式$\frac{dy}{dx}$，即同从坐标原点到这一点(x,y)的直綫的斜率相等。在图 2 中用箭头表示这个方程所确定的方向場。显然在这种情况下，直綫$y=cx$是积分曲綫，因为这些直綫的方向到处都和方向場的方向相同。

例 2.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

我們指出，未知积分曲綫的切綫斜率$-\frac{x}{y}$和例 1 中的积分曲綫在每一点的切綫斜率适合正交条件：$-\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}=-1$。因此，这个微分方程确定的方向場正交于图 2 所表示的方向場。显然，方程$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$的积分曲綫是以坐标原点为圓心的那些圓$x^2+y^2=c^2$（图 3）。

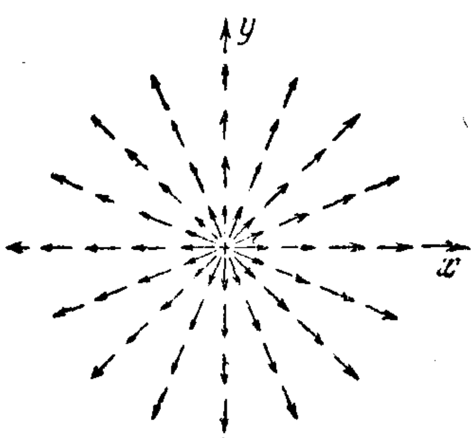

图 2.

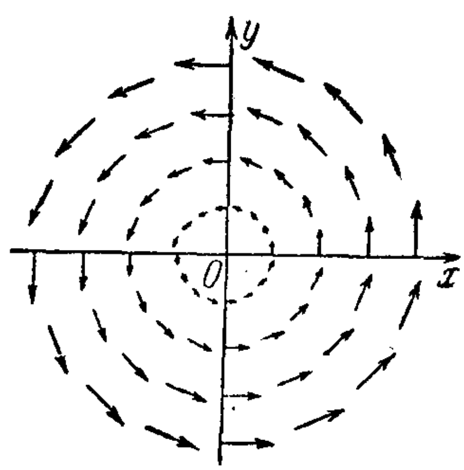

图 3

例 3.

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

为了作出向量場，我們求出这样一些点的軌迹，在这些点处，所求积分曲綫的切綫保持固定方向。这样的綫称为等斜綫。設$\frac{dy}{dx}=k$，k是常数；我們就得到等斜綫的方程$\sqrt{x^2+y^2}=k$或$x^2+y^2=k^2$，因此，以坐标原点为中心的

圆周是这个微分方程的等斜綫，并且，未知积分曲綫的斜率等于这些圆周的半徑。为了作出方向場，我們給常数 k 以某些确定的值(参看图 4 之左方)。現在我們能够近似地画出所求的积分曲綫了(参看图 4 之右方)。

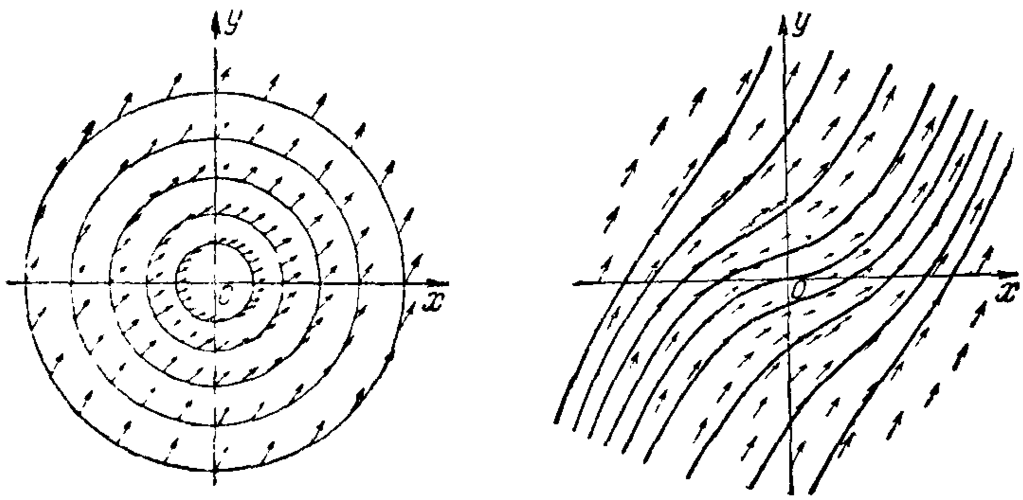

图 4.

例 4.

$$y'=1+xy.$$

等斜綫是双曲綫 $k=xy+1$ 或 $xy=k-1$，且当 $k=1$ 时，双曲綫化为一对直綫 $x=0$ 和 $y=0$(图 5)。

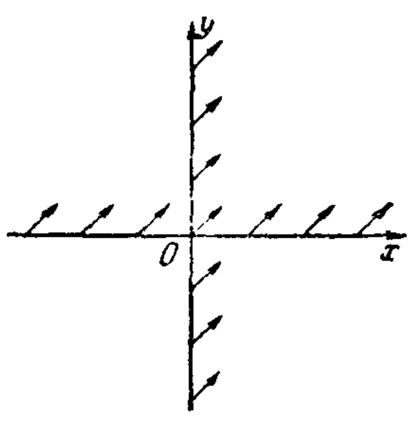

图 5.

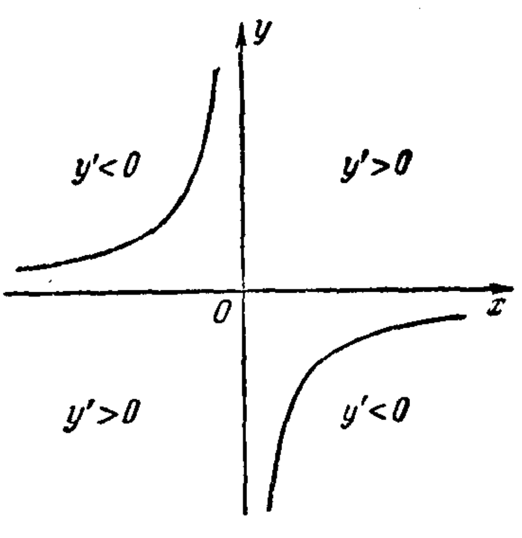

图 6.

当 $k=0$ 时，我們得到等斜綫 $1+xy=0$，这个双曲綫把平面分为几个部分，在每一部分上，y' 都保持固定的符号(图6)。积分曲綫 $y=y(x)$ 和双曲綫 $1+xy=$ $=0$ 相交后，就由函数 $y(x)$ 的增域进入它的减域，或者相反地由减域进入增

域。因此，积分曲綫的极大点和极小点分布在这双曲綫的二枝上。

現在我們来确定在不同的平面区域上二阶导数的符号:

$$y''=xy'+y \text{ 或 } y''=x(1+xy)+y=x+(x^2+1)y.$$

曲綫 $x+(x^2+1)y=0$ 或者

$$y=-\frac{x}{x^2+1} \tag{1}$$

(图 7)把平面分为两部分。在其中一部分上 $y''<0$, 因此，积分曲綫向上凸；而在另一部分上 $y''>0$, 就是說积分曲綫向上凹。經过曲綫(1)时，积分曲綫从凸的变成凹的。因此，在此曲綫上有积分曲綫的拐点。

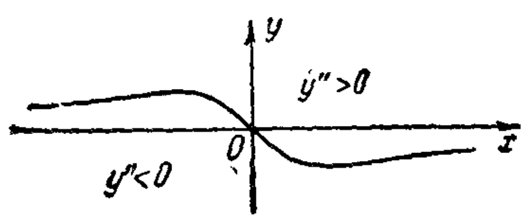

图 7.

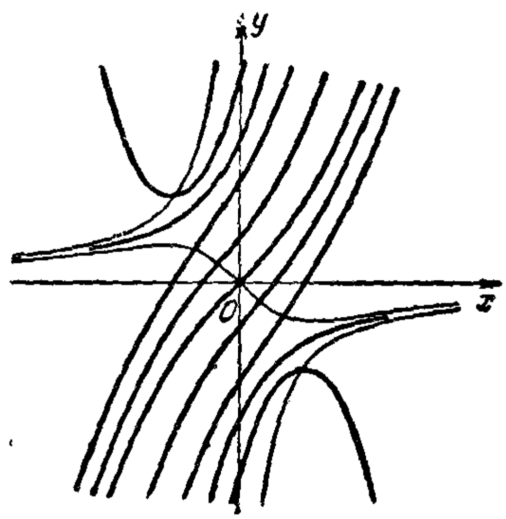

图 8.

由以上研究的結果，我們知道了积分曲綫的增域和減域，极大点和极小点的分布，凹域和凸域，拐点的分布以及 $k=1$ 的等斜綫。为了作出积分曲綫的分布略图(图 8)，上面的材料就足够了。要是再描出一些等斜綫的話，那么，积分曲綫的分布就可以显得更精細些。

在許多問題中，特别是几乎所有的几何性質的問題中，变量 x 和 y 是完全平等的。所以在这些問題中，如果把它們归結为解微分方程:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{A}$$

那么，除方程(A)外，自然还要研究方程:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x, y)}. \tag{Б}$$

如果这两个方程都有意义，那么，它們是等价的，因为如果$y=y(x)$是方程(A)的解，那么，反函数$x=x(y)$就是方程(Б)的解，因此，方程(A)和(Б)有公共的积分曲綫。

如果方程(A)或(Б)在某些点无意义，那么，在这些点上，自然要用另一个来代替。

例如：方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ (A) 在 $x=0$ 时沒有意义，我們用方程$\frac{dx}{dy}=$ $=\frac{x}{y}$(Б)来代替方程(A)，(方程(Б)的右端当 $x=0$ 时已經是有意义的了)；这样一来，除了以前所求得的解 $y=cx$ (参看第 4 頁)外，我們还又求出方程(Б)的一条积分曲綫 $x=0$。

§2. 可分离变量的方程

具有形状：

$$f_2(y)dy=f_1(x)dx \tag{2}$$

的方程称为已分离变量的方程。我們假定函数 $f_1(x)$，$f_2(y)$連續。

設 $y(x)$是这方程的解。将 $y(x)$代入方程(2)，我們得到恒等式，积分之将有：

$$\int f_2(y)dy=\int f_1(x)dx+c, \tag{3}$$

其中 c 是任意常数。

我們得到有限方程(3)，方程(2)的所有解都滿足它。同时方程(3)的每一个解也都是方程(2)的解，因为如果把某个函数 $y(x)$代入方程(3)而使方程(3)变为恒等式，那么，微分这恒等式，我們就发現 $y(x)$ 滿足方程(2)。因此方程(3)是方程(2)的通积分。为了确定 x 的隐函数 y，只要$f_2(y)\neq 0$ 就够了。

完全可能，在某些問題中，不定积分$\int f_1(x)dx$ 和$\int f_2(y)dy$ 不能用初等函数表出。但是，在这种情况下我們认为微分方程(2)的

积分問題在下述意义下已經完成：我們把它归結为較簡单的，且在积分学教程中已研究的計算不定积分——求积——的問題①。

如果要求出滿足条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解，那么，它显然是由方程：

$$\int_{y_0}^{y} f_2(y)dy = \int_{x_0}^{x} f_1(x)dx$$

确定，上面这个式子是利用始值条件于

$$\int_{y_0}^{y} f_2(y)dy = \int_{x_0}^{x} f_1(x)dx + c$$

而得到的。

例 1.

$$xdx + ydy = 0.$$

变量已分离，因为 dx 的系数仅是 x 的函数，而 dy 的系数仅是 y 的函数。积分此方程，我們得到：

$$\int xdx + \int ydy = c \text{ 或 } x^2 + y^2 = c_1^2$$

——以坐标原点为圓心的圓周族（和第 4 頁例(2)比較）。

例 2.

$$e^{x^2}dx = \frac{dy}{\ln y}.$$

积分后，我們得到：

$$\int e^{x^2}dx = \int \frac{dy}{\ln y} + c.$$

积分 $\int e^{x^2}dx$ 和 $\int \frac{dy}{\ln y}$ 不是初等函数。但是，原方程被认为已經积分出来，因为問題已变成求积了。

在形状为：

---

① 因为《积分》这一术語在微分方程理論中是微分方程的积分的意思，所以，为了避免誤会，对于函数的积分 $\int f(x)dx$ 的計算通常用《求积》这一术語。

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dx=\varphi_2(x)\psi_2(y)dy$$

的方程中，微分的系数分解为仅依賴于 x 和仅依賴于 y 的因子，这种方程称为可分离变量的方程，因为用 $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ 来除上式，就轉为已分离变量的方程：

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx=\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy.$$

注意：用 $\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)$ 除时，可能失掉使乘积 $\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)$ 等于零的特解，另一方面如果函数 $\psi_1(y)$ 和 $\varphi_2(x)$ 不連續，那么，也可能出現使乘式

$$\frac{1}{\psi_1(y)\varphi_2(x)}$$

变为零的多余的解。

例 3.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\text{（和第 4 頁的例 1 比較）.}$$

分离变量且积分：

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|y|=\ln|x|+\ln c,\quad c>0.$$

取指数函数，我們得到 $|y|=c|x|$。如果問題仅是关于光滑解，那么方程 $|y|=$ $=c|x|$ $(c>0)$ 等价于方程 $y=\pm cx$ 或 $y=c_1x$，其中 c_1 即可以取正值也可以取負值，但 $c_1\neq 0$。如果注意到除方程以 y 时，我們失掉了解 $y=0$，那么就认定解 $y=c_1x$ 中的常数 c_1 可取值 $c_1=0$，这样，我們得到了失掉的解：$y=0$。

注意。若在例 3 中把变量 x 和 y 认为是平等的，那么对方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$（当 $x=0$ 时沒意义）需要补充上方程 $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}$（参看第 7 頁）。显然，这个方程还有解 $x=0$，这是上面所求得的解 $y=c_1x$ 里所沒有的。

例 4.

$$x(1+y^2)dx-y(1+x^2)dy=0.$$

分离变量且积分：

$$\frac{ydy}{1+y^2}=\frac{xdx}{1+x^2};\quad \int\frac{ydy}{1+y^2}=\int\frac{xdx}{1+x^2}+c;$$

$$\ln(1+y^2)=\ln(1+x^2)+\ln c_1;\quad 1+y^2=c_1(1+x^2).$$

例 5.

$$\frac{dx}{dt}=4t\sqrt{x}.$$

求满足条件 $x(1)=1$ 的解 $x(t)$。

分离变量且积分得：

$$\int_1^x\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\int_1^t 2tdt,\quad \sqrt{x}=t^2,\quad x=t^4.$$

§ 3. 可化为可分离变量方程的方程

許多微分方程用变量替换的方法能化为可分离变量方程。例如下列形状的方程就屬于这种类型：

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by),$$

其中 a 和 b 是常量。用变量替换 $z=ax+by$ 便可将方程变成可分离变量的方程。实际上，对于新的变量 x 和 z，我們将有：

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx},\quad \frac{dz}{dx}=a+bf(z),$$

或

$$\frac{dz}{a+bf(z)}=dx,$$

变量已分离了。积分，我們得到：

$$x=\int\frac{dz}{a+bf(z)}+c.$$

例 1.

$$\frac{dy}{dx}=2x+y.$$

令 $z=2x+y$，我們有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-2,\ \ \frac{dz}{dx}-2=z.$$

分离变量且积分，我們得到:

$$\frac{dz}{z+2}=dx,\ \ \ln|z+2|=x+\ln c,\ \ z=-2+ce^{x},$$

$$2x+y=-2+ce^{x},\ \ y=ce^{x}-2x-2.$$

例 2.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1.$$

令 $x-y=z$，就得到:

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{dz}{dx},\ \ 1-\frac{dz}{dx}=\frac{1}{z}+1;$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{z},\ \ zdz=-dx,\ \ z^2=-2x+c,\ \ (x-y)^2=-2x+c.$$

所謂一阶齐次微分方程:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

也可以轉化为可分离变量的方程。

实际上，以 $z=\frac{y}{x}$ 或 $y=zx$ 代入方程后，我們得到:

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z,\ \ x\frac{dz}{dx}+z=f(z),\ \ \frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dz}{f(z)-z}=\ln|x|+\ln c,\ \ x=ce^{\int\frac{dz}{f(z)-z}}.$$

我們指出，齐次方程的右端是变量 x 和 y 的零次齐次函数，因此，如果 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 是 x 和 y 的同次齐次函数的話，那么，形状为:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

的方程是齐次的，因为此时我們有:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

例3.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\operatorname{tg}\frac{y}{x}.$$

令 $y=xz$, $\frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z$, 且代入原方程, 我們得到

$$x\frac{dz}{dx}+z=z+\operatorname{tg}z,\quad \frac{\cos z dz}{\sin z}=\frac{dx}{x},$$

$$\ln|\sin z|=\ln|x|+\ln c,\quad \sin z=cx,\quad \sin\frac{y}{x}=cx.$$

例4.

$$(x+y)dx-(y-x)dy=0.$$

令 $y=xz$, $dy=xdz+zdx$, 我們得到:

$$(x+xz)dx-(xz-x)(xdz+zdx)=0,$$

$$(1+2z-z^2)dx+x(1-z)dz=0,$$

$$\frac{(1-z)dz}{1+2z-z^2}+\frac{dx}{x}=0,\quad \frac{1}{2}\ln|1+2z-z^2|+\ln|x|=\frac{1}{2}\ln c,$$

$$x^2(1+2z-z^2)=c,\quad x^2+2xy-y^2=c.$$

形状为:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{4}$$

的方程, 可用移坐标原点于直綫

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \text{ 和 } a_2x+b_2y+c_2=0$$

的交点 (x_1, y_1) 处的方法变为齐次方程。

实际上, 这两个直綫方程里的自由項在新坐标 $X=x-x_1, Y=$ $=y-y_1$ 里等于零, 而流动坐标的系数保持不变, 且 $\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$。方程 (4) 的形状变成了

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)$$

或

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right)=\varphi\left(\frac{Y}{X}\right),$$