

数列与极限

〔日〕 茂木勇 著

高子平 梁国仪 李成仁 石金玉 译

文化教育出版社

日本新高中数学研究丛书9

数 列 与 极 限

[日] 茂木勇 著

高子平 梁国仪 李成仁 石金玉 译

文化教育出版社

内 容 提 要

这套丛书,译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书,原书共分十五册,书中除有中学数学传统题材外,还包括一些较新的内容。

本册是原丛中第九册,主要内容有数列、数列的求和方法、数学归纳法、二项式定理、无穷级数等,叙述比中学数学教材广泛、深入、易懂,可供中学数学教学研究人员、中学数学教师、中学学生在研究、教学或自学中参考。

日本新高中数学研究丛书 9

数 列 与 极 限

[日] 茂木勇 著

高子平 梁国仪 李成仁 石金玉 译

*

文化教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 10.25 字数 210,000

1981年3月第1版 1981年11月第1次印刷

印数 1—13,000

书号 7057·040 定价 0.75元

(限国内发行)

译 者 的 话

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，我们译出了其中的第二册至第十三册，本册是第九册。丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容。

这套丛书的特点是比教材内容广泛、深入、易懂。对基础知识作了系统整理，归纳概括，重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究。可供我国中学数学教师和高中学生研究参考。

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳市教育学院数学系等单位合译的，最后由我院教研部负责统校工作。本册由辽宁师范学院数学系高子平、梁国仪、李成仁、石金玉等同志译出；由该院数学系主任副教授王鸿钧和副教授高子平同志校阅。

由于时间仓促以及译者、校者水平所限，缺点错误，恐难避免。希望读者提出宝贵意见。

辽宁教育学院

1980年6月

前言

本书是为了系统地学习高中的有关数列知识而编写的。

在现行的教学大纲中，是把有穷数列放在数学 II、无穷数列放在数学 III 里，分别在不同的学年里进行学习，但为了系统地学习数列，还是把它们集中在一起学比较方便。

在高中，所学的有关数列内容，大致可以分为：

- 1) 关于有穷数列的；
- 2) 关于归纳方法的；
- 3) 关于无穷数列的。

本书是为了系统地学习上述内容而编写的。数列是通过学习 1)、2) 而进入 3) 的，极限的思想将向函数极限发展，再使它与微积分相联系，这已成为高中数学中的一个主要倾向。

本书既与教科书密切配合，又考虑到准备高考的进一步的问题。编写中以

透彻理解基础知识，进而增强应用能力

为重点，力求使苦于学数学的人也能容易理解，擅长学数学的人更能提高应用能力。

在内容上，每个项目分别按

解说——例题——发展题——练习

的顺序进行，努力设法使读者从基础到应用，都能完全掌握。因而，它不仅对于平时的学习，就是对于准备高考也会发挥很大的作用。

最后,在本书出版之际,谨向始终予以协助的雫石重一郎先生,致以深厚的谢意.

著 者

几点说明

如前言所述,本书是一本独具风格的参考书,它既能使苦于学习数学的人容易理解,又能使擅长学数学的人更加爱好.为此,本书的结构编排如下.

主张划分细目

本书各部分尽量划分细目,凡披阅所及均能一目了然,在解说时既能配合教科书,又写得

比较广泛,比较深入,比较易懂

在解说后的提要中,归纳出重要的公式.因此,希望在理解解说的同时,必须记住这些公式.另外,用竖线把版面分成两部分,在左边列出重要项目,以便提高学习效率.

例题——>发展题——>练习

本书最大的特点是,力求在理解解说的基础上反复学习例题、发展题、练习题,使在不知不觉中增强解决问题的实际能力.虽然从例题到发展题,依次提高难度,但在解法和要点中,指出了思考方法和解题要领,因此希望读者要反复学习,使对这两种问题达到几乎能够背诵的程度.总之,学习数学最重要的是

要逐步积累学习方法

为此,建议读者,要反复进行学习.如果前面的内容都能掌握,那么解“练习”题时就不会遇到什么困难.反之,如果不大解“练习”题,那就应该认为学习的还不够深刻.

习题

分 A 、 B 两部分。 A 的程度相当于例题和发展题， B 中还包含稍难的问题。因为在高考试题中这种程度的题目出的最多，所以，对于准备参加高考的读者这是不可缺少的问题。

虽然常说，学数学背下来也没有用，但那是指机械的背诵，本书不提倡单纯的记忆。对于数学，在适当指导“怎样进行思考”之后，应记忆应用范围较广的知识。深切地希望本书的读者，能真正理解数学，从而获得广泛应用数学的实际本领。

目 录

译者的话	1
前言	6
几点说明	8
重要词汇一览表	10

1. 数列

以自然数集合为定义域的函数, 数列的意义, 求第 n 项的方法, 通项, 数列的一般表示法, 有穷数列和无穷数列, 递推式.

2. 等差数列

等差数列, 等差数列的定义, 等差数列的通项, 公差为 0 的等差数列, 通项公式的图象, 用递推式给出的等差数列的定义, 等差中项.

3. 等差数列的和

等差数列的和的简单计算, 一般的等差数列的和, 等差数列求和公式, 求和公式用法举例, 求项数的方法, 和与项数的关系.

4. 调和数列

调和数列的定义, 调和数列的一般形式, 调和数列与等差数列的关系, 调和中项, 等差中项与调和中项的大小, 调和数列的和, 调和点列.

5. 可分组的数列

自然数数列的分组, 原数列的规律, 各组数列的规律, 第 n 组为 n 个项的分组, 第 n 组的数列及其和, 其他数列的分组.

6. 等比数列

等比数列的定义, 等比数列的通项, 公比是实数, 用递推

式给出的等比数列的定义, 等比中项, n 个等比中项.

7. 等比数列的和.....56

等比数列的和, 重要的两点, $S_n = p(r^n - 1)$ 的形式, 逆命题也成立, 两个等比数列的和相加的形式, 要会导出公式.

8. 等差数列和等比数列.....71

等差数列和等比数列, 三项的情形, n 项的情形, 三个中项的大小, 由等差数列与等比数列作成的数列, 等差数列和等比数列的其他关系.

习题(1. ~20.).....81

9. 自然数连乘的和.....83

自然数的和, 恒等式 $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, 自然数的平方和, 自然数的立方和, 概括, a_k 的次数与 b_k 的次数的关系.

10. Σ 的应用.....96

数列的和, 表示和的简便方法, 记号 Σ , 用 Σ 的表示方法, 用 Σ 表示的公式, Σ 的性质, Σ 性质的证明, Σ 的性质的应用.

11. 阶差数列.....109

阶差和阶差数列, 阶差数列的公式, 公式的应用, 第 2 阶差数列, 第 2 阶差数列的应用.

12. 归纳定义.....116

数列的归纳定义, 函数的归纳定义, 用归纳的方法求 $f(n)$ 的例子.

13. 递推式.....122

归纳定义和递推式, (1) $a_{k+1} = a_k + f(k)$, (2) $a_{k+1} = pa_k + q$, $b_k = pb_{k-1}$, (3) 由三项作成的递推式 $b_{k+1} = -qb_k$.

习题(21. ~39.).....133

算法	136
计算程序, 算法, 求第 n 项的算法, 流向图, 接头记号, 处理记号, 判断记号, 循环.	
14. 数学归纳法	146
$a_1=1, a_{k+1}=2a_k$, 数学归纳法, 用集合观点说明数学归纳法.	
15. 二项式定理	162
$(a+b)^n$ 的展开式, 应用排列组合证明, 二项式定理, 二项式系数, 用数学归纳法证明二项式定理, 展开式的特征, 多项式定理.	
习题(40. ~ 49.)	175
16. 无穷数列	176
无穷数列, 无穷数列的问题, 收敛的无穷数列, 极限值, 记号 $\lim_{n \rightarrow \infty}$, 发散的数列, 收敛、发散的判定法.	
17. 极限值的性质	188
收敛的无穷数列, 极限值的性质, 极限值性质的应用, 不定形.	
18. 无理式的无穷数列	197
无理式的无穷数列, 不定形, 分子的有理化, 分母的有理化.	
19. 无穷等比数列	204
无穷等比数列 $\{r^{n-1}\}$, 无穷等比数列 $\{ar^{n-1}\}$, 收敛的条件.	
习题(50. ~ 59.)	216
20. 无穷等比级数	218
无穷数列的和, 通常所说的和的意义, 研究无穷数列的和的方法, 一般的无穷等比级数, 第 n 部分和, 无穷等比级数的和, 无穷等比级数④的收敛、发散, 收敛的无穷等比级数的例子.	

21. 循环小数.....233

循环小数, 有限小数, 无限小数, 循环节, 循环小数表示法, 化循环小数为分数, 化有限小数为分数, 可化成有限小数的分数, 可化成循环小数的分数, 化无理数为小数.

22. 无穷级数.....242

无穷级数, 第 n 部分和, 无穷级数的和, 无穷级数的发散, 收敛、发散的一个判定条件.

习题(60. ~ 68.).....256

练习题答案.....258

习题答案.....284

1. 数列

以自然数集
合为定义域
的函数

在以全体自然数集合为定义域的函数 $f(n) = n^2 - 2$ 中, 取 $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, 并把和 n 对应的 $f(n)$ 的值按顺序排列起来, 就能得到一列数

$$\begin{array}{ccccccccc} n: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ f(n): & -1 & 2 & 7 & 14 & 23 & \dots & & \end{array}$$

反过来, 如果给出一列数, 由此找出它的规律性, 求出这个函数 $f(n)$, 这也是重要的问题.

数列的意义

一般地, 按某种规律排列的一列数叫做数列, 这就是本书研究的对象. 可是, 在高中所学的数列, 是以简单化了的自然现象或社会现象为模型, 且具有简单规律的数列. 举个简单的数列的例子, 如从 1 起按顺序排列起来的正奇数的数列

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots \quad \dots \textcircled{1}$$

这里的“ $\dots$ ”是表示“以下按同样规律继续下去”的意思. 应当注意, 添加“ $\dots$ ”时, 不要丢掉这个符号和它前面的数字之间的“,”号.

数列里的每一个数叫做数列的项, 从头起

求第 n 项的方法

按照顺序分别叫做第 1 项(也叫**首项**), 第 2 项, 第 3 项, …… , 第 n 项. 如果把数列看作以自然数集合为定义域的函数 $f(n)$ 时, 那么

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

分别是第 1 项, 第 2 项, 第 3 项, …… , 第 n 项, …… .

试求数列①的第 n 项.

数列①是“把奇数从 1 开始排列起来的”, 因为由某一个奇数求下一个奇数时, 只要在此奇数上加个 2 就行了. 可见数列①是“把从 1 开始依次地加上个 2 所得的数排列起来的”. 因此, 这个数列的第 n 项是在 1 上加 $(n-1)$ 个 2 所得到的. 也就是

$$1 + 2(n-1) = 2n - 1$$

反过来, 在以自然数为定义域的函数 $f(n) = 2n - 1$ 中, 取 $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 就得到

$$f(1) = 2 \times 1 - 1 = 1, \quad f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5, \quad f(4) = 2 \times 4 - 1 = 7$$

$$f(5) = 2 \times 5 - 1 = 9, \quad \dots\dots\dots$$

这与数列①的首项, 第 2 项, 第 3 项, 第 4 项, 第 5 项, …… 是相同的.

通项

由此可见, 如果把第 n 项用含 n 的式子表示出来, 并把它看作函数 $f(n)$, 它就具有上面那样的性质. 所以, 这个式子可以作为各项的代表. 因此, 把这个式子叫做数列①的**通项**.

数列的一般
表示法

通常研究数列时, 令 $f(n)$ 为 a_p , 并把它表示为:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad \text{.....} \textcircled{2}$$

这里, 写在 a 的右下方的角码 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ 是表示该项的号数, 叫做下标(Suffix). 象数列②那样的表示法, 在项与项之间必须添上“,”号.

还可以用数列的通项表示数列, 记作

$$\{a_n\}$$

有穷数列和
无穷数列

在数列中, 项数有限的数列叫做有穷数列, 它的最后一项叫末项. 项数无限的数列叫无穷数列. 象①, ②那样表示无穷数列时, 可写出它的前几项, 并在后面写出“.....”.

虽说数列是按照某种规律排列着的一列数, 可是, 实际上给出数列时, 规律的给法也是多种多样的. 并且有的规律有时不能简单地表示出来. 下面, 我们将就各种情况来进行探讨.

给出数列的
方法(其1)

第 1: 把全班学生的身高, 按名册的顺序排列起来; 或者, 如铁路客运量(用人、公里作单位)的逐月统计表这类的问题, 要问某个号数应该对应着什么数, 想找出它的规律是有困难的.

给出数列的
方法(其2)

第 2: 只给出数列的前几项, 再在后面写上“.....”(表示后面同样继续下去). 例如

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \quad \text{.....} \textcircled{3}$$

找数列规律
的方法

$$5, \frac{7}{2}, 2, \frac{1}{2}, \dots \dots \text{.....} \textcircled{4}$$

$$-1, 2, -4, 8, \dots \dots \text{.....} \textcircled{5}$$

上面这几个例子, 都没有给出数列的规律, 所以需要从已给出的几个项来发现数列的规律. 象数列③那样, 能明显地看出它的规律时固然很好, 否则, 可采取下列的作法.

(i) 逐次地取出某一项和它前一项的差加以观察.

对数列④, 取它们的差, 就得到

$$\frac{7}{2} - 5 = -\frac{3}{2}, 2 - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

它们的差都是 $-\frac{3}{2}$, 由此可知, 这个数列是由首项 5, 并在 5 上逐次地加上 $-\frac{3}{2}$ 所得的数作成的.

(ii) 逐次地取出某一项和它前一项的比加以观察.

对数列⑤, 取它们的比, 就得到

$$\frac{2}{-1} = -2, \frac{-4}{2} = -2, \frac{8}{-4} = -2$$

它们的比都是 -2 , 由此可知, 这个数列是由首项 -1 , 并逐次地乘以 -2 所得的数作成的.

但是, 对于这种情形, 严格说, 只给出了数列的前几项, 还不能说已经知道了这个数列的

规律. 例如, 数列⑤, 它是否为

$$-1, 2, -4, 8, -1, 2, -4, 8, -1, 2, \dots$$

中的若干项反复重复出现的数列, 我们无法保证它不能这样.

可是, 一般地, 都把它后面的“……”部分, 也解释为按照开头几项所具有的规律继续下去的.

给出数列的方法(其3)

第3: 用含有 n 的式子给出通项(第 n 项).
例如

第 n 项是 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 的数列

第 n 项是 $a_n = -\frac{3}{2}n + \frac{13}{2}$ 的数列

第 n 项是 $a_n = (-1)^n 2^{n-1}$ 的数列

这时, 依次用自然数 $1, 2, 3, 4, \dots$ 代替通项 a_n 里的 n , 就能得出数列的各项.

例如, $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n-1}$

当 $n=1$, $a_1 = (-1)^1 2^0 = -1$

当 $n=2$, $a_2 = (-1)^2 2^1 = 2$

当 $n=3$, $a_3 = (-1)^3 2^2 = -4$

当 $n=4$, $a_4 = (-1)^4 2^3 = 8$

.....

给出数列的方法(其4)

第4: 给出数列的相邻两项之间的关系式.

这时, 如果知道了首项, 就能依次地求出数列的每一项. 并且, 由给出的关系式, 一般地,