日本新高中数学研究丛书 9

数列与极限

〔日〕 茂木勇 著

高子平 梁国仪 李成仁 石金玉 译

文化教育出版社

日本新高中数学研究丛书9

数列与极限

[日]茂木勇 著
高子平 梁国仪 李成仁 石金玉 译

文化教育出版社

内 容 提 要

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，书中除有中学数学传统题材外，还包括一些较新的内容。

本册是原丛书中第九册，主要内容有数列、数列的求和方法、数学归纳法、二项式定理、无穷级数等，叙述比中学数学教材广泛、深入、易懂，可供中学数学教学研究人员、中学数学教师、中学学生在研究、教学或自学中参考。

日本新高中数学研究丛书 9

数 列 与 极 限

［日］茂木勇 著

高子平 梁国仪 李成仁 石金玉 译

*

文化教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 10.25 字数 210,000

1981 年 3 月第 1 版 1981 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—13,000

书号 7057·040 定价 0.75 元

（限国内发行）

译 者 的 话

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，我们译出了其中的第二册至第十三册，本册是第九册. 丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容.

这套丛书的特点是比教材内容广泛、深入、易懂。对基础知识作了系统整理，归纳概括，重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究. 可供我国中学数学教师和高中学生研究参考.

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳市教育学院数学系等单位合译的，最后由我院教研部负责统校工作。本册由辽宁师范学院数学系高子平、梁国仪、李成仁、石金玉等同志译出；由该院数学系主任副教授王鸿钧和副教授高子平同志校阅.

由于时间仓促以及译者、校者水平所限，缺点错误，恐难避免. 希望读者提出宝贵意见.

辽宁教育学院

1980 年 6 月

前　言

本书是为了系统地学习高中的有关数列知识而编写的.

在现行的教学大纲中，是把有穷数列放在数学 II、无穷数列放在数学 III 里，分别在不同的学年里进行学习，但为了系统地学习数列，还是把它们集中在一起来学比较方便.

在高中，所学的有关数列内容，大致可以分为：

1）关于有穷数列的；

2）关于归纳方法的；

3）关于无穷数列的.

本书是为了系统地学习上述内容而编写的. 数列是通过学习1)、2)而进入3)的，极限的思想将向函数极限发展，再使它与微积分相联系，这已成为高中数学中的一个主要倾向.

本书既与教科书密切配合，又考虑到准备高考的进一步的问题. 编写中以

透彻理解基础知识，进而增强应用能力

为重点，力求使苦于学数学的人也能容易理解，擅长学数学的人更能提高应用能力.

在内容上，每个项目分别按

解说——→例题——→发展题——→练习

的顺序进行，努力设法使读者从基础到应用，都能完全掌握. 因而，它不仅对于平时的学习，就是对于准备高考也会发挥很大的作用.

最后，在本书出版之际，谨向始终予以协助的雫石重一郎先生，致以深厚的谢意.

著　　者

几点说明

如前言所述，本书是一本独具风格的参考书，它既能使苦于学习数学的人容易理解，又能使擅长学数学的人更加爱好．为此，本书的结构编排如下．

主张划分细目

本书各部分尽量划分细目，凡披阅所及均能一目了然，在解说时既能配合教科书，又写得

比较广泛，比较深入，比较易懂

在解说后的提要中，归纳出重要的公式．因此，希望在理解解说的同时，必须记住这些公式．另外，用竖线把版面分成两部分，在左边列出重要项目，以便提高学习效率．

例题——→发展题——→练习

本书最大的特点是，力求在理解解说的基础上反复学习例题、发展题、练习题，使在不知不觉中增强解决问题的实际能力．虽然从例题到发展题，依次提高难度，但在解法和要点中，指出了思考方法和解题要领，因此希望读者要反复学习，使对这两种问题达到几乎能够背诵的程度．总之，学习数学最重要的是

要逐步积累学习方法

为此，建议读者，要反复进行学习．如果前面的内容都能掌握，那么解"练习"题时就不会遇到什么困难．反之，如果不大会解"练习"题，那就应该认为学习的还不够深刻．

习题

分 A、B 两部分. A 的程度相当于例题和发展题, B 中还包含稍难的问题. 因为在高考试题中这种程度的题目出的最多, 所以, 对于准备参加高考的读者这是不可缺少的问题.

虽然常说, 学数学背下来也没有用, 但那是指机械的背诵, 本书不提倡单纯的记忆. 对于数学, 在适当指导"怎样进行思考"之后, 应记忆应用范围较广的知识. 深切地希望本书的读者, 能真正理解数学, 从而获得广泛应用数学的实际本领.

目　　录

1. 数列

以自然数集合为定义域的函数

在以全体自然数集合为定义域的函数 $f(n)=n^2-2$ 中，取 $n=1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots$，并把和 n 对应的 $f(n)$ 的值按顺序排列起来，就能得到一列数

$$\begin{array}{lcccccc} n: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ f(n): & -1 & 2 & 7 & 14 & 23 & \cdots\cdots \end{array}$$

反过来，如果给出一列数，由此找出它的规律性，求出这个函数 $f(n)$，这也是重要的问题.

数列的意义

一般地，**按某种规律排列的一列数叫做数列**，这就是本书研究的对象. 可是，在高中所学的数列，是以简单化了的自然现象或社会现象为模型，且具有简单规律的数列. 举个简单的数列的例子，如从1起按顺序排列起来的正奇数的数列

$$1, 3, 5, 7, 9, \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots①$$

这里的"……"是表示"以下按同样规律继续下去"的意思. 应当注意，添加"……"时，不要丢掉这个符号和它前面的数字之间的"，"号.

数列里的每一个数叫做**数列的项**，从头起

按照顺序分别叫做第 1 项(也叫**首项**),第 2 项,第 3 项,……,第 n 项. 如果把数列看作以自然数集合为定义域的函数 $f(n)$时,那么

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots\cdots,\ f(n),\ \cdots\cdots$$

分别是 第 1 项, 第 2 项, 第 3 项, ……, 第 n 项,…….

求第 n 项的方法

试求数列①的第 n 项.

数列①是“把奇数从 1 开始排列起来的”,因为由某一个奇数求下一个奇数时, 只要在此奇数上加个 2 就行了. 可见数列① 是“把从 1 开始依次地加上个 2 所得的数排列起来的”. 因此, 这个数列的第 n 项是在 1 上加$(n-1)$ 个 2 所得到的. 也就是

$$1+2(n-1)=2n-1$$

反过来, 在以自然数为定义域的函数 $f(n)=2n-1$ 中, 取 $n=1, 2, 3, 4, 5,$ ……就得到

$$f(1)=2\times1-1=1,\ f(2)=2\times2-1=3$$

$$f(3)=2\times3-1=5,\ f(4)=2\times4-1=7$$

$$f(5)=2\times5-1=9,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这与数列①的首项,第 2 项,第 3 项,第 4 项,第 5 项,……是相同的.

通项

由此可见, 如果把第 n 项用含 n 的式子表示出来,并把它看作函数 $f(n)$, 它就具有上面那样的性质. 所以, 这个式子可以作为各项的代表. 因此,把这个式子叫做数列①的**通项**.

数列的一般表示法

通常研究数列时，令 $f(n)$ 为 a_p，并把它表示为：

a_1, a_2, a_3, ……, a_n, …… ……②

这里，写在 a 的右下方的角码 1, 2, 3, ……, n, ……是表示该项的号数，叫做**下标**(Suffix). 象数列②那样的表示法，在项与项之间必须添上“, ”号.

还可以用数列的通项表示数列，记作

$$\{a_n\}$$

有穷数列和无穷数列

在数列中，项数有限的数列叫做**有穷数列**，它的最后一项叫**末项**. 项数无限的数列叫**无穷数列**. 象①，②那样表示无穷数列时，可写出它的前几项，并在后面写出“……”.

虽说数列是按照某种规律排列着的一列数，可是，实际上给出数列时，规律的给法也是多种多样的. 并且有的规律有时不能简单地表示出来. 下面，我们将就各种情况来进行探讨.

给出数列的方法(其1)

第 1: 把全班学生的身高，按名册的顺序排列起来；或者，如铁路客运量(用人、公里作单位)的逐月统计表这类的问题，要问某个号数应该对应着什么数，想找出它的规律是有困难的.

给出数列的方法(其2)

第 2: 只给出数列的前几项，再在后面写上“……”(表示后面同样继续下去). 例如

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots③$$

$$5, \frac{7}{2}, 2, \frac{1}{2}, \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots④$$

$$-1, 2, -4, 8, \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots⑤$$

找数列规律的方法

上面这几个例子，都没有给出数列的规律，所以需要从已给出的几个项来发现数列的规律. 象数列③那样，能明显地看出它的规律时固然很好，否则，可采取下列的作法.

(i) 逐次地取出某一项和它前一项的差加以观察.

对数列④，取它们的差，就得到

$$\frac{7}{2}-5=-\frac{3}{2}, 2-\frac{7}{2}=-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$$

它们的差都是$-\frac{3}{2}$，由此可知，这个数列是由首项 5，并在 5 上逐次地加上$-\frac{3}{2}$所得的数作成的.

(ii) 逐次地取出某一项和它前一项的比加以观察.

对数列⑤，取它们的比，就得到

$$\frac{2}{-1}=-2, \frac{-4}{2}=-2, \frac{8}{-4}=-2$$

它们的比都是-2，由此可知，这个数列是由首项-1，并逐次地乘以-2所得的数作成的.

但是，对于这种情形，严格说，只给出了数列的前几项，还不能说已经知道了这个数列的

规律. 例如, 数列⑤, 它是否为

$$-1, 2, -4, 8, -1, 2, -4, 8, -1, 2, \cdots\cdots$$

中的若干项反复重复出现的数列, 我们无法保证它不能这样.

可是, 一般地, 都把它后面的"……"部分, 也解释为按照开头几项所具有的规律继续下去的.

给出数列的方法(其3)

第 3: 用含有n的式子给出通项(第 n 项). 例如

第 n 项是 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$的数列

第 n 项是 $a_n=-\dfrac{3}{2}n+\dfrac{13}{2}$的数列

第 n 项是 $a_n=(-1)^n 2^{n-1}$ 的数列

这时, 依次用自然数 1, 2, 3, 4, ……代替通项 a_n 里的 n, 就能得出数列的各项.

例如, $a_n=(-1)^n\cdot 2^{n-1}$

当 $n=1$, $a_1=(-1)^1 2^0=-1$

当 $n=2$, $a_2=(-1)^2 2^1=2$

当 $n=3$, $a_3=(-1)^3 2^2=-4$

当 $n=4$, $a_4=(-1)^4 2^3=8$

…………………………

给出数列的方法(其4)

第 4: 给出数列的相邻两项之间的关系式.

这时, 如果知道了首项, 就能依次地求出数列的每一项. 并且, 由给出的关系式, 一般地,