斐波那契——卢卡斯序列及其应用

●周持中著

FIBONACCI——LUCAS

●湖南科学技术出版社

斐波那契——卢卡斯序列及其应用

●周持中著

●湖南科学技术出版社

FIBONACCI—LUCAS

湘新登字 004 号

内 容 简 介

本书全面系统地研究了斐波那契—卢卡斯序列的理论，主要内容包括：F—L 序列的各种表示方法，有关 F—L 数的恒等式，同余关系与模周期性，整除性与可除性序列，F—L 伪素数，值分布和对模的剩余分布，还专辟两章分别介绍了 F—L 序列在不定方程中的应用以及在数的表示中的应用，此外还介绍了在素性检验及其他方面的一些应用．

本书可作为从事数论、组合论及相关问题研究的科学工作者、相关专业的大学生和研究生的参考书，也可作为高中数学教师的参考读物．

斐波那契——卢卡斯序列及其应用
周持中　著
责任编辑：陈一心
*
湖南科学技术出版社出版发行
（长沙市展览馆路 3 号）
湖南省新华书店经销
长沙市黎托印刷厂印刷
（印装质量问题请直接与本厂联系）

1993 年 12 月第 1 版第 1 次印刷
开本：850×1168　毫米：1/32　印张：13.25　字数：339000
ISBN　7—5357—1499—4
O·121　　定价：15.00 元

序　言

1202 年，意大利数学家斐波那契(Fibonacci)在他的重要著作《算盘书》中有这样的问题：由一对兔子开始，一年后可以繁殖成多少对兔子？于是，引出下面的整数序列：

$$F_0=0,F_1=1,F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,n\geqslant 0, \tag{1}$$

如今，人们就把(1)叫做斐波那契序列，(1)中的数叫做斐波那契数.

19 世纪，法国数学家卢卡斯(Lucas)研究了整数序列

$$L_0=2,L_1=1,L_{n+2}=L_{n+1}+L_n,n\geqslant 0, \tag{2}$$

人们把(2)叫做卢卡斯序列.

更一般的，设 α,β 是整系数二次方程

$$x^2-Px+Q=0$$

的二个根，其中整数 P、Q 满足$(P,Q)=1$(即 P、Q 互素)，由此，可产生整数序列

$$u_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},n\geqslant 0, \tag{3}$$

和

$$v_n=\alpha^n+\beta^n,n\geqslant 0, \tag{4}$$

通常，我们又把(3)和(4)统称为卢卡斯序列. 如果取 $P=1,Q=-1$，则 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，此时，序列(3)和(4)分别给出序列(1)和(2).

斐波那契序列和卢卡斯序列有许多美妙的数论性质和一些极有意义的应用. 众所周知，斐波那契数和"优选法"关系密切；由斐波那契数的性质可以证明：用欧几里得辗转相除法求二个正整数

m 和 $n(m>n)$ 的最大公因数时，其除法次数不超过 n 的位数的 5 倍，等等. 正因为如此，这些序列引起了众多数学家和数学爱好者的浓厚兴趣. 国际上，这方面的研究和探讨十分活跃. 在美国，出版了专门刊物:《*Fibonacci Quarterly*》，此刊物于 1963 年创刊，已出 31 卷. 从 1984 年起，又每隔二年召开一次斐波那契数及其应用的国际会议(*International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications*)，至今已举办了五届，吸引了世界各地许多数学工作者前往参加.

30 年前，柯召先生和我，曾证明 Fibonacci 平方数仅有 1 和 144；令人高兴的是，近几年来，有一些年轻同志在这方面的研究工作中取得了可喜的成果. 但总的来说，国内的研究成果不多. 至于这方面的著作，国内所见更少，在我的印象中，最早的一种，那是在 1954 年，中国青年出版社出过一本由高彻翻译的小册子:《斐波那契数》(伏洛别也夫著). 鉴于此，本书的出版，就显得十分必要了. 作为一本专门介绍斐波那契序列和卢卡斯序列的著作，本书内容全面、系统、丰富，并有一定深度，除了讲述序列的基本性质和定理外，还介绍了许多近代研究成果，特别是介绍了序列在素性判定和不定方程中的应用. 可以看出，作者为此付出了大量艰辛的劳动. 我相信，这本书的出版，将有助于激发广大读者对数学的兴趣，对于有关专业的大学生和研究生，以及从事数论、组合数学、最优设计、计算机科学等方面教学与科研工作的读者，也会有所帮助和启迪.

孙琦

1993 年 12 月于成都

前　言

常系数线性齐次递归序列，在组合学中是作为一种组合计数的工具被研究的. 然而，它的许多美妙的数论性质早已引起人们的注意. 在许多场合（特别是在作为数论研究对象的场合），这种序列常与斐波那契或卢卡斯的名字联系起来，盖因这种序列渊沅于1202 年意大利数学家斐波那契(Leonard Fibonacci)所提的有趣的“兔子问题”，而到 19 世纪，法国数学家卢卡斯(Edouard Lucas)系统地研究了两类整数序列的数论性质，它们属于二阶常系数线性齐次递归序列. 进入本世纪以来，特别是 60 年代以来，人们对这种序列的兴趣迅速增长，以至这种序列已逐步形成数论中的一个专题. 随着研究工作的进展，斐波那契和卢卡斯的名字也逐步与高阶的或非整数的线性递归序列挂上了钩. 基于上述原因，本书统一称各种常系数线性齐次递归序列为斐波那契—卢卡斯序列，简称 F—L 序列，称序列中每一项为一个 F—L 数.

F—L 序列自问世以来，不断显示出它在理论上和应用上的重要作用. 今天，F—L 序列几乎渗透到了数学的各个分支，如数论，代数，组合与图论，计算机科学，微分、差分方程，数值分析，运筹学，概率统计，函数论，几何学，等等. 此外，在生物学、物理学、化学以及电力工程等方面，F—L 数也有许多用途. 这里特别指出，从数论的角度对 F—L 数进行研究，进展较快，这方面的成果也颇多. 卢卡斯和莱梅(Lehmer)先后利用 F—L 数给出了梅森(Mersenne)数 2^p-1 为素数的判据. F—L 数的一些性质被用于大整数分解和求解不定方程. 对 F—L 数的数型研究，解决了某些高次不定方程的求解问题. 1970 年，俄罗斯数学家马季亚谢维奇(Matijasevič)运

用斐波那契数的整除性成功地解决了著名的希尔伯特(Hilbert)第十问题.数的 F—L 表示为 F—L 数的应用进一步开辟了途径.近些年来,对 F—L 伪素数的研究成了计算数论中一个非常活跃的课题,这在素性检验和现代密码学等方面均有其应用.

国际上对于 F—L 序列的研究正方兴未艾,研究工作者的队伍越来越大,发表论文的数量逐年增多,问题的深度和难度亦日新月异.有两件大事特别引人注目,一件是 1963 年,Hoggatt 和他的同行们在美国创立了斐波那契协会并开始出版斐波那契季刊(*Fibonacci Quarterly*).另一件是自 1984 年以来召开了五次斐波那契数及其应用的国际会议并出版了论文集.所有这些,既显示了各国学者们对研究 F—L 序列这一课题的极大热情,又促进了对这一课题研究范围的扩大和研究工作的深入.

在我国,柯召先生和孙琦先生对 F—L 序列的研究做过出色的工作,徐利治先生的研究工作中也涉及过 F—L 序列.近年来,对 F—L 序列感兴趣的人越来越多,关于 F—L 序列的研究论文和普及读物也常见于各种层次的书刊.但作者认为,总的说来我国对 F—L 序列的研究还跟不上国际上蓬勃发展的形势.

作者多年来对 F—L 序列的研究颇感兴趣.我们不仅十分关注国际上研究工作的进展,并且对其中若干问题的研究亦有所得.目前国内这方面的参考资料很少,一些对 F—L 序列感兴趣者不了解对 F—L 序列研究的主要内容和进展情况,研究工作存在一定困难或走了弯路.作者有感于此,遂萌生了为对 F—L 序列感兴趣者和有志于 F—L 序列的研究者提供一本专著的想法.这就是本书的缘起.我们试图在本书中全面系统地介绍对 F—L 序列研究的主要课题,概括国内外的新近成果,其中也包括我们自己的成果,并反映国际上的研究动态.我们希望这样能对我国在 F—L 序列的研究方面有所促进.

下面谈谈本书的结构与主要内容.在第一章我们建立了 F—L 序列的各种表示法,其中多值数环是我们试引入的新概念,矩阵表示法过去已出现,但尚不够成熟,我们进行了一些完善和深化工

作. 这些表示法为我们研究 F—L 序列提供了有效的工具，同时也使我们对一些传统内容能够进行简单处理或者作出推广. 在第二章，我们新建立了高阶 F—L 序列一系列恒等式. 对于二阶 F—L 序列，我们较全面地总结或推广了已有的恒等式，新建立了若干恒等式. 在建立恒等式的过程中，体现了不同于以往的一些较为简便的方法. 前两章可以说主要是提供研究工具. 从第三章到第六章则主要是研究 F—L 数的数论性质. 第三章研究同余性质和模周期性，第四章研究整除性，这些是最基本的数论性质，所以这两章又是第五、六两章的基础. 在研究模周期性和整除性时，我们把二阶 F—L 序列的模 m 约束周期和整数 m 在二阶 F—L 序列中的出现秩这两个概念推广到了高阶情形，并得出了一些相应的结果. 我们介绍了用特征根、矩阵、特征多项式研究同余性及模周期性的各种方法和主要结果，还介绍了与整除性相关的内容，即 F—L 数的本原因子，可除性序列和强可除性序列，Lehmer 序列以及在素性判定中的应用等. 第五章介绍了各种 F—L 伪素数的定义，性质，存在性与分布问题以及它们在素性检验中的应用. 这章涉及的内容是当前正在深入研究和不断向前发展的课题. 在第六章我们研究了 F—L 序列的单值性，零类分布与任意值分布，两序列的公共值，对模的剩余分布等问题，特别对于对模的一致分布作了较详尽地讨论，第七章主要介绍 F—L 序列在不定方程中的应用，同时也涉及到研究不定方程中常用的一些方法. 本章从阐述 F—L 序列与不定方程的关系入手，然后介绍了几种初等方法，简要介绍了 p —adic 方法，超几何级数方法和 Baker 有效方法，介绍了对一些典型不定方程研究的主要结果. 第八章介绍了 F—L 数在数的表示中的应用，同时介绍了 F—L 整数的舍入函数表示以及 Stolarsky 数阵. 这些内容，与实际应用有较紧密的联系. 从逻辑顺序看，前四章有先后依赖关系，后四章则基本上是相互独立的.

我们撰写本书时的立足点是，假定读者已具备相当的分析、代数和数论知识及初步的组合论知识. 在此条件下，为方便读者，本书尽量做到自我封闭. 除了显然的、读者已知的或常见参考书中已

有的结论以及个别特殊情况外，本书中的引理或定理均给出了证明. 有些涉及知识面过多或证明过程过长的定理，我们就只介绍其结果，而不作正式定理列出.

F—L 序列所涉及的面很广，有些内容也很深. 由于篇幅所限，我们在选材时不得不有所取舍. 比如，关于 F—L 数的数型，虽在第七章中有所涉及，但还有大量丰富的内容不可能详细讨论到. 对于 F—L 序列的各种推广（非齐次序列，多元序列，带实数下标或矩阵下标的序列，各种 F—L 多项式等等）则不能涉及. 关于 F—L 序列的应用，除了第七、八章的专门内容以及穿插在前面相关章节的内容外，还有许多很有价值的内容也只好割爱. 但是，对于 F—L 序列最主要的内容我们都基本上涉及到了.

值得提出的是，本书还有两位撰稿人，他们为本书合写了第七章. 一位撰稿人是肖果能，他从本书构思和制订写作计划起就投入了工作，审阅了第一章样稿并参与了其中第一、二节的修改工作. 后虽其他工作任务较多，但始终关心和支持本书的撰写工作，仍挤时间完成了第七章第一至二节的书稿. 另一位撰稿人是袁平之，完成了第七章第三至七节书稿，其中有些内容是他本人的成果. 袁平之还对全部书稿进行了较仔细阅读，提出了一些宝贵意见. 所以，肖、袁两位对本书的出版贡献都是很大的.

在本书出版之际，我要衷心感谢潭彬生、周平阶、漆召光、刘新整等同志，他们始终热情地关心和支持本书的撰写工作，为我们提供了许多有利条件. 另外，我还要感谢周敢和谭莉热心而又有益的帮助.

对于湖南科技出版社陈一心编辑的热情帮助和认真细致的工作表示由衷感谢.

由于时间仓促，水平有限，本书疏漏之处在所难免，恳请读者不吝赐教，批评指正.

周持中

1993 年 12 月

目 录

第一章　k 阶 F—L 序列

本章我们首先给出广泛意义下的 F－L 序列的概念，建立 F－L 序列的几种表示法，即特征根表示法、特征多项式表示法、矩阵表示法和母函数表示法. 在特征根表示法中，我们试引入了多值数环的概念，这是我们新近建立的一种研究 F－L 序列的方法. 然后我们介绍关于 F－L 序列的两个基本问题，即通项与求和公式问题及周期性问题. 本章所讨论的内容是进一步研究 F－L 序列的基础.

§1.1　F－L 序列空间

1.1.1　F－L 序列空间

由常系数齐次线性递归关系

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+\cdots+a_ku_n(a_k\neq 0,n\geqslant 0)\qquad(1.1.1)$$

和初始条件

$$u_0=c_0,u_1=c_1,\cdots,u_{k-1}=c_{k-1}\qquad(1.1.2)$$

确定的序列

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(c_0,c_1,\cdots,c_{k-1})=\{u_n\}_0^{\infty}=\{u_n(c_0,c_1,\cdots,c_{k-1})\}_0^{\infty},\qquad(1.1.3)$$

其中的 $a_1,\cdots,a_k,c_0,\cdots c_{k-1}$ 在数域 F 中取值，称为数域 F 上的 k 阶**斐波那契—卢卡斯序列**，简称 k 阶 **F－L 序列**. 序列中的每一项称为一个 F－L **数**.

注意：(1.1.3)中黑体 $\mathbf{u}$ 表示整个序列，非黑体的 u_n 表序列的第 n 项，$c_0,\cdots,c_{k-1}$ 表示序列的初始值，需要分清.

我们还指出，这里虽然是在数域之中研究 F—L 序列，但所用

的方法及所得的结果,除了与域的特征有关的情形外,对有限域也是适用的,因而对一般域也是适用的.

适合递归关系(1.1.1)的F－L序列的集合记为$\Omega=\Omega(a_1,\cdots,a_k)$.

我们把Ω中的每个序列$\mathbf{u}=(u_0,u_1,\cdots,u_n,\cdots)$看作一个无穷维向量,则由递归关系(1.1.1)的线性性和齐次性可知,当$\mathbf{u},\mathbf{v}\in\Omega$时,$\mathbf{u}+\mathbf{v}\in\Omega$;当$\mathbf{u}\in\Omega,\lambda\in F$时,$\lambda\mathbf{u}\in\Omega$.因此$\Omega$构成$F$上的无穷维向量空间的一个子空间,称为由(1.1.1)确定的k阶**F－L序列空间**.作映射$\varphi:\Omega(a_1,\cdots,a_k)\to F^k$,对每个$\mathbf{u}(c_0,c_1,\cdots,c_{k-1})\in\Omega$,令

$$\mathbf{u}(c_0,c_1,\cdots,c_{k-1})\to(c_0,c_1,\cdots,c_{k-1}),\tag{1.1.4}$$

则易知φ为同构映射,因而Ω为无穷维向量空间的一个k维线性子空间.在Ω中取如下的k个序列

$$\begin{cases}\mathbf{u}^{(0)}=\mathbf{u}(1,0,0,\cdots,0,0),\\ \mathbf{u}^{(1)}=\mathbf{u}(0,1,0,\cdots,0,0),\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \mathbf{u}^{(k-1)}=\mathbf{u}(0,0,0,\cdots,0,1),\end{cases}\tag{1.1.5}$$

则由(1.1.4)可知$\mathbf{u}^{(0)},\mathbf{u}^{(1)},\cdots,\mathbf{u}^{(k-1)}$线性无关,并且组成$\Omega$的一个基,称之为$\Omega$中的**基本序列**.这样,我们有

引理 1.1.1 Ω中的任一序列$\mathbf{u}(c_0,c_1,\cdots,c_{k-1})$均可由其基本序列$\mathbf{u}^{(0)},\mathbf{u}^{(1)},\mathbf{u}^{(k-1)}$唯一地表示为

$$\mathbf{u}=c_0\mathbf{u}^{(0)}+c_1\mathbf{u}^{(1)}+\cdots+c_{k-1}\mathbf{u}^{(k-1)}.\tag{1.1.6}$$

上式在应用中常写成关于序列的项的恒等式,即

$$u_n=c_0u_n^{(0)}+c_1u_n^{(1)}+\cdots+c_{k-1}u_n^{(k-1)}.\tag{1.1.6$'$}$$

1.1.2 序列的拓展与移位

由(1.1.1)我们有

$$u_n=(u_{n+k}-a_1u_{n+k-1}-\cdots-a_{k-1}u_{n+1})/a_k\quad(n\geqslant0).\tag{1.1.7}$$

但当$n=-1$时,(1.1.7)的右端有意义,我们以之定义u_{-1};依此类推,可定义一切$u_{-n}(n>0)$.因此,对每个$\{u_n\}_0^{+\infty}\in\Omega$,我们可按(1.1.7)拓展成为$\{u_n\}_{-\infty}^{+\infty}$.今后若无特别申明,我们都是研究拓展