第二版

数理化自学丛书

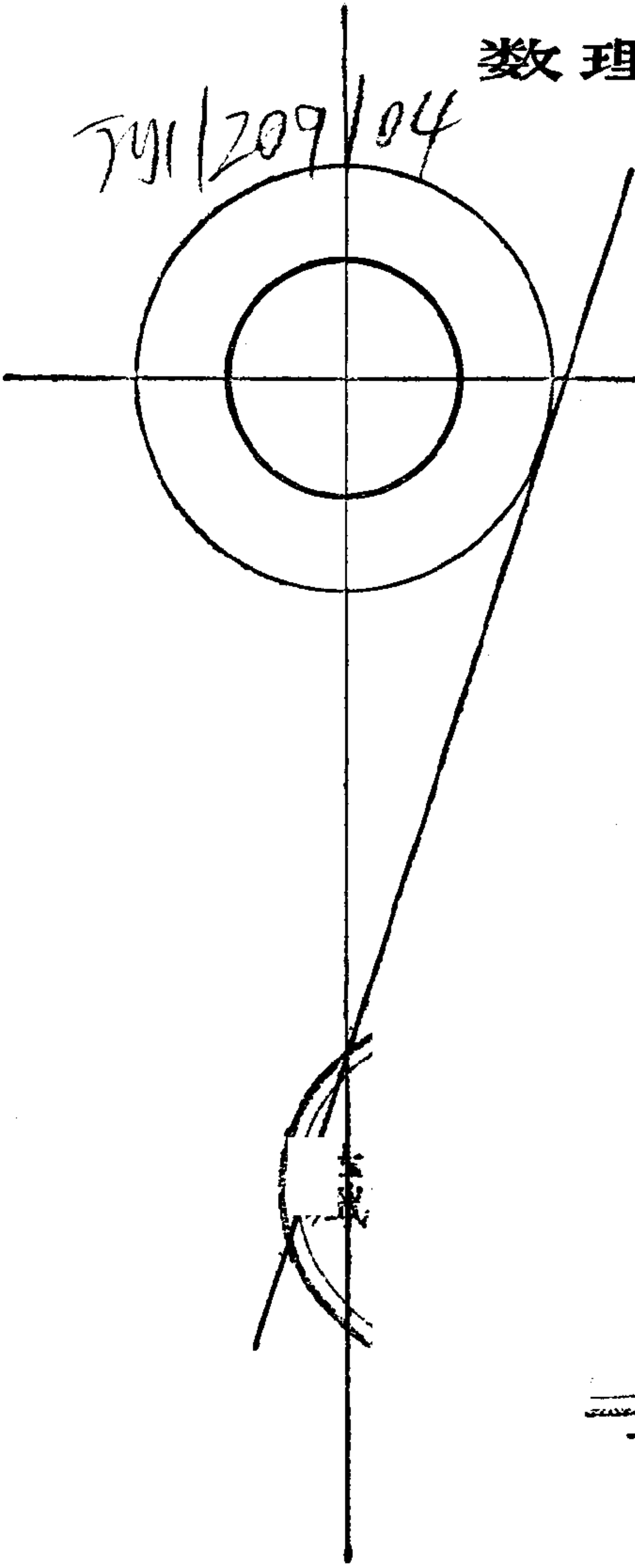
平面三角

姚剑初编

上海科学技术出版社

数理化自学丛书

第二版



平面三角

姚剑初 编

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书中的一本(原书名为《三角》)，介绍中学三角课程的全部内容，只要具备平面几何和代数的初步知识即可阅读。本书叙述浅显易懂，对关键性问题讲解得特别详细，对于不易理解的内容，适当分散、逐步深入。书中附有大量习题可作为练习。

本书可供青年工人、知识青年、在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师参考。

数理化自学丛书

第二版

平 面 三 角

原名《三角》

姚剑初 编

数理化自学丛书编委会审定

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

安徽省新华书店发行　安徽新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10.75 字数 262,000

1963年10月第1版 1982年8月第2版 1982年8月第10次印刷

印数 687,001—893,000

统一书号：13119·532　定价：(科二)0.74元

第二版出版说明

《数理化自学丛书》第二版是在第一版的基础上编写而成的．考虑到我社已出版大学数、理、化自学丛书，中学数学中的微积分内容没有另编分册．第二版仍包括《代数》四册、《平面几何》两册、《平面三角》、《立体几何》、《平面解析几何》、《物理》四册和《化学》四册，共十七册．

由黄丹蘐、杨荣祥、余元希、杨逢挺、桂君协等同志主编的第一版，自 1963 年陆续出版后，受到广大读者的欢迎．特别是 1977 年重排、重印以来，受到社会各方面极为广泛的关注，在广大读者中有了相当的影响．许多在职职工、农村青年和在校学生，自学了这套书以后，数理化知识水平有了一定的提高．

第二版由杨荣祥、余元希、束世杰、季文德等同志主编，数理化自学丛书编委会审定．它保留了第一版在编写上"详尽在先、概括在后、通俗到底"和"便于自学、无师自通"的特色，仍是一套与现行中学课本并行的自学读物．第二版仍从读者的实际情况出发，按传统的教学体系编写．但这次参照新的试行教学大纲的要求，与第一版相比，数学各分册的编写内容作了适当的增删和调整，基础知识和运算技能的训练有了进一步加强；物理各分册在内容的取舍、习题的更新、插图的选配、实验的描述等方面均有较大的改进；化学各分册还增加了反映现代科学技术水平的基础理论知识，在理论和实践相结合的原则下，内容和体系均有新的特色．此外，各册的例题和习题选配得力求恰当、合理，知识

论述力求通俗、严密；并按章增加了测验题．在各册编者的话中，还有供读者自学时参考的指导性意见．

自学要有成就，必须刻苦勤奋、踏实认真、持之以恒、知难而进．刻苦自学、学有成就者不乏其人，愿广大读者努力学好．

《数理化自学丛书》出版以来，全国各地的读者给以热情的鼓励和有力的支持，特在此表示衷心感谢．

上海科学技术出版社

编 者 的 话

本书原名«三角»，第二版改为«平面三角»．在第二版中，三角函数的引进采用从特殊到一般的方法，先介绍锐角的三角函数，然后讲任意角的三角函数．实践证明，这是一种适于自学特点的行之有效的教材处理方法．

编写系统方面，除了在讲过锐角的三角函数之后讲解直角三角形的解法以外，还将斜三角形的解法提前安排在任意角的三角函数一章之后．其目的是让读者及早应用所学到的知识，解决有关的实际问题．另外，还将理论性较强的三角函数的性质和图象一章移到了后面．这样，读者学完前四章，就基本上具备初中所应掌握的三角知识．

本书内容除很少一部分(如正切定理，半角定理等)超出现行中学数学教学大纲的要求以外，其他都在中学数学学习范围之内．但本书的体例与一般课本不同；每节解决的问题，限于较小的范围，这对于读者自学可能会有一定的帮助．

本书提供的练习分为习题、复习题和测验题三种．每节之后有习题；每章之后有复习题和测验题；全书最后还附有总复习题和总测验题．第二版增加了相当数量的题目．习题和测验题可以用来检验读者对基础知识的掌握程度和基本技能的训练水平．复习题在培养读者综合运用基础知识，提高分析解题能力方面的要求较高．复习题分为 A，B 两组．一般地说，复习题比习题的难度略高；复习题中，B 组比 A 组的难度更高．读者可根据自己的水平，选作力所

能及的部分，逐步解答难度较高的题目．书末附有答案，可供演算后核对．但读者应在确信自己的解答没有疏漏的情况下再查看答案．

学习本书时，在几何方面，要具有全等三角形和相似三角形的一般知识；在代数方面，要能解一元一次方程及一元一次不等式．自学读者在学习本丛书代数第二册和平面几何第二册的同时，即可开始阅读本书的开头几章．以后随着代数和几何知识的逐步增进，继续学习后面各章．

编者相信，坚持自学的读者，如果能始终做到边读边解答练习，那就一定能顺利地学完全书，在掌握三角知识方面，达到普通中学高中毕业生应有的水平．

编　者

1980年春

目　录

1

锐角的三角函数

§1·1 锐角的三角函数的定义

从平面几何学中，我们知道：

在直角三角形中，如果一个锐角等于30°，那末这个锐角所对的直角边等于斜边的一半．换句话说，也就是，30°的角所对的直角边和斜边的比等于$\frac{1}{2}$．这个性质同三角形的大小是没有关系的．

三角学首先要研究这样的问题：如果直角三角形的锐角不是30°，而是任何其他的锐角，它的对边和斜边的比是不是也有确定的值呢？

我们来看图1·1．在这个图中，我们看到，以A为端点的两条射线AD和AE组成了一个锐角．如果从AD上任意的点B，B'，B''，…作AE的垂线BC，$B'C'$，$B''C''$，…，那末，就得到一连串的直角三角形ABC，$AB'C'$，$AB''C''$，等等．因为这些直角三角形有一个公共角A，所以它们是相似的．

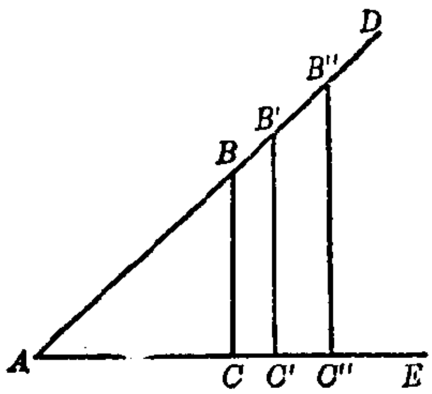


图 1·1

相似三角形对应边的比是相等的，所以在直角三角形ABC和$AB'C'$中，就有

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{AB'},$$

因而 $$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}.$$

同样可以知道

$$\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}.$$

因此， $$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\cdots\cdots.$$

就是，在所有的直角三角形中，$\angle A$ 的对边和斜边的比都是相等的. 换句话说，只要 $\angle A$ 的大小确定，那末，在用它做一个锐角画出的直角三角形中，$\angle A$ 的对边和斜边的比就是一个确定的数.

当某一个量确定的时候，和它有关的另一个量如果有一个确定的值和它对应. 那末，我们就把第二个量叫做第一个量的**函数**.

例如，当正方形的边长 a 有确定的值的时候，正方形的面积 a^2 就完全确定了. 这里正方形的边长是一个量，正方形的面积是另一个量. 我们说，正方形的面积是边长 a 的函数.

又如，假定圆的直径用 d 表示，那末圆的周长就等于 πd. 这里，圆的直径是一个量，圆的周长是另一个量. 因为当圆的直径有确定的值的时候，圆的周长也就确定，所以我们说，圆的周长是直径 d 的函数.

同样，在图 1·1 中，$\angle A$ 是一个量；当这个量有确定的值的时候，在用它做锐角所画出的直角三角形中，也有一个量跟着确定了. 这个量就是上面所说的对边和斜边的比. 因此我们可以说，在直角三角形 ABC 中，$\angle A$ 的对边和斜边的比 $\frac{BC}{AB}$ 是 $\angle A$ 的函数.

我们要注意，正方形的面积可以根据边长 a 计算出来；圆的周长也可以根据直径 d 计算出来. 所以看到算式 a^2，

就知道它是 a 的函数；看到算式 πd，也就知道它是 d 的函数．但是 $\frac{BC}{AB}$ 却不能简单地用一个算式根据 $\angle A$ 的度数计算出来．为了要说明 $\frac{BC}{AB}$ 是 $\angle A$ 的函数，我们应用一个专门的记号"$\sin A$"来表示．记号"$\sin A$"读做"$\angle A$ 的正弦"．

以后看到"$\sin A$"这个记号，就应当联想到它表示：在以 $\angle A$ 为锐角的直角三角形中，$\angle A$ 的对边和斜边的比，就是

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}.$$

为了方便，我们通常用 C 表示直角三角形 ABC 的直角，并且用小写字母 a 表示 $\angle A$ 的对边，b 表示 $\angle B$ 的对边，c 表示斜边(图 1·2)．这样就有

$$\sin A=\frac{a}{c}.$$

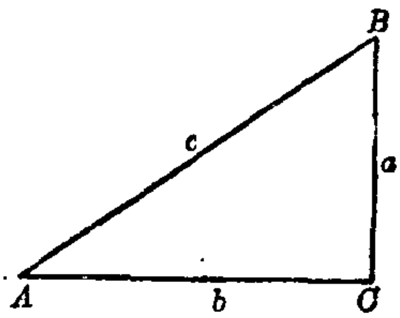


图 1·2

一个直角三角形有三条边，任意取两条可以组成六个不同的比．它们是

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ \frac{a}{b},\ \frac{b}{a},\ \frac{c}{b},\ \frac{c}{a}.$$

大家很容易想到，不但 $\frac{a}{c}$ 跟着 $\angle A$ 的大小而确定，其他五个比一定也是跟着 $\angle A$ 的大小而确定的．

第一个比 $\frac{a}{c}$ 已经把它叫做 $\angle A$ 的正弦了．其他五个比也都是 $\angle A$ 的函数．我们都给它们规定一个名称．现在把所有六个函数的名称、定义和记号，一起列在下面的表里．

函数的名称	记　号①	定　　义
$\angle A$ 的正弦	$\sin A$	$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$
$\angle A$ 的余弦	$\cos A$	$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边②}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$
$\angle A$ 的正切	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{tg} A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\dfrac{a}{b}$
$\angle A$ 的余切	$\operatorname{ctg} A$	$\operatorname{ctg} A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}}=\dfrac{b}{a}$
$\angle A$ 的正割	$\sec A$	$\sec A=\dfrac{\text{斜边}}{\angle A\text{的邻边}}=\dfrac{c}{b}$
$\angle A$ 的余割	$\operatorname{cosec} A$	$\operatorname{cosec} A=\dfrac{\text{斜边}}{\angle A\text{的对边}}=\dfrac{c}{a}$

$\angle A$ 的所有这些函数，总起来叫做 $\angle A$ 的**三角函数**.

知道了锐角三角函数的定义以后，自然会引起下面的问题:已有了一个锐角,怎样算出它的三角函数值呢？我们举例说明如下:

例 1　求 35° 角的三角函数值.

[解]　用量角器作一个 35° 的角 A (图 1·3). 过 $\angle A$ 的一边上任取一点 B, 例如取 $AB=10$ 厘米, 向另一边作垂线 BC. 尽可能准确地量出直角三角形的其他两边的长, 得 $BC=5.7$ 厘米, $AC=8.2$ 厘米. 于是, 我们就可把测量和计算的结果写成下面的形式:

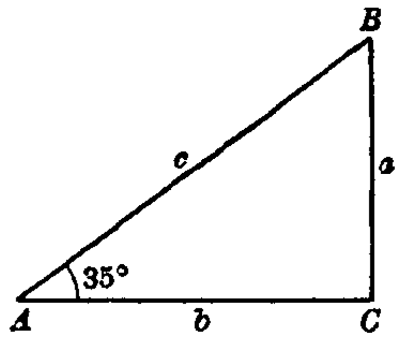


图 1·3

$$A=35^\circ,$$

$$a=5.7,\qquad b=8.2,\qquad c=10.$$

$$\sin 35^\circ=\frac{a}{c}=\frac{5.7}{10}=0.57,$$

① 表示 $\angle A$ 的正切、余切和余割的记号，有些书上分别写做 $\tan A$, $\cot A$, $\csc A$.

② 在直角三角形 ABC 里,锐角 A 夹在斜边 c 和直角边 b 之间. 直角边 b 可以简单叫做 $\angle A$ 的邻边.

$$\cos 35^\circ=\frac{b}{c}=\frac{8.2}{10}=0.82,$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ=\frac{a}{b}=\frac{5.7}{8.2}=0.70,$$

$$\operatorname{ctg} 35^\circ=\frac{b}{a}=\frac{8.2}{5.7}=1.4,$$

$$\sec 35^\circ=\frac{c}{b}=\frac{10}{8.2}=1.2,$$

$$\operatorname{cosec} 35^\circ=\frac{c}{a}=\frac{10}{5.7}=1.7.$$

因为我们量 a 和 b 的长，都只量出两个数字，所以根据它们算出来的结果，从第一个不是零的数字起，也只有开头两个数字是可以信任的，以下就四舍五入.

注　在画直角三角形的时候，取 $c=10$ 厘米，只是为了计算正弦和余弦的值可以方便一些. 我们也可以取其他的值.

例 2　在直角三角形 ABC 中，已知 $a=4$, $b=5$, 求 $\angle A$ 的正弦，余弦，正切和余切.

［解］　先根据几何学里的勾股定理算出

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}.$$

然后根据三角函数的定义，求得

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{4}{\sqrt{41}}=\frac{4}{41}\sqrt{41},$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{5}{\sqrt{41}}=\frac{5}{41}\sqrt{41},$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}=\frac{4}{5},$$

$$\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}=\frac{5}{4}.$$

习题 1·1

1. 求 50° 角的六个三角函数值.
2. 已知 $a=40$, $c=41$; 求 $\angle A$ 的六个三角函数值.
3. 已知 $a=5$, $b=12$; 求 $\angle A$ 的正弦，余弦，正切和余切. 当 $a=10$, $b=24$ 时，$\angle A$ 的这些三角函数值有没有变化？为什么？
4. 已知斜边 AB 等于直角边 AC 的三倍；求 $\angle A$ 的正弦，余弦，正切