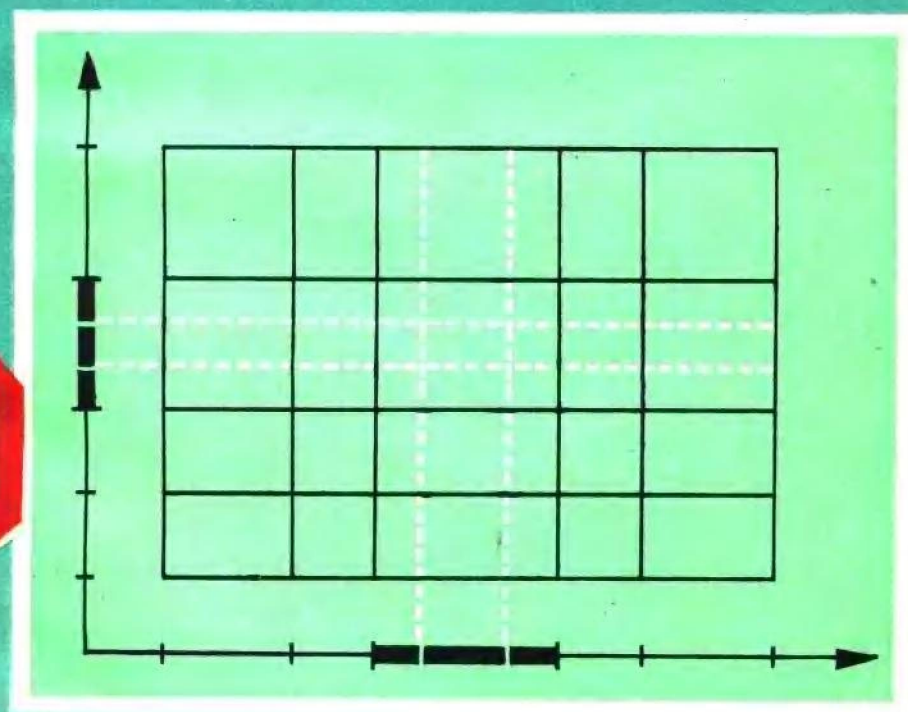


W. 托奇克著

实分析基础

第一卷

邓立生 译 雷 垣 校订



020768

实 分 析 基 础

第 一 卷

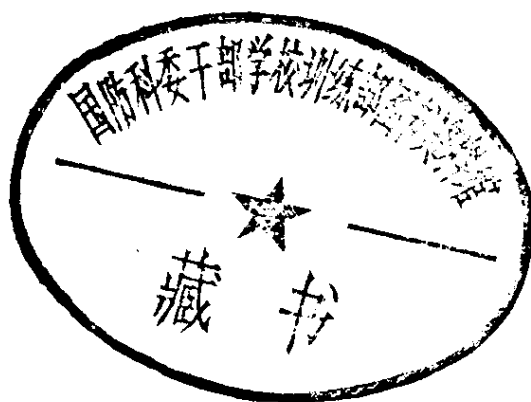
GF65/17

W. 托奇克 著

邓立生 译 雷 垣 校订



科工委学院802 2 0029478 2



人 民 教 育 出 版 社

内 容 提 要

本书为柏林大学与哈勒大学讲授微分学的讲义。主要内容有：欧氏空间，函数的极限值，紧致集合上的连续函数，微分法及其应用，幂级数；最后还附有习题解答。本书的特点是通过实一维的，实多维的与复一维的情形统一处理，以避免类似结果的重复。证论严谨，可作为理科数学专业的参考书。

实 分 析 基 础

第 一 卷

W. 托奇克 著

邓立生 译 雷 垣 校订

*

人 民 教 育 出 版 社 出 版

新华书店北京发行所发行

北京房山县印刷厂 印 装

*

开本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ 印张 7.5 字数 180,000

1979年10月第1版 1982年1月第2次印刷

印数 9,501—14,200

书号 13012·0395 定价 0.67 元

序

本书来源于我在柏林大学与哈勒大学讲授微分学的讲义。内容是按下列观点安排的：通过实一维的、实多维的与复一维的情形的统一处理，就可以避免类似结果的不必要的重复。于此一些很为一般的方法被置于突出的地位。例如只在论述了求解定理及随后的关于反函数的存在及其微分的命题以后，才引进自然对数函数（作为实指数函数的反函数）。由于这个原因，本书不仅适用于希望学习微分学的初学者，而且也适用于那些读者，他们已经掌握微分学的知识而希望读到指出理论之间联系的一个统一论述。为数甚多的例题与习题是为了使理解变得较为容易和鼓舞起学习进一步文献的兴趣。

我感谢出版社和印刷所对本书的精细的加工制作。主编 K. Maruhn 教授曾给我很为宝贵和重要的指示，为此我在这里谨向他表示谢意。最后还应该提到，由于听取了同学们对本书内容的反应，得到鼓舞，作者才将此稿定稿。

W. Tutschke

柏林/哈勒，于 1970 年春

目 录

引言	1
1. 实数	6
1.1. 有理数	6
1.2. 收敛概念	12
1.3. 实数的定义和性质	19
1.4. 实数序列	26
2. 欧氏空间	37
2.1. k 维欧氏空间 R^k 的定义	37
2.2. R^k 中的序列	42
2.3. R^k 中的点集	44
2.4. 复数	58
3. 函数的极限值(极限)	68
3.1. 函数概念	68
3.2. 函数的极限概念	70
3.3. 关于具有极限的函数的命题	74
3.4. 连续函数	76
3.5. 连续函数的复合函数	79
4. 紧致集合上的连续函数	81
4.1. 像集的紧致性	81
4.2. 实值函数的上确界与下确界	82
4.3. 一致连续性	83
5. 微分法	86
5.1. 可微性与偏可微性概念	86
5.2. 相对极值(必要条件)	91
5.3. 复合函数的微分法	97
5.4. 高阶微商	106

6. 微分学的应用	112
6.1. 实值函数的近似法(近似计算)	112
6.2. 复值函数的近似法	122
6.3. 出现极值的充分条件	132
6.4. 单变量函数的极限运算	148
6.5. 单变量方程的解法	153
6.6. 多变量方程的解法	161
6.7. 多变量方程组的解法	168
6.8. 附加条件下的极值	180
7. 幂级数	192
7.1. 级数	192
7.2. 函数序列	199
7.3. 幂级数的收敛性	202
7.4. 幂级数的极限函数之全纯性	208
7.5. 指数函数	212
7.6. 三角函数	220
习题解答	232

引 言

I. 分析是数学的一个分支,在这分支里研究量之间的相依关系.通过这些关系的公式表示,自然界的和社会的大量规律得以表达(例如,对于一理想气体,它的压力由其温度及克分子体积所唯一确定;而在真空中,自由落体在时间 t 中所经过的路程 s ,则由公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 所给出,这里 g = 重力加速度).分析学的基础是微积分学.

分析在实际问题的应用中,在多数情况下要涉及数的确定.通常,要求的数 x 的精确给出或者是不可能的,或者从近似计算的角度来说也是不必要的.设

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

是 x 的诸近似值,若是对于所有充分大的 n , x_n 与 x 相差任意地小,则 x_n 构成收敛于 x 的一个序列(参阅 1.2.).在这种意义下,收敛于 x 的一个序列表示其近似值所成的一个序列.

序列概念的意义首先表现在:某些量(例如 $\sqrt{2}$)虽非是一个有理数,但它却可以由有理序列来逼近.例如, $\sqrt{2}$ 可以由序列

$$1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots$$

逐次更佳地逼近.所有可以由有理数任意逼近的非有理数的数,称为无理数.有理数与无理数统称作实数(参看 1.3.).

由 k 个实数 $x_1, \dots, x_k$ 所构成的数组,即所谓 k 数组 $(x_1, \dots, x_k)$,可以视作 k 维欧氏空间 R^k 中的点.这样的看法是有理由的,因为特别地可把一个实数 x 视作数轴 R^1 上的一个点.而借助于坐标系,数对(二数组) (x_1, x_2) 或三数组 (x_1, x_2, x_3) 可视为平面 R^2 或

空间 R^3 中的点. 在 2.3. 中将讨论 R^n 中的点集, 例如, 将引入聚点的概念: x_* 是集 M 的聚点, 如果在 M 中存在与 x_* 距离任意小的点 x ($x \neq x_*$).

第三章一开始就引入函数概念. 如果对于充分接近 x_* 的点 x , 函数值 $f(x)$ 与数 l 相差可任意地小, 则称该函数在点 x_* 具有极限 l (3.2.). 具有极限的函数因而是可以逼近的函数. 如果在点 x_* 处的极限 l 等于函数在点 x_* 处的函数值, 即 $l=f(x_*)$, 则称 f 在点 x_* 处连续 (3.4.). 特别重要的是定义于紧致集合上并且连续的(实值)函数(第4章, R^m 中一个集合 M 称作是紧致的, 如果 M 的每个聚点均属于 M 并且 M 又是有界的). 这样的函数恒具有最大的和最小的函数值.

为了确定使函数取得最大或最小函数值的点 x , 要引入微商的概念(第5章). 一个实变量 x 的实值函数 f 在点 x_* 的差商是由 $\frac{f(x)-f(x_*)}{x-x_*}$ ($x \neq x_*$) 所确定的函数. 如果这个差商在点 x_* 处具有极限, 则称函数 f 在点 x_* 处可微, 而该极限称为 f 在点 x_* 处的微商. 对于多变量 $x_1, \dots, x_k$ 的函数, 把

$$\frac{f(x_{*1}, \dots, x_{*i-1}, x_i, x_{*i+1}, \dots, x_{*k}) - f(x_{*1}, \dots, x_{*i-1}, x_{*i}, x_{*i+1}, \dots, x_{*k})}{x_i - x_{*i}}$$

的极限称为在点 $(x_{*1}, \dots, x_{*k})$ 处 f 关于 x_i 的偏微商.

在第六章(微分学的应用)主要是处理下列三个问题:

- a) 利用近似多项式作函数值的近似计算;
- b) 确定一实值函数取得极值的点;
- c) 解一个方程或一个方程组.

最后在第七章将讨论幂级数. 通过幂级数, 我们可定义非有理函数(例如指数函数、对数函数和三角函数). 由指数函数的所谓函数方程, 作为特例可以证明对数的规则、三角函数的加法定理

以及幂的规则.

II. 为了使行文简练, 将应用下列符号:

a) “对于所有”以 $\forall$ 表示. 于是像命题

“对于所有(实数) $x, x^2 \geq 0$ 成立.”

就可缩写为:

$$“x^2 \geq 0, \forall x.”$$

或者

$$“\forall x : x^2 \geq 0.”$$

(位于两点“:”后面的是, 对于所有 x 均成立的性质).

b) “存在”以 $\exists$ 表示.

例 命题

“存在一个 x , 使 $x^2 = 4$.”

于是可缩写为

$$“\exists x : x^2 = 4.”$$

(位于两点“:”后面的是, 至少能为一个 x 所适合的性质).

c) 如果能由语句 A 导出语句 B , 则称 B 是 A 的一个推论, 并且写作

$$A \implies B.$$

例 如果 A 是语句“ $x \geq 1$ ”, 而 B 是语句“ $x \geq 0$ ”, 则 $A \implies B$.

如果 $A \implies B$, 则称 A 是 B 的一个充分条件, 或者称 B 是 A 的一个必要条件 (因为 $A \implies B$ 表示: 如果 A 成立, 则 B 必定也成立).

d) 两个语句 A, B 称作是等价的, 如果 $A \implies B$ 和 $B \implies A$ 均成立. 对此我们也称

“恰好当 B 成立时 A 成立.”

或者

“ A 成立, 当且仅当 B 成立.”

或者

“ A 是 B 的必要与充分条件.”

用符号写作 $A \Longleftrightarrow B$.

例 二次方程

$$x^2 + px + q = 0$$

有解

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$$

是周知的. 由此我们有下列语句:

“至少存在方程 $x^2 + px + q = 0$ 的一个实根, 当且仅当 $p^2 - 4q \geq 0$ ”. 采用符号则写作:

$$(\exists x : x^2 + px + q = 0, x \text{ 为实数}) \Longleftrightarrow (p^2 - 4q \geq 0).$$

Ⅲ. 在数学中常常采用一个逻辑的一般方法, 即间接证法. 这个方法如下:

一个命题 A 可如下得到证明: 假设命题 A 是错误的, 则这个命题的否定(记作非 A)就是一个正确的命题. 于是, 由每个蕴含关系: 非 $A \implies B$ 也就得出一正确的命题 B . 这表明, 如果能够通过(正确的)推演由非 A 导出一错误的命题 B , 则非 A 自身必定是错误的, 这即是说, A 是正确的.

间接证法的实质在于: 由所陈述的命题的否定导致一个错误的命题.

例 设 A 为命题: 不存在有理数 $r = \frac{p}{q}$, p, q 为整数, 使得 $r^2 = 2$ (这表明 $\sqrt{2}$ 不是一有理数).

这命题的否定, 即非 A , 是:

“存在一有理数 $r = \frac{p}{q}$, 使得 $r^2 = 2$.” 于此可以假设 p 与 q 是互质的, 因为否则可以约去 p 与 q 的公因子.

现在由非 A 引出结果: $r^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$ 表示 $p^2 = 2q^2$. 这个等式指出, 2 是 p 的因子. 于是 $p = 2p'$, 于此 p' 也是一整数. 将这代入等式 $p^2 = 2q^2$, 则得 $4p'^2 = 2q^2$, 故 $q^2 = 2p'^2$. 然而这表明, 2 须是 q 的因子. 因为假设了 p 与 q 互质, 故 p 与 q 不可能均含因子 2. 因此, 由非 A 导出了一个错误的命题. 由此, A 必须是正确的, 即 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

1. 实数

1.1. 有理数

如果 r 是有理数, 则存在整数 p, q , 使得 $r = \frac{p}{q}$. 由此有

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff pq' = p'q.$$

对于有理数, 下列运算规律成立.

I. 加法规律

对任意二(有理)数 r_1, r_2 , 和 $r_1 + r_2$ 是唯一确定的, 且适合下列规律:

a) $r_1 + r_2 = r_2 + r_1, \forall r_1, \forall r_2$ (加法的交换律).

b) $(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3), \forall r_1, \forall r_2, \forall r_3$ (加法的结合律).

c) 存在一个关于加法的中性元素 0:

$$r + 0 = r, \forall r.$$

d) (对任意指定的 r) 方程 $r + x = 0$ 恒可解(解 x 称为 r 的关于加法的逆元素).

II. 乘法规律

对任意二(有理)数 r_1, r_2 , 乘积 $r_1 \cdot r_2$ 是唯一确定的, 且适合下列规律:

a) $r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1, \forall r_1, \forall r_2$ (乘法的交换律).

b) $(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3), \forall r_1, \forall r_2, \forall r_3$ (乘法的结合律).

c) 存在一个关于乘法的中性元素 1:

$$r \cdot 1 = r, \forall r.$$

d) 如果 $r \neq 0$, 则方程 $r \cdot x = 1$ 恒可解(解 x 称做 r 关于乘法的逆元素).

III. 分配律

$$(r_1 + r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3, \forall r_1, \forall r_2, \forall r_3.$$

特别, 自然数 $1, 2, \dots$ 均属有理数.

假设 M 是具有下列性质的自然数集合:

a) n_0 属于 M ,

b) 如果自然数 n 属于 M , 则 $n+1$ 也属于 M .

于是这集合 M 包含大于或等于 n_0 的所有自然数. 常可借助于自然数的这个性质, 来证明某些命题对于所有自然数 $n \geq n_0$ 是成立的.

定理 为了证明一命题对于所有自然数 $n \geq n_0$ 成立, 只要证明:

a) 该命题对于 $n = n_0$ 成立,

b) 若是该命题对于 n 成立, 则该命题对 $n+1$ 也成立(完全归纳法).

证明 设 M 是由所有使命题得以成立的自然数所成的集合. 由假设 a), n_0 属于集合 M . 如果对于自然数 n 所述命题是正确的, 则 n 属于 M . 根据假设 b), 于是 $n+1$ 也就属于 M . 因此, M 必定包含所有自然数 $n \geq n_0$, 也即命题对所有自然数 $n \geq n_0$ 成立. 证毕.

例 证明对所有自然数 n 有

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{v=1}^n v^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \quad (1)$$

证 a) 当 $n=1$ 时(1)成立, 因为

$$1^2 = 1 \quad \text{而} \quad \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{6} = 1.$$

b) 假设(1)对于自然数 n 成立, 也即有

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{v=1}^n v^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

于是

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + (n+1)^2 \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + n^2 + 2n + 1 \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1. \end{aligned}$$

在式(1)右边以 $n+1$ 代替 n , 得

$$\begin{aligned} &\frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} + \frac{n^2 + 2n + 1}{2} + \frac{n+1}{6} \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1. \end{aligned}$$

这说明公式(1)对于 $n+1$ 也成立. 因而根据上述定理, 公式(1)对于所有 n 成立.

二相异的(有理)数 r_1, r_2 中, 恒有一个大于另一个. 故有

或者 $r_1 < r_2$, 或者 $r_1 > r_2$.

形如 $r_1 < r_2$ 和 $r_1 > r_2$ 的关系称为不等式. 规定记法如下:

$$r_1 \leq r_2 \iff \text{或者 } r_1 < r_2, \text{ 或者 } r_1 = r_2.$$

$$r_1 \geq r_2 \iff \text{或者 } r_1 > r_2, \text{ 或者 } r_1 = r_2.$$

$$r_1 < r_2 < r_3 \iff r_1 < r_2, \text{ 同时 } r_2 < r_3, \text{ 等等.}$$

一个数 r 的正负号函数定义如下:

$$\text{sign } r = \begin{cases} +1, & \text{当 } r > 0; \\ 0, & \text{当 } r = 0; \\ -1, & \text{当 } r < 0 \end{cases}$$

数 $r \cdot \text{sign } r$ 称为 r 的绝对值, 记作 $|r|$. 于是有

$$r > 0 \implies |r| = r,$$

$$r = 0 \iff |r| = 0,$$

$$r < 0 \implies |r| = -r.$$

设 $r_1, \dots, r_n$ 是给定的 (不一定是互异的) 实数, 则 $\max(r_1, \dots, r_n)$ 表示这 n 个数中的这样一个数, 它大于或者等于这 n 个数中所有其余的数. 类似, $\min(r_1, \dots, r_n)$ 表示这 n 个数中的这样一个数, 它小于或者等于这 n 个数中所有其余的数¹⁾.

不等式的运算规则:

$$a) \quad r_1 < r_2, \quad r_2 < r_3 \implies r_1 < r_3.$$

$$b) \quad r_1 < r_2 \implies \forall r: r_1 + r < r_2 + r.$$

$$r_1 < r_2, \quad r_3 < r_4 \implies r_1 + r_3 < r_2 + r_4.$$

$$c) \quad r_1 < r_2, \quad r > 0 \implies r_1 r < r_2 r.$$

$$r_1 < r_2, \quad r < 0 \implies r_1 r > r_2 r.$$

$$0 < r_1 < r_2, \quad 0 < r_3 < r_4 \implies r_1 r_3 < r_2 r_4.$$

$$d) \quad 0 < r_1 < r_2 \implies \frac{1}{r_1} > \frac{1}{r_2}.$$

应用 对于所有自然数 $n = 1, 2, \dots$ 和所有 h (暂时假定为有理数), $h > -1$, 下式成立:

$$(1+h)^n \geq 1+n \cdot h.$$

证 (用完全归纳法).

a) 对于 $n=1$, $(1+h)^1 = 1+h$, 而 $1+n \cdot h = 1+1 \cdot h = 1+h$. 因此命题当 $n=1$ 时是正确的 (这时式中等号成立).

b) 假设命题对于 n 正确: $(1+h)^n \geq 1+nh$. 现在 $(1+h)^{n+1} = (1+h)^n \cdot (1+h)$; 由于 $h > -1$, 故 $1+h > 0$; 因而由 $(1+h)^n \geq$

1) 如果所有 r_j 相等, 则

$$\max(r_1, \dots, r_n) = \min(r_1, \dots, r_n) = r_j, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

$1+nh$ 得

$$(1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1+nh+h+nh^2.$$

由于 $h^2 \geq 0$, 从而 $nh^2 \geq 0$, 因此 $(1+nh)(1+h) \geq 1+(n+1)h$. 所以综上所述, 有 $(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h$. 这表明, 命题对于 $n+1$ 也是正确的.

绝对值的计算规则.

$$a) |r_1 \cdot r_2| = |r_1| \cdot |r_2|.$$

证明

1. 如果 $r_1 \geq 0$ 和 $r_2 \geq 0$, 则 $|r_1| = r_1, |r_2| = r_2, r_1 r_2 \geq 0$. 于是

$$|r_1 r_2| = r_1 r_2 = |r_1| \cdot |r_2|.$$

2. 如果 $r_1 \geq 0$ 并且 $r_2 < 0$, 则 $|r_1| = r_1, |r_2| = -r_2, r_1 r_2 \leq 0$.

于是

$$|r_1 r_2| = -r_1 r_2 = r_1 \cdot (-r_2) = |r_1| \cdot |r_2|.$$

3. 如果 $r_1 < 0$ 和 $r_2 < 0$, 则 $|r_1| = -r_1, |r_2| = -r_2, r_1 r_2 > 0$.

于是

$$|r_1 r_2| = r_1 r_2 = (-r_1) \cdot (-r_2) = |r_1| \cdot |r_2|. \text{ 证完.}$$

$$b) \left| \frac{r_1}{r_2} \right| = \frac{|r_1|}{|r_2|} \quad (\text{假定 } r_2 \neq 0).$$

这是因为, 令 $\frac{r_1}{r_2} = r$, 则 $r_1 = r \cdot r_2$, 故由 a) 有 $|r_1| = |r| \cdot |r_2|$.

$$c) |r_1 + r_2| \leq |r_1| + |r_2| \quad (\text{三角形不等式}).$$

证明 $|r_1 + r_2| = \pm(r_1 + r_2)^{1)}$. 现在, 我们有 $+r_j \leq |r_j|$ 与 $-r_j \leq |r_j|, j=1, 2$. 因此

$$|r_1 + r_2| \leq |r_1| + |r_2|.$$

$$d) |r_1 + r_2| \geq ||r_1| - |r_2||.$$

证明 因为 $r_1 = (r_1 + r_2) + (-r_2)$, 所以由 c) 有

1) 等式 $r = \pm r'$ 表示: $r = r'$ 或者 $r = -r'$.

$$|r_1| \leq |r_1 + r_2| + |-r_2| = |r_1 + r_2| + |r_2|,$$

由此而有

$$|r_1 + r_2| \geq |r_1| - |r_2|;$$

在上式中交换 r_1 和 r_2 , 则类似地得

$$|r_1 + r_2| = |r_2 + r_1| \geq |r_2| - |r_1|.$$

现在, $||r_1| - |r_2||$ 或者等于 $|r_1| - |r_2|$, 或者等于

$$-(|r_1| - |r_2|) = |r_2| - |r_1|.$$

因此在这两种情形均有

$$|r_1 + r_2| \geq ||r_1| - |r_2||.$$

应用 我们称 $|r_2 - r_1|$ 为二(有理)数 r_1 和 r_2 的“距离”, 并记作 $d(r_1, r_2)$.

距离之几何意义.

将 r_1, r_2 视作“数轴”上的二点, 则 r_1 和 r_2 的距离, 当 $r_1 < r_2$ 时等于 $r_2 - r_1$, 而当 $r_1 > r_2$ 时等于 $r_1 - r_2 = -(r_2 - r_1)$. 因此在两种情形下, 该二点的距离均为 $|r_2 - r_1|$.

距离的性质.

$$a) \quad d(r_1, r_2) \geq 0, \forall r_1, \forall r_2.$$

$$d(r_1, r_2) = 0 \iff r_1 = r_2.$$

这是因为 $|r_2 - r_1| \geq 0$, 并且当且仅当 $r_2 - r_1 = 0$ 时 $|r_2 - r_1| = 0$.

$$b) \quad d(r_1, r_2) = d(r_2, r_1).$$

这是因为 $|r_2 - r_1| = |(-1) \cdot (r_1 - r_2)| = |-1| \cdot |r_1 - r_2| = |r_1 - r_2|$.

c) 如果 r_3 是第三个数, 则下式成立:

$$d(r_1, r_2) \leq d(r_1, r_3) + d(r_3, r_2).$$

这可如下得到: 由于 $r_2 - r_1 = (r_3 - r_1) + (r_2 - r_3)$, 所以

$$|r_2 - r_1| \leq |r_3 - r_1| + |r_2 - r_3|. \quad \text{证完.}$$

现在, 设 r_0 是一给定的数.