概率论习题集

A·Я特罗高夫切夫　等著

上海翻译出版公司

概率论习题集

〔苏〕A. Я. 特罗高夫切夫等 著
何声武　汪振鹏　王静龙　梁小筠 译

上海翻译出版公司

内 容 简 介

《概率论习题集》共搜集了一千四百余道习题，包括随机事件、随机变量、随机事件序列、随机变量序列、最简单的马尔科夫过程、极限定理五大部分。数量多、内容丰富、难易度覆盖面宽，对较难的习题有答案、提示和解答，适合各类院校教学工作的需要。可作概率论教学的配套教材，也可供自学者参考。

А. Я. Дороговцев, Д. С. Сильвестров
А. В. Скороход, М. И. Ядренко
Теория Вероятностей Сборник Задач
Вища школа 1980

概 率 论 习 题 集
〔苏〕A. Я. 特罗高夫切夫等 著
何声武 汪振鹏 王静龙 梁小筠 译
上海翻译出版公司
(上海复兴中路 597 号)
新华书店上海发行所发行 商务印书馆上海印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32 印张 11.875 字数 343,280
1989 年 11 月第 1 版 1989 年 11 月第 1 次印刷
印数 1—6,000
ISBN 7-80514-270-X/O·76 定价: 6.60 元

译 者 序

一本好的习题集对教好、学好一门数学课能起重要的作用，由苏联 А. Я. Дороговцев、Д. С. Сильвестров、А. В. Скороход 和 М. И. Ядренко 等人编写的《概率论习题集》无疑是同类书籍中的一本佼佼者。该习题集共搜集了一千四百余道概率论习题，不仅习题的数量多，且习题难易度的覆盖面宽，使得数学专业和非数学专业的师生均可从中选到合适的习题，其中部分较深的习题还可供研究生选用。该习题集的每一章节前均有相应的内容提要，还以一定篇幅为部分较难的习题作了解答或提示，对广大的自学者更是难得的良师益友。

本书根据 1980 年出版的俄文版译成，原书中排版印刷错误不少，已发现的均予以改正。限于时间，译者未能对全部习题演习一遍，因而可能还有错误未被发现和改正，对书中的错误或译本中的不当之处，请读者惠予指正。

上海翻译出版公司的张致中、曹兴根两位先生对中译本的出版给了大力支持，在此谨表谢意；也对华东师大数理统计系的黄月珍、傅烨辉两位同志为译本出版所付出的辛勤劳动表示感谢。

译者

1987.10

目　录

第一章　随机事件

§1. 集合运算-集合代数和σ-代数

本节研究某个集合(空间)$\Omega=\{\omega\}$和它的子集,其中子集将用大写的英文字母表示。记号$A\subset B$(读为:A是B的子集)表示集合A的每一个元素都属于B。如果$A\subset B$和$B\subset A$同时成立,则称集合A和B相等($A=B$)。

记号$\omega\in A$(读为:ω属于A)表示ω是A的一个元素;记号$\omega\overline{\in}A$(读为:ω不属于A)表示ω不是A的一个元素。如果一个集合不含有任意一个元素,则此集合称为空集,并用符号ϕ表示。空集被认为是任意一个集合的子集。

$A\cup B$称为集合A和B的和(或并),它是由且仅由至少属于A和B中的某一个集合的那样一些元素构成的集合。

$A\cap B$称为集合A和B的积(或交),它是由且仅由既属于A又属于B的那样一些元素构成的集合。

$A\backslash B$称为集合A和B的差,它是由且仅由属于A但不属于B的那样一些元素构成的集合。

$\overline{A}$称为集合A的余集,它是由且仅由不属于A的那样一些元素构成的集合($\overline{A}=\Omega\backslash A$)。

$(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$称为集合$A$和$B$的对称差,记为$A\Delta B$。

如果$A\cap B=\phi$,则称集合A和B不相交。

集合代数　Ω的子集类$\mathfrak{M}$称为代数,如果它满足下述条件:

1) 若$A\in\mathfrak{M}$, $B\in\mathfrak{M}$,则$A\cup B\in\mathfrak{M}$;

2) 若$A\in\mathfrak{M}$,则$\overline{A}=\Omega\backslash A\in\mathfrak{M}$。

集合σ-代数　Ω的子集类F称为σ-代数,如果它满足下述条件:

1) 若 $A_n \in F(n=1, 2, \cdots)$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$;

2) 若 $A \in F$，则 $\overline{A} \in F$。

I.1.1. 证明等式：

1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$;

2) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

3) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$。

I.1.2. 假设 A 和 B 是平面 $\Omega = R^2$ 的子集，其中

$$A = \{(x, y): x+y \leqslant 1\};$$
$$B = \{(x, y): y \leqslant 2x+2\}。$$

试求 $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$。

I.1.3. 设 $A_n = \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right)$。试求

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n。$$

I.1.4. 设 $A_n(n=1, 2, \cdots)$是平面上的一个子集序列，

其中
$$A_n = \left\{(x, y): x^2+y^2 \leqslant \frac{1}{n^2}\right\}。$$

求
$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n。$$

I.1.5. 证明：

1) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

2) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$;

3) $A \triangle \phi = A$, $A \triangle \Omega = \overline{A}$;

4) $A \triangle A = \phi$, $A \triangle \overline{A} = \Omega$。

I.1.6. 设 A_n 是一个子集序列。证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$，其中 $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$，并且子集 B_i 两两互不相交。

I.1.7. 设 I 是某个指标集。证明：

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A}_\alpha, \qquad \overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} \overline{A}_\alpha。$$

I.1.8. 设

$$\chi_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\overline{\in} A,\end{cases}$$

(函数 $\chi_A(\omega)$ 称为集合 A 的示性函数)。证明:

1) $\chi_{A\cap B}(\omega)=\chi_A(\omega)\cdot\chi_B(\omega)$;

2) $\chi_{A\cup B}(\omega)=\chi_A(\omega)+\chi_B(\omega)-\chi_A(\omega)\cdot\chi_B(\omega)$;

3) $\chi_{\overline{A}}(\omega)=1-\chi_A(\omega)$;

4) $\chi_{A\setminus B}(\omega)=\chi_A(\omega)\cdot[1-\chi_B(\omega)]$;

5) $\chi_{A\triangle B}(\omega)=|\chi_A(\omega)-\chi_B(\omega)|$;

6) $\chi_{A\triangle B}(\omega)=\chi_A(\omega)+\chi_B(\omega)\pmod 2$。

I.1.9. 利用习题I.1.8的结论,证明等式:

1) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

2) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

3) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

I.1.10. 设 $\{A_n\}$ 是 Ω 的一个子集序列; A^* 是由且仅由属于这个子集序列中的无穷多个集合的这样一些元素构成的集合; A_* 是由且仅由除去有限个集合后属于这个子集序列的所有集合的这样一些元素构成的集合。证明:

1) $A_*\subset A^*$;

2) $A_*=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$;

3) $A^*=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$。

注 对于集合 A^* 和 A_*,有时利用符号: $A^*=\overline{\lim}\,A_n$, $A_*=\underline{\lim}\,A_n$。若 $\overline{\lim}\,A_n=\underline{\lim}\,A_n$,就说 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在,并定义 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\underline{\lim}\,A_n=\overline{\lim}\,A_n$。

I.1.11. 设

$$A_n=\begin{cases}A, & \text{若 } n \text{ 是偶数;}\\ B, & \text{若 } n \text{ 是奇数。}\end{cases}$$

证明, $\overline{\lim}\,A_n=A\cup B$, $\underline{\lim}\,A_n=A\cap B$。

I.1.12. 设 $A_n(n=1, 2, \cdots)$ 是 Ω 的这样一个子集序列,对所

有的 n 有 $A_n \supset A_{n+1}$。证明 $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$。

I.1.13. 设 $A_n(n=1, 2, \cdots)$是 Ω 的这样一个子集序列，对所有的 n 有 $A_n \subset A_{n+1}$。证明 $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$。

I.1.14. 设 A_n 是一个两两互不相交的子集序列。证明 $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = \phi$。

I.1.15. 设 $\mathfrak{M}$ 是一个代数。证明：

1) 若 $A_k \in \mathfrak{M}(k=1, 2, \cdots, n)$，则 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{M}$；

2) 若 $A_k \in \mathfrak{M}(k=1, 2, \cdots, n)$，则 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{M}$；

3) $\Omega \in \mathfrak{M}$, $\phi \in \mathfrak{M}$。

I.1.16. 设 $I=\{\alpha\}$是某个指标集；$\mathfrak{M}_\alpha(\alpha \in I)$是一族代数。证明：$\bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{M}_\alpha$ 是代数(任意个代数的交仍是代数)。

I.1.17. 证明：由 Ω 的所有子集构成的集合是一个代数。

I.1.18. 设 K 是 Ω 的某个子集类。代数 $\mathfrak{M}_0(K)$称为包含类 K 的最小代数，如果它满足条件：1) K 中的每一个集合属于 $\mathfrak{M}_0(K)$；2)对包含 K 的任意一个代数 $\mathfrak{M}$，必有 $\mathfrak{M}_0(K) \subset \mathfrak{M}$。

证明：对任意一个类 K，包含它的最小代数必存在。

I.1.19. 设 K 是由一个子集 $A \subset \Omega$ 组成的类，试求包含 K 的最小代数 $\mathfrak{M}_0(K)$。

I.1.20. 设 $\Omega=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。试给出 1)包含子集 $A=\{2, 3, 4\}$和 $B=\{4, 6\}$的所有代数；2)包含 A 和 B 的最小代数。

I.1.21. 子集类 $A_1, \cdots, A_n$ 称为 Ω 的一个分割，如果它满足条件：1) $A_1, \cdots, A_n$ 两两互不相交； 2) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$。

证明：集合 $A_1, \cdots, A_n$ 的所有可能的并的全体构成一个代数，并给出包含 $K=\{A_1, \cdots, A_n\}$的最小代数 $\mathfrak{M}_0(K)$。

I.1.22. 非空的子集 A 称为代数 $\mathfrak{M}$ 的原子，如果 1)$A \in$

$\mathfrak{M}$; 2)若 $B\in\mathfrak{M}$, $B\neq\phi$ 且 $B\subset A$, 则 $B=A$。

如果 $\mathfrak{M}$ 是一个有限代数,那么 $\mathfrak{M}$ 的所有的原子 $A_1, \cdots, A_n$ 形成 Ω 的一个分割。证明包含 $A_1, \cdots, A_n$ 的最小代数是 $\mathfrak{M}$。

I.1.23. 假设 K 是 Ω 的任意一个子集类。顺次给出 1) 类 K_1, 它是由 ϕ, Ω 和这样的子集 A 组成,或者 $A\in K$, 或者 $\overline{A}\in K$; 2)类 K_2, 它是由类 K_1 的子集的所有可能的有限交组成; 3) 类 K_3, 它由类 K_2 的不相交子集的所有可能的有限并组成。证明: 类 K_3 与最小代数 $\mathfrak{M}_0(K)$ 相等, 并在 $\Omega=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 和 $K=\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$时,给出类 K_1, K_2, K_3。

I.1.24. 设 F 是 σ-代数。证明: 若 $A_n\in F(n=1, 2, \cdots)$, 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\in F$。

I.1.25. 证明: 任意个 σ-代数的交仍是 σ-代数。

I.1.26. 设 K 是 Ω 的某个子集类。σ-代数 $F_0(K)$ 称为包含类 K 的最小 σ-代数(或称由类 K 生成的 σ-代数), 如果它满足条件:

1) K 中的每一个集合属于 $F_0(K)$;

2) 对包含类 K 的任意一个 σ-代数 F, 必有 $F_0(K)\subset F$。

证明: 对任意一个类 K, 包含它的最小 σ-代数必存在。

I.1.27. 设 K_1 和 K_2 是 Ω 的两个子集类, 且 $K_1\subset K_2$。证明: $F_0(K_1)\subset F_0(K_2)$。

I.1.28. 设 K 是数直线上的形如$[a, b)$的所有区间组成的类。

包含 K 的最小 σ-代数 $\mathfrak{B}=F_0(K)$称为波莱尔(Borel)σ-代数,且 $\mathfrak{B}$ 中的集合称为波莱尔集。

证明:

1) 对任意的 a, 集合$\{a\}$是波莱尔集;

2) 数直线上的任意一个可数集是波莱尔集;

3) 区间(a, b)是波莱尔集;

4) 数直线上的任意一个开集是波莱尔集;

5) 数直线上的任意一个闭集是波莱尔集。

I.1.29. 设 K 是数直线上的开区间(a, b)组成的类。证明：包含 K 的最小 σ-代数是波莱尔 σ-代数。

I.1.30. 设 K 是数直线上的开集组成的类。证明：包含 K 的最小 σ-代数是波莱尔 σ-代数。

I.1.31. 设 K 是数直线上的闭集组成的类。证明：包含 K 的最小 σ-代数是波莱尔 σ-代数。

I.1.32. 设 R 是数直线。证明：形如 $F\cap G$ 的集合的全体是代数，而不是 σ-代数，其中 $F, G\subset R$, F 是闭集，G 是闭集。在这样的一些集合上，增加些什么样的集合，它就成为 σ-代数了？

I.1.33. Ω 的子集类 M 称为单调类，如果

$$\lim A_n\subset M$$

对 M 的任意一个单调集序列 A_n 都成立。

证明代数 $\mathfrak{M}$ 是 σ-代数的充要条件是：它是单调类。

I.1.34. 证明：任意个单调类的交仍是单调类。

I.1.35. 设 K 是 Ω 的某个子集类。单调类 $M_0(K)$称为包含类 K 的最小单调类，如果它满足如下条件：

1) K 的每一个集合属于 $M_0(K)$；

2) 对包含 K 的任意一个单调类 M，必有 $M_0(K)\subset M$。

证明：对任意一个类 K，包含它的最小单调类必存在。

I.1.36. 设 K 是一个集类。$F_0(K)$是包含 K 的最小 σ-代数；$M_0(K)$是包含 K 的最小单调类。证明：

$$M_0(K)\subset F_0(K)。$$

I.1.37. 设 $\mathfrak{M}$ 是一个代数，$F_0(\mathfrak{M})$ 是包含 $\mathfrak{M}$ 的最小 σ-代数，$M_0(\mathfrak{M})=M$ 是包含 $\mathfrak{M}$ 的最小的单调类。

证明：

1) 集合类 $\widetilde{M}=\{B:B\in M \text{ 且 } \overline{B}\in M\}$ 与 M 相等；

2) 若 $A\in M$，则集合类 $M_A=\{B:B\in M, A\cap B\in M\}$ 与 M 相等；

3) M 是 σ-代数；

4) $F_0(\mathfrak{M})=M_0(\mathfrak{M})$。这也就是说，包含代数 $\mathfrak{M}$ 的最小 σ-代数与包含 $\mathfrak{M}$ 的最小单调类相等。

§2. 组　合

基本的组合原理(乘法法则)　假设必须依次完成 k 个动作。若完成第一个动作有 n_1 种方法，接下来完成第二个动作有 n_2 种方法，完成第三个动作有 n_3 种方法，依次类推，完成第 k 个动作有 n_k 种方法，那么一起完成全部 k 个动作有 $n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot\cdots\cdot n_k$ 种方法。

从 n 个元素取 k 个元素的组合　假设集合 A 有 n 个元素。那么含有 k 个元素的 A 的子集的个数为

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

其中 $n!=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n$。

集合 $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$的 k 个元素的子集称为从 n 个元素$\{a_1,\cdots,a_n\}$中取 k 个元素的组合。

有序集　来自于 n 个元素的一个集合称为有序的，如果这个集合的每一个元素与从 1 到 n 的某个数(元素的号码)相对应，并且不同的元素对应着不同的数。有序集被认为是不同的，如果它们的元素，或者元素的次序有差别。

给定集合的排列　从同一个集合可以得到仅区别于元素次序不同的有序集。这些有序集称为这个集合的排列。n 个元素的集合其排列个数等于

$$P_n=n!。$$

从 n 个元素取 k 个元素的排列　n 个元素的集合中的 k 个元素的有序子集称为是从 n 个元素中取 k 个元素的排列。从 n 个元素中取 k 个元素的排列个数等于

$$A_n^k=k!\cdot C_n^k=n(n-1)\cdots(n-k+1)。$$

n 个元素的集合划分为 m 组的方法个数　设 $k_1,k_2,\cdots,k_m$

是非负整数，且 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$。使得 n 个元素的集合 A 成为分别含有 $k_1, \cdots, k_m$ 个元素的集合 $B_1, \cdots, B_m$ 的并的方法个数等于

$$C_n(k_1, \cdots, k_m)=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}。$$

重复排列 若 n 个元素共有 k 种类型，第一种类型有 k_1 个元素，第二种类型有 k_2 个元素，……，第 m 种类型有 k_m 个元素。则这 n 个元素的各种不同排列的个数等于

$$C_n(k_1, \cdots, k_m)=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}。$$

集合的直(笛卡尔(cartesian))积 设有 k 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_k$。所有形如 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$，其中 $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, $\cdots$, $a_k\in A_k$ 的元素构成的集合叫做集合 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的直积，并记成 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_k$。

例 若 $A=\{a, b\}$, $B=\{c, d, e\}$，那么

$A\times B=\{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$。

集合直积的元素个数 设 $N(A)$ 表示集合 A 的元素个数，那么 $N(A_1\times A_2\times\cdots\times A_k)=N(A_1)\cdot N(A_2)\cdots N(A_k)$。

I.2.1. 从城市 A 到城市 B 有 n 条路可走，从城市 B 到城市 C 有 m 条路可走。问路线为 A-B-C 的游览有多少种方式可以实行?

I.2.2. 上山顶有 7 条路可走，问一个旅游者能够有多少种方式爬到山顶并下山? 又若上山、下山需走不同的路，结果又是如何?

I.2.3. 有 17 个足球队参加全国足球锦标赛，问有多少种方式分配金质、银质、铜质的奖章?

I.2.4. 利用数字 0, 1, 2, 3, 4 能够写出多少个三位数?

I.2.5. 如果每一个数字的使用不超过 1 次，那么由 0, 1, 2, 3, 4 能够写出多少个三位数?

I.2.6. 七个人在柜台前排成一排，问有多少种不同的排法?

I.2.7. 某年级有十门课，星期一需安排六门不同的课。问有

多少种方法编排星期一的课程表？

I.2.8. 有多少个能被5整除的五位数？

I.2.9. 在三角形的一边上有 n 个点，在另一边上有 m 个点。用直线连接三角形的顶点与其对边上的点，问所划的直线把三角形分为多少个部分？

I.2.10. 有 n 个象棋手参加比赛，如果每2个参加者比赛一次，那么要举行多少场比赛？

I.2.11. 凸 n 边形有多少条对角线？

I.2.12. 在平面上有 n 条直线，其中任意两条不互相平行，任意三条不相交一点。问这 n 条直线共有多少个交点？

I.2.13. n 条直线能把平面至多划分为几个部分？

I.2.14. n 个平面能把空间至多划分为几个部分？

I.2.15. n 个圆能把平面至多划分为几个部分？

I.2.16. n 个球能把空间至多划分为几个部分？

I.2.17. 在 $n\times n$ 的象棋盘上任意放上一只红"车"及一只黑"车"，并且它们不可以互相"吃掉"，试问有多少种不同的放法？

I.2.18. 汽车的牌照编号由两个俄文字母和四个数字组成。问利用32个俄文字母可以组成多少个不同的牌照编号？

I.2.19. 如果把一张纸旋转180°，那么0、1、8这三个数字没有变化，6和9相互转化，而其它数字则失去意义。试问存在多少个七位数，在把一张纸旋转180°后，其值不变？

I.2.20. 有16个足球队参加全国足球最高甲级队联赛。获得第一、二、三名的队将分别得到金质、银质、铜质奖章，而最后二名的队将离开甲级队。试问竞赛有多少种不同的结局？

I.2.21. 1) $3^5\cdot 5^4$ 有多少个不同的因子？

2) 假设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是不同的质数。试问，$m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}$ 有多少个不同的因子？

I.2.22. 旅客把行李放在自动化的行李保管室，而当取行李时，他发现自己忘了号码。旅客仅仅记得号码中有数字23和37。为了找到放行李的房间，他必须正确地拨五位数的号码。试问至

多拨多少次，他就能找到行李？

I.2.23. 在m行和n列的长方形表格的每一个方格中，写上数字 1 或-1。如果每一行和每一列上的这些数字的乘积都等于 1，问有多少种写法？

I.2.24. 如果从 9 人中选出由 4 人组成的一个小组，问有多少种选法？

I.2.25. 如果从 6 本书中挑选 3 本书供人阅读，问有多少种选法？

I.2.26. 如果凸n边形的任意三条对角线不相交一点，那么这些对角线共有多少个交点？

I.2.27. 设有直角格子表（由$(n-1)$条横线和$(m-1)$条竖线分割$m\times n$的矩形而生成的《象棋城》（图 1））。从左下角（点$(0,0)$）到右上角（点(m,n)），问有多少条不同的捷径可行？

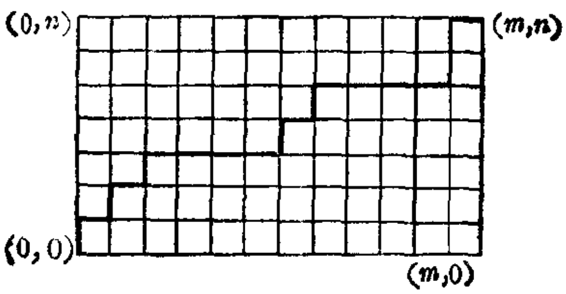

图 1

I.2.28. 利用上述习题，用几何方法证明下述等式：

1) $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$;

2) $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$;

3) $C_n^m\cdot C_k^0+C_{n-1}^{m-1}\cdot C_{k+1}^1+\cdots+C_{n-m}^0\cdot C_{k+m}^m=C_{n+k+1}^m$;

4) $C_{n-1}^{r-1}+C_{n-2}^{r-1}+\cdots+C_{r-1}^{r-1}=C_n^r$。

I.2.29. 从象棋盘（图 2）的 A 点到 B 点，有多少条不同的捷径可行？

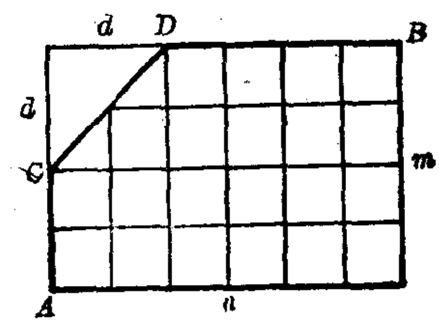

图 2

I.2.30. 某国际委员会由 9 人组成。委员会的文件放在保险柜内，保险柜只有在不少于 6 个成员在一起的时候才能打开，那么保险柜应该有几把锁，几把钥匙，并且在委员会成员之间应该如何分配这些钥匙？在委员会有n个成员，保险柜只有在不少于m个成员在一起的时候才能打开的情况下，研究这

个问题。

I.2.31. 作凸 n 边形所有的对角线，如果任意三条对角线都不相交于一点，那么这个多边形被划分成多少个部分？

I.2.32. 试证明：$(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$。

I.2.33. 1) 试证明：在 $k<\frac{n-1}{2}$ 时，$C_n^{k+1}>C_n^k$；在 $k>\frac{n-1}{2}$ 时，$C_n^{k+1}<C_n^k$。

2) 试求 $C_n^k(k=0, 1, \cdots, n)$ 中最大的一个数。

I.2.34. 若 p 是质数，试证明 $C_p^1, C_p^2, \cdots, C_p^{p-1}$ 都能被 p 整除。

I.2.35. 若 p 是质数，试证明对任意的整数 a，a^p-a 能被 p 整除（费尔玛小定理）。

I.2.36. 若 p 是质数，试证明 $[(2+\sqrt{5})^p]-2^{p+1}$ 能被 p 整除（记号 $[x]$ 表示 x 的整数部分）。

I.2.37. n 个元素的集合有多少个子集？（空集被认为是任意一个集合的子集。）

I.2.38. 房间里有 n 盏灯。试问房间的照明总共有多少种不同的方法？

I.2.39. 设有如图 3 所示的网状的路。2^n 个人从点 A 出发，一半的人沿着方向 l 走，而另一半沿着方向 m 走。走到第一个十字路口，每一群人分成两部分，一半沿着方向 l 走，而另一半沿着方向 m 走。这样的情况在每一个十字路口都发生。试问走了 n 段路之后，这些人出现在何处？且那时每一个十字路口有多少个人？

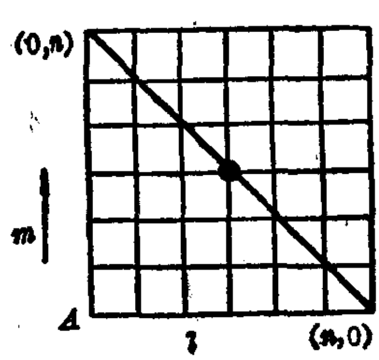

图 3

I.2.40. 平面上有 n 个点，其中 m 个点在一条直线上，除此之外，这 n 个点中没有三个点在一条直线上。试问，以这些点为顶点的三角形有多少个？

I.2.41. 把 4 本书（记为 A, B, C, D）放在书架上，有多少种