普通高等教育"九五"国家级重点教材

现代外弹道学

徐明友 著

兵器工业出版社

普通高等教育“九五”国家级重点教材

现代外弹道学

徐明友 著

兵器工业出版社

内容简介

本书阐述了弹箭飞行过程中的运动规律、总体弹道性能、优化设计和测试数据处理方法,其中包括运动模式、飞行稳定性弹、发射动力学、随机弹道学、弹道优化理论和弹道滤波等学科前沿课题。书中内容新颖,系统性强。本书可作为高等院校兵器有关专业的研究生教科书,亦可供从事弹箭武器研制、试验和使用的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代外弹道学/徐明友著. -北京:兵器工业出版社.1999.9
ISBN 7-80132-687-3

Ⅰ.现… Ⅱ.徐… Ⅲ.外弹道学 Ⅳ.TJ012.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 11024 号

出版发行:兵器工业出版社
责任编辑:李翠兰 蒋昌群
责任技编:魏丽华
社 址:100089 北京市海淀区车道沟 10 号
经 销:各地新华书店
印 刷:北京黄坎印刷厂
版 次:1999 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
印 数:1—1500

封面设计:底晓娟
责任校对:宋丽丹
责任印制:王京华
开 本:787×1092 1/16
印 张:9.75
字 数:226.2 千字
定 价:18.00 元

出版说明

在21世纪即将来临之际，根据兵器工业科技与经济发展对于人才素质和质量的要求，兵器工业总公司教育局组织兵工专业教学指导委员会制定了《兵器工业总公司"九五"教材编写与出版规划》。在制定规划的过程中，我们力求贯彻国家教委关于"抓重点，出精点"的教材建设方针，根据面向21世纪军工专业课程体系和教学内容改革的总体思路，本着"提高质量，保证重点"的原则，精心遴选了在学校使用两遍以上，教学效果良好的部分讲义列入教材规划，兵工专业教学指导委员会的有关专家对于这些规划教材的编写大纲都进行了严格的审定。可以预计，这批"九五"规划教材的出版将促进兵工类专业教育质量的提高、教学改革的深化和兵器科学与技术的发展。

本教材由宋丕极教授主审。

作者殷切地希望广大读者和有关单位对本教材编审和出版中的缺点与不足给予批评指正。

1997年8月17日

序　　言

随着现代科学技术的迅速发展，在弹道学科领域中相应地出现了许多新课题。弹道学是国家重点学科之一。为了适应形势，满足高等院校兵器有关专业研究生教学，以及兵器行业的科技工作者学习参考的需要，特撰写了《现代外弹道学》一书。

外弹道学是研究弹箭在空中运动规律及总体性能的科学(参见美国大百科全书 1978 年版，卷 3)。其研究对象包括枪弹、炮弹、航弹、火箭及导弹等飞行体。传统的观念认为，使外弹道学仅研究弹丸的运动规律，并担负着简单的弹道设计及射表编制任务。但是随着现代战争的要求和科学技术的进步，使外弹道学在近 20 多年来得到了快速的发展。在兵器与科学技术领域，惟有国际弹道学会这一学术组织活跃于世界舞台。各先进工业国之所以如此重视弹道学，是因为它是弹箭技术的基础。实践表明，任何火力型号系统的研制，若离开了弹道工作者的参与，离开了弹道总体论证与设计，便不可能使该系统具备良好的弹道性能。外弹道学是建立在运动稳定性、振动理论、多体系统动力学、空气动力学等力学基础之上的；又依赖于现代控制论和计算技术的发展，并与测量技术密切相关。目前，它在弹道计算、飞行稳定性、起始扰动分析、散布理论、有控弹道、总体优化设计、实验技术及参数辨识等研究领域都十分活跃，提出了许多新课题，呈现出新的发展趋势。

在弹道计算中，需要有反映实际运动状态的动力学模型。当前，弹道计算模型已日趋完善。模型误差直接取决于气动力系数的可靠程度。人们注意到火箭、火箭增程弹、导弹、底排弹等飞行体的流场十分复杂，不仅受到空气动力作用，还有燃气喷射。为了进行复杂流场的计算，需要发展各种气动理论和计算方法，以期精确捕捉激波和分辨旋涡运动，能够处理非线性自由表面及湍流问题。对于在非定常运动时的复杂流场，需要弄清各种涡系的生成、消长及流动分离的产生和有关机理，以及超声速流边界层的控制、减阻、颤振及降噪控制等一系列问题。对于水中弹道则更有新的特色。

21 世纪的战场模式将是数字化战场。它将以经过横向一体化技术改造的数字化部队为基本作战力量，以夺取战场主动权为目的，以各种信息武器装备和系统为主要手段；利用卫星等先进通信工具，将战场的情报侦察、通信、指挥和控制联成一个有机整体，以大大提高对战场情况的反应速度，加快部队的作战行动节奏。外弹道大有用武之地。在这种情况下，对火控系统提出了更高的要求，尤其要解决实战条件下的快速弹道解算问题。对远程弹，要在 1～2s 时间内完成确定精确射击诸元的弹道计算，还有相当的难度。

为使弹箭可靠地飞达预定目标，首先必须解决好飞行稳定性问题。60 年代初，墨菲提出了线性动稳定性判据，至今在型号总体设计及试验分析中仍受其益。随着新式武器的发展，出现了大长径比(20 以上)的柔性弹，再不能将其简单地作为刚体看待。当研究飞行器结构振动、颤振、气动弹性耦合特性时，必须建立弹性体动力学模型；在有液体晃动时，模型亦相应变更。这样，传统的运动稳定性理论已不能解决问题，需要有能分析既有刚体，又有可变柔体及液体的系统理论和方法。拟采用业已形成的摄动法、分岔理论、非线性振动分析，或寻找其它方法。

弹箭飞行稳定性研究的对象，一般属于变系数系统。对此，至今没有一个既严格而又使用简便的准则。尽管用李雅普诺夫直接法和其它近似方法(如特征数法)可以解决某些问题，但李雅普诺夫定义的系统稳定性，即研究当时间 $t\to\infty$ 时系统的渐近性能，对弹箭运动而言就不尽适宜。因为其飞行时间有限，t 趋于无穷大的定义就不完全符合实际情况。事实上，一些干扰因素所引起的弹道偏差随射程距离的增大而增大，或基本上保持不为零的常量，但也无妨于弹箭能够较准确地命中目标。因此李雅普诺夫稳定性定义必须加以修改，需要采用学术界新的有限时间内的稳定性概念，并对飞行稳定性判据做深入研究。对于试验中经常出现的掉弹和近弹现象，除了可能的结构故障之外，便是稳定性急待解决的课题。

射击精度是外弹道学研究的最重要内容之一。为了提高武器装备的生存能力，必须提高首发命中率或首群覆盖率。影响命中率的因素很多，其中尤以炮口扰动最为复杂而难以用理论计算方法解决。由此需要研究弹箭发射过程中的运动规律。发射过程中弹箭运动的终端参数，即为自由飞行过程的初始条件。弹箭发射动力学与中间弹道学、火炮动力学形成学科交叉，所研究的内容各有侧重。它在具体的膛内环境下，分析弹体的受力情况，研究弹炮间的相互作用。该项研究涉及到弹箭有关结构和物理参数、发射装置特性、运载工具性能、气体动力学以及自然条件(地面或水面支承条件、气象条件等)。根据具体情况，分析和选取特定情况下的主要影响因素，建立起描述弹炮运动相互耦合条件下多体系统动力学模型，求得所需要的解，并寻求适当的试验手段对摸拟结果予以验证。至今，实验方面还限于光学杠杆、振动模态及分段导轨等手段，有待于研究更先进的测试办法。尽管近来在理论和实验方面做了卓有成效的工作，但还未能使之进入型号设计的实用阶段。

外弹道学所研究的弹箭扰动运动是随机过程。其干扰源有非随机性的和随机性的，后者又区分为随机变量和随机函数。对有些干扰源，比如大气湍流形成的阵风作用机制及规律就尚未弄清。这给研究随机扰动过程带来了困难。一般而言，飞行过程中的干扰是有色噪声，欲知道它的统计特性，需要做大量的测试和统计分析工作。为了数学上的处理方便，干扰过程最好以白噪声的形式出现。如何由白噪声通过一个线性动态系统形成所需要的有色噪声，是拟解决的实际问题，这个线性动态系统被称为成形滤波器(shaping filter)。目前对于平稳且有有理功率谱密度的过程是可以解决成形滤波器问题，对任意随机过程却难以解决。在某些特殊情况下，可直接求得在有色噪声作用下的弹箭运动统计特性；协方差分析描述函数法已在火箭导弹统计性能分析中得到应用。随着随机弹道学理论水平的提高，必将为更好地解决射击密集度问题创造前提。

有控弹道一直是外弹道学最活跃的领域之一。小至简易制导，大至远程导弹和星际飞行，都需要研究导引规律并相应确定制导参数。弹道式导弹制导的任务，在于通过控制火箭推力向量，以达到主动段推力终止条件，使关机点参数符合能精确命中目标的要求。同样，发射人造卫星或宇宙飞船时，运载火箭制导系统的任务，也是通过对主动段弹道的控制，使关机点的参数满足卫星或飞船预定轨道的要求。为此需要建立射程控制系统状态方程，计算出用关机点弹道参数确定的射程和横向落点偏差。在主动段飞行过程中，选择合适的关机时刻 t_k，能满足火箭达到射程无偏状态的方程，即关机方程。通过控制系统产生不同形式的控制加速度，改变火箭的质心运动以消除落点横向偏差，运用最优过程理论可综合出消除该偏差的最优控制规律。

外弹道学还要解决拦截问题中的导引规律的最优选择问题。人们已熟知追踪法、平行接

近法、前置量法及三点法等古典导引法，它们指的是受控制力作用之后的导弹系统状态所应满足的条件，而并不直接回答怎样施加控制力的问题。导引的最终目的是实现拦截，即达到零脱靶。有人据此由极大值原理推导出了导引规律，但不尽人意。比较理想的导引过程，应该是在导引初始阶段以较大的控制力消除较大的初始偏差，而导引过程后期，则用较小的控制力加以微调。

随着快速电子计算机的发展，外弹道优化理论亦相应地得到发展。与最优过程理论结合，不仅用于解决导弹最优拦截问题，在最优轨道转换、最优控制系统设计及最优弹道设计中，均得到广泛应用。此一般属于过程优化问题，导引规律的确定，以及弹箭转速规律、推力程序的优选，亦属于此类范畴。外弹道优化理论与设计的另一类是参数优化。在型号总体论证与设计中，为满足战技指标的要求，常给予各有关参量以一定的范围(约束条件)，然后根据某一个或多个指标(如射程、密集度等)的极大值或极小值，综合确定较合理的设计方案，即弹箭的弹道参数和有关的结构参数。外弹道优化设计是赋予弹箭具有良好性能的关键环节，是武器总体设计科学化的必由之路。目前虽然已开发出一些弹道优化设计软件，但对于外弹道全系统设计而言，还仅停留于起步阶段。

外弹道理论水平的提高，除了依赖于相关学科的进展之外，它还与弹道实验技术密切相关。没有实验验证，理论就失去了客观标准和依据。现今外弹道实验中，大量采用了现代光测和电测技术，尤其是各种精密的高速摄影仪器、雷达和遥测设备。例如，为测定膛内及炮口运动参量，采用光学杠杆、针孔照相及 X 闪光照相等设备；为测定飞行轨迹，采用弹道照相机和电影经纬仪，以及脉冲定位雷达；为测定全弹道速度、姿态角等参数，采用太阳方位传感器及遥测系统。美国在 80 年代后期建成的卫星导航全球定位系统(简称 GPS)，可以全天候工作，实时地为从地面到 9000km 空间的任何运动体提供三维位置、三维速度及时间信息。最高定位精度可达 10m 以内，测速精度达 0.1～0.01m/s，时间传递精度可达 10～1ms。该系统将在外弹道测量中发挥重要作用。此外，随着大型、精密而昂贵武器的出现，如何以尽可能少的实验即能评估出弹道性能，也是一个新的课题。

弹道测试的目的在于获取有用的信息；从测试数据中提取所需要的信息，其数据处理过程称为弹道滤波。由观测数据对随机量进行定量的推断，就是估计问题。从本世纪初费歇提出最大似然估计方法，到 60 年代初的卡尔曼滤波方法，使最优估计方法形成了一套理论体系。在现代战争的火力对抗中，利用跟踪雷达测得的弹道数据，可采用飞行状态估计或自适应估计的方法及时推断出敌军阵地，并对我方武器进行校射。

飞行器系统辨识学已有新的进展，利用弹箭飞行试验和地面实验中的测量数据，通过建立其动力学系统的数学模型，辨识出其中的待定参数。比如，利用自由飞行靶道测量数据提取的空气动力系数，就比风洞吹风所得到的结果更趋于实际。飞行器系统辨识学是飞行动力学的逆问题。其核心问题是飞行器的气动模型，需要应用大量的气动概念。其研究手段是现代控制论中的滤波、预测和估计理论。它是处于飞行动力学、空气动力学、弹性力学和现代控制论之间的交叉学科。

展望未来，外弹道所要研究的问题很多，该学科的发展，必将对兵器的发展起推动作用。

本书以现有外弹道学的一般理论为起点，力求在内容安排上向上拉开一个层次。第一章介绍了弹箭运动的一般力学规律，以便通用于各种可能的运动状态。其中转移矩阵和状态转移方程为以后的状态分析提供了数学工具。第二章主要干扰因素中，突出地阐述了动静不平

衡性和大气湍流模型，由此使对弹道的干扰因素由随机变量扩展到随机函数，为第五章的随机弹道学提供了依据，也对第七章的弹道滤波的噪声有了初步认识。第二章中的基本转换矩阵，可用于直角坐标系的各种变换。第三章建立了飞行器的运动方程，它不仅适用于线性小扰动角运动情况，也便于对几何非线性和运动参量非线性的运动稳定性进行分析。鉴于在一般的外弹道学中已建立了一般性运动方程组，本章并未重复建立这些方程，而把重点放在分析稳定性所需要的方程建立之上。现有的平面质点弹道已不能满足需要，本章阐述了改进的质点弹道方程。

第四章研究了弹箭飞行过程的发射动力学模型，这是受约束的飞行过程。其运动状态依赖于火炮或发射装置与弹箭的相互作用，弹炮将构成一个统一的综合动力学系统。第五章将射弹散布及射击准确度问题，归结为随机干扰下的弹箭运动状态分析，构成了一个完整的随机弹道学专门课题。第六章旨在为弹道优化设计提供理论依据，使弹箭总体设计趋于科学化。第七章开拓了弹道滤波这一领域，旨在使目前弹道试验中的数据处理方法能提高到一个新的水平。

本书立足于阐述原理和方法。为了使读者思路清晰，加之篇幅有限，书中避免了一些繁琐的工程实际问题的介绍。比如发射动力学中，如涉及具体的发射动力学问题，那么随便一个问题都可以阐述很大的篇幅。本书在于提供处理各类问题的理论基础和通用方法，实际的工程问题的具体解决，将是研究生和工程技术人员的任务。

本书主要取材于作者最近十多年来的科研成果、著作和论文，其中大部分已附于书后参考文献中。作者在对研究生的多年教学实践中，逐步将这些文献加以系统化，形成了一套《现代外弹道学》讲义，在实践中取得了显著的教学效果，为研究生拓宽知识域并引导至学科前沿做了大量工作。本书是多年科研和教学成果的结晶。与经典的外弹道学相比，本书以向量矩阵为基本数学工具，将近代发射动力学、随机过程理论、优化理论和现代控制论广泛用于弹箭运动状态分析，构成了一个崭新的《现代外弹道学》的理论体系。在此基础上，一切有志于外弹道研究的学者们，必将为现代外弹道学的发展做出杰出的贡献。限于作者水平，尚存问题在所难免，请读者不吝赐教。

徐明友

1999 年 3 月

写于南京理工大学

目　　录

第一章　弹箭运动的一般理论

§1.1　运动学

设以 S 表示固定参考系，原点为 o；S'表示动参考系。如图 1－1 所示，以 $\boldsymbol{\rho}$ 表示动点 A 的绝对位矢，$\boldsymbol{r}$ 表示该点相对于 S'的相对位矢，$\boldsymbol{\rho}_D$ 表示动参考系原点 D 的绝对位矢，则

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_D + \boldsymbol{r};$$

A 点的绝对速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_D}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \qquad (1-1)$$

式中　$\boldsymbol{\omega}$——动参考系的转动角速度；

若记下列符号：

$\boldsymbol{v}_D$——D 点的速度，$\boldsymbol{v}_D = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_D}{\mathrm{d}t}$；

$\boldsymbol{v}_r$——相对速度，$\boldsymbol{v}_r = \dfrac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$；

$\boldsymbol{v}_e$——A 点的牵连速度，且

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

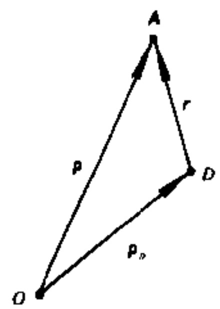

图 1－1　三种位矢关系

则式(1－1)写为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e \qquad (1-2)$$

A 点的绝对加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{v}_D + \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_D}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right)$$

$$= \boldsymbol{a}_D + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \frac{\mathrm{d}'^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \qquad (1-3)$$

式中 $\boldsymbol{a}_D$ 是 D 点的加速度。

令 $\boldsymbol{a}_r$ 表示动点 A 相对于 S′的加速度，即相对加速度，

$$\boldsymbol{a}_r = \frac{\mathrm{d}'^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}; \qquad (1-3\mathrm{a})$$

以 $\boldsymbol{a}_e$ 表示牵连加速度，

$$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_D + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \qquad (1-3\mathrm{b})$$

以 $\boldsymbol{a}_C$ 表示科里奥利(Coriolis)加速度,

$$\boldsymbol{a}_C = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r \tag{1-3c}$$

则式(1-3)简写为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C \tag{1-4}$$

§1.2 火箭质心运动的一般方程

普通弹丸(炮弹、枪弹、航弹等)的运动方程,是变质量火箭主动段运动方程的特例,为此,下面讨论火箭的一般运动。

在变质量力学中,若有一变质量质点在瞬时 t 的质量为 m_i,速度为 $\boldsymbol{v}_i$;同时另有一微小质量 Δm_i 的质点,以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 运动,并于时刻($t+\Delta t$)与 m_i 合并。合并后的总速度为($\boldsymbol{v}_i+\Delta\boldsymbol{v}_i$),若作用于其上的全部外力为 $\boldsymbol{f}_i$,则根据质点系的动量定理,有

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(m_i+\Delta m_i)(\boldsymbol{v}_i+\Delta\boldsymbol{v}_i)-(m_i\boldsymbol{v}_i+\Delta m_i\boldsymbol{v}_1)}{\Delta t} = \boldsymbol{f}_i$$

便得

$$m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{u}_i\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t} \tag{1-5}$$

式中　$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_i$,$\boldsymbol{u}_i$ 是质量为 $\Delta\boldsymbol{m}_i$ 的微小质点相对于质量为 $\boldsymbol{m}_i$ 的质点之相对速度。

若将量 $\boldsymbol{u}_i\dfrac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}$ 视为一外力,则变质量质点的运动方程与定质量质点运动方程在形式上完全相同。

火箭是一变质点系,取 t 时刻火箭体所包含的全部质量作为研究对象。弹体内的第 i 个质点,亦满足式(1-5),不过式中的 f_i 也包括了弹体内其它质点对 m_i 及 Δm_i 的作用力(即内力)。对所考虑的质点系的全部质点求和,得

$$\sum m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{f}_i + \sum \boldsymbol{u}_i\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t} \tag{1-6}$$

取一与火箭刚性部分相固联的坐标系,其原点为 D,坐标系的角速度(火箭体的转动角速度)为 $\boldsymbol{\omega}$,此坐标系不仅有转动,而且有平动。以 $\boldsymbol{r}_i$ 表示 m_i 在该坐标系中的矢径,$\boldsymbol{v}_D$ 表示 D 点相对于静参考系的速度,$\boldsymbol{v}_{ri}$ 表示 m_i 相对于该动参考系的相对速度,则依式(1-1)有

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{v}_{ri} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i$$

而 $\boldsymbol{v}_i$ 的时间变化率由式(1-3)为:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}_D + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i) + \boldsymbol{a}_{ri} + \boldsymbol{a}_{Ci} \tag{1-7}$$

代入式(1-6),有

$$\sum m_i\left[\boldsymbol{a}_D + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\right] = \sum\boldsymbol{f}_i + \sum\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_i - \sum m_i\boldsymbol{a}_{ri} - \sum m_i\boldsymbol{a}_{Ci} \tag{1-8}$$

方程(1-8)等式左边为

$$m\left[\boldsymbol{a}_D + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c)\right]$$

其中 $\boldsymbol{r}_c$ 是瞬时 t 火箭质心对 D 点的矢径，m 为此时的火箭质量。中括号内三项之和由式(1-3b)知是 t 时刻火箭质心的牵连加速度，不妨仍以 $\boldsymbol{a}_e$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_D + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_c)。$$

另外，$\sum \boldsymbol{f}_i$ 中的内力成对出现，且两两相消，只剩下外力合力、以 $\boldsymbol{F}$ 表示。$\sum \frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_i$ 是动推力，以 $\boldsymbol{F}'_p$ 表示。方程(1-8)等式右边最后两项是由燃气的加速流动及弹体转动所引起的相对惯性力和科里奥利惯性力，两者统一记为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{gas}}$，称为燃气惯性力。于是式(1-8)变成下式：

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}'_p + \boldsymbol{F}_{\mathrm{gas}} \tag{1-9}$$

一般 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{gas}}$ 很小，多数情况下可忽略。

在与火箭刚性部分相固联的坐标系内，若火箭质心对 D 点的相对速度和相对加速度分别为 $\boldsymbol{v}_{rc}$ 和 $\boldsymbol{a}_{rc}$，则火箭质心的绝对速度和绝对加速度由式(1-2)、(1-4)分别为：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{rc}} \tag{1-10}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{rc}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{rc}} \tag{1-11}$$

将式(1-9)代入式(1-11)，便得火箭质心运动的一般方程

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}'_p + \boldsymbol{F}_{\mathrm{gas}} + m\boldsymbol{a}_{rc} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{rc}} \tag{1-12}$$

§1.3 火箭转动运动(动量矩定理)

与上述相同，选一以 D 为原点而与火箭刚性部分相固联的坐标系。在此坐标系中，质量为 m_i 的质点矢径为 $\boldsymbol{r}_i$，将式(1-5)等式两边左乘 $\boldsymbol{r}_i$，并对全部质点求和得

$$\sum \boldsymbol{r}_i \times m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_i + \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{u}_i\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}$$

再把式(1-7)代入得

$$\sum m_i\boldsymbol{r}_i \times \left[\boldsymbol{a}_D + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)\right]$$

$$= \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_i + \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{u}_i\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t} - \sum m_i\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{a}_{ri} - \sum m_i\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{c}i} \tag{1-13}$$

由于内力两两相消，则

$$\sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_i = \sum \boldsymbol{M}_i$$

$\sum \boldsymbol{M}_i$ 是所有外力对 D 点的力矩。以 $\sum \boldsymbol{M}'_p$ 表示动推力矩，即

$$\sum \boldsymbol{M}'_p = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{u}_i\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}$$

式(1-13)等号右边最后两项是燃气运动所产生的惯性力矩，以 $\boldsymbol{M}_{gas}$ 表示，即

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{gas}} = -\sum m_i\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{a}_{ri} - \sum m_i\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{a}_{ci};$$

于是式(1-13)变为

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i \times \left[\boldsymbol{a}_D + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)\right] = \sum \boldsymbol{M}_i + \boldsymbol{M}'_p + \boldsymbol{M}_{gas} \tag{1-14}$$

由矢量代数方程

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0,$$

得

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$$

置

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_i \quad , \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\omega} \quad , \quad \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i);$$

则知

$$\begin{aligned}\sum m_i \boldsymbol{r}_i \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] &= \sum m_i \boldsymbol{\omega}_i \times [\boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] + \sum m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}\end{aligned} \tag{1-15}$$

式中 $\boldsymbol{K}$ 是火箭体对 D 点的动量矩矢量

$$\boldsymbol{K} = \sum m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) \tag{1-16}$$

为了揭示 $\boldsymbol{K}$ 的具体关系式,在此首先引入并矢这一数学量。三个汇交于某一点的正交单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 称为基矢量,它们组成的右手正交参考系称为基,其汇交点称为基点,同一基的基矢量之间满足正交条件。以基矢量排成列阵作为基的表达形式,称为基矢量列阵,记作 $\boldsymbol{e}$,

$$\boldsymbol{e} = [\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3]^T$$

显然

$$\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}^T = I \tag{1-17}$$

I 为三阶单位阵。若矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 基上的投影为 $a_i(i=1,2,3)$,其标量列阵记作 a,

$$\boldsymbol{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T$$

则

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{e} = (a_1, a_2, a_3) \tag{1-18}$$

依序并列的两个矢量称为并矢,例如:

$$\mathsf{P} = \boldsymbol{ab} \tag{1-19}$$

并矢与矢量在运算中遵循如下规则:并矢与矢量的点积为矢量,并矢与矢量的叉积为并矢。其运算不符合交换律。

并矢 P 可用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 在给定基 $\boldsymbol{e}$ 上的坐标表示为

$$\mathsf{P} = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{a} \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^T P \boldsymbol{e} \tag{1-20}$$

三阶方阵 P 称为并矢 P 在 $\boldsymbol{e}$ 上的坐标阵,

$$P = \boldsymbol{e} \cdot \mathsf{P} \cdot \boldsymbol{e}^T = \boldsymbol{ab}^T \tag{1-21}$$

P 的九个元素称为 P 在 $\boldsymbol{e}$ 上的坐标。坐标阵为单位阵的并矢称为单位并矢,记作 $\boldsymbol{I}$,

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e} \tag{1-22}$$

于是,二重叉积可表示如下:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = [(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{ca}] \cdot \boldsymbol{b}$$

利用上式代入(1-16)式,则

$$\boldsymbol{K} = \sum m_i [(\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_i)] \cdot \boldsymbol{\omega}$$

记

$$J = \sum m_i[(\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_i] \tag{1-23}$$

并矢 $\boldsymbol{J}$ 称为火箭相对于 D 点的惯量张量。在与火箭刚性部分相固联的坐标系(即基)中，矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 的坐标列阵 $\boldsymbol{r}_i$ 为

$$\boldsymbol{r}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^{\mathrm{T}}$$

不妨称$(D, \boldsymbol{e})$为以 D 为基点的连体基，则惯量张量 $\boldsymbol{J}$ 利用基矢量写作

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}} J \boldsymbol{e} \tag{1-23*}$$

式中 J 为 $\boldsymbol{J}$ 在$(D, \boldsymbol{e})$上的坐标阵，称为火箭相对于 D 点的惯量矩阵，且

$$\boldsymbol{J} = \sum m_i(\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_i I - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \tag{1-24}$$

其中

$$J_x = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2); \quad J_y = \sum m_i(x_i^2 + z_i^2); \quad J_z = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

$$J_{xy} = J_{yx} = \sum m_i x_i y_i; \quad J_{xz} = J_{zx} = \sum m_i x_i z_i; \quad J_{yz} = J_{zy} = \sum m_i y_i z_i$$

J_x、J_y、J_z 是对各坐标轴的转动惯量，J_{xy}、J_{xz}、J_{yz} 是对脚注坐标面的惯量积。于是动量矩矢量 $\boldsymbol{K}$ 为

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{1-25}$$

类似于上式的推导，式(1－14)等式左边第二项可表示为

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i \times (\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{J} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{1-26}$$

此外

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{a}_D = m\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{a}_D$$

此处 $\boldsymbol{r}_c$ 表示 D 点到火箭质心的矢量。至此，可将式(1－14)写成下型：

$$\boldsymbol{J} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{M} - m\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{a}_D \tag{1-27}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 是将推力矩和燃气力矩视为外力矩时所有力矩对 D 点的合力矩。若不计及质量变化所引起的 $\mathrm{d}t$ 时间内的 $\boldsymbol{J}$ 的变化，则以$\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}$表示动量矩矢量 $\boldsymbol{K}$ 在火箭体固联坐标系内对 t 的导数时，有

$$\boldsymbol{J} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}$$

于是(1－27)式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} - m\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{a}_D \tag{1-28}$$

这表明，只要把推力矩和燃气惯性力矩视为外力矩，则火箭运动遵循刚体的动量矩定理。

为了运算方便，拟将矢量方程用坐标阵形式表示。为此，引入三阶反对称方阵 $\tilde{a}$；若矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 上的投影为 $a_i(i=1,2,3)$，则

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1-29}$$

不难证明如下关系：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d} &= \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}), & \boldsymbol{d} &= \tilde{a}\tilde{b}c \\ g &= \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}), & g &= \boldsymbol{a}^T\tilde{b}c \\ \boldsymbol{f} &= \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{r}, & \boldsymbol{f} &= P\boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{1-30}$$

于是(1－27)式的坐标阵形式为(以黑体字表示的矢量相应的坐标阵以白体字表示)

$$J\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} + \tilde{\omega} J\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M} - m\tilde{r}_c\boldsymbol{a}_D \tag{1-31}$$

§1.4　活动矩心的相对动量矩定理

假设以 D 为原点，角速度为 $\boldsymbol{\omega}_1$ 的动参考系，质点系相对于动参考系的动量矩以 $\boldsymbol{K}^r$ 表示，绝对动量矩为

$$\boldsymbol{K} = \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i(\boldsymbol{v}_{ie} + \boldsymbol{v}_{ir}) = \sum(\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_{ie}) + \sum(\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_{ir})$$

可见 $\boldsymbol{K}$ 为相对动量矩 $\boldsymbol{K}^r$ 与牵连动量矩 $\boldsymbol{K}^e$ 之和。而牵连速度 $\boldsymbol{v}_{ie}$ 为

$$\boldsymbol{v}_{ie} = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_i$$

则

$$\boldsymbol{K}^e = \sum(\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_{ie}) = \sum(m_i\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_D) + \sum m_i\boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_i) = m\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega}_1$$

于是得

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^r + \boldsymbol{K}^e = \boldsymbol{K}^r + m\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega}_1$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}^r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{v}_D) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega}_1) \tag{1-32}$$

又由理论力学知，对活动矩心的动量矩 $\boldsymbol{K}$ 的变化率，等于外力矩 $\boldsymbol{M}$ 加上修正项，此项等于质点系动量 $\boldsymbol{Q}$ 与活动矩心的速度 $\boldsymbol{v}_D$ 之矢量积，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{v}_D \tag{1-33}$$

对于非变组成质点系，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} + m\boldsymbol{v}_c \times \boldsymbol{v}_D \tag{1-34}$$

式中 $\boldsymbol{v}_c$ 是质心速度。将式(1－32)代入式(1－34)，并在动参考系中计及动量矩的变化率，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}^r}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{K}^r + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{v}_D + m\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{a}_D + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega}_1) = \boldsymbol{M} + m\boldsymbol{v}_c \times \boldsymbol{v}_D \tag{1-35}$$

注意到 $\boldsymbol{v}_D \times \boldsymbol{v}_D = 0$ 及 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_C - \boldsymbol{v}_D$，于是得到

$$\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{K}^r}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}_1) - \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{K}^r + \boldsymbol{r}_c \times (-m\boldsymbol{a}_D) \tag{1-36}$$

此式即为质点系活动矩心相对动量矩定理,即:相对于活动矩心的相对动量矩的变化率,等于外力矩加上三个修正项。这些项依赖于质量分布、相对动量分布和动参考系的运动。

作为例子,取弹轴坐标系为动参考系,其转动角速度为 $\boldsymbol{\omega}_1$;全弹转速为 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_\xi$, $\boldsymbol{\omega}_\xi$ 是轴向转速。将

$$\boldsymbol{K}^r = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}_\xi$$

代入式(1-36):

$$\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}_\xi) = \boldsymbol{M} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}_1) - \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}_\xi)$$

而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}_1) = \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}_1) + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}_1)$$

则得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{M} \tag{1-37}$$

§1.5 转移矩阵

弹箭的运动是动态系统,在对运动状态的分析中,常用到转移矩阵,为此需用到有关矩阵指数、状态转移矩阵等知识。

§1.5.1 矩阵指数

考虑矩阵微分方程

$$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(t)\mid_{t=t_0} = \boldsymbol{x}(t_0) \tag{1-38}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维列矩阵(状态变量),$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 定常矩阵。
其解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp[\boldsymbol{A}(t-t_0)]\boldsymbol{x}(t_0) \tag{1-39}$$

定义 exp(At)或 e^A 称为矩阵指数,且

$$\exp(At) = I + At + \cdots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots; \tag{1-40}$$

$$c^A = I + A + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots; \tag{1-41}$$

矩阵指数具有下列性质:

(1)若 $\boldsymbol{A}$ 是对角阵