高等学校轻工专业教材

# 自动机械机构学

熊弟霖　肖正扬　孙武　梁婉莹　编

中国轻工业出版社

高等学校轻工专业教材

# 自动机械机构学

熊弟霖　肖正扬
孙　武　梁婉莹　编



中国轻工业出版社

# 前　言

本书是根据轻工业部轻工机械专业教材编审委员会1982年5月召开的编委会制定的"自动机械机构学"编写大纲编写的。

为了适应轻工自动机械设计的特点，有必要加强机构分析与综合的基础知识，使学生掌握现代机构设计的原理和方法，因此历年来轻工机械专业教学计划中都增设一门"自动机械机构学"。有关院校从1980年开始陆续编印了讲义或补充教材。本书是以各校讲义为基础修订、改编而成的。

绪论和第一、二、三章由大连轻工业学院熊第霖同志编写；第五、六章由西北轻工业学院肖正扬同志编写；第四、七、八章由天津轻工业学院孙武、梁婉莹同志编写。由熊第霖同志汇总主编，由西北轻工业学院詹启贤、彭国勋二同志主审。

1984年7月在大连召开了审稿会，进一步采纳了与会同志提出的意见和建议，最后修改定稿。

由于编者水平所限，谬误之处恳请读者不吝赐教。

编　者　1984.8

# 绪　论

## 一、本课程的任务

现代自动机械主要特征之一是机构复杂。特别是由于运动速度越来越高，为了保证各机构运动的精确配合，对机构的运动和动力特性要求越来越高。例如制造罐装食品用的空罐，70年代以前空罐成形机的生产节拍是每分钟160～380个。而80年代以来已经提高到了每分钟1000个的数量级。

现代自动机械的另一主要特征是用机器代替精密的、高难度的手工劳动。例如高级服装的缝制，传统的生产方式是由少数技艺高超的缝纫师进行单件手工生产。而采用现代服装缝纫机就可以代替这些复杂的、高难度的加工过程。这样不仅可以由单件生产变为成批生产，而且使少数人高超的技艺得以推广，大大提高了产品质量，减轻了工人劳动强度。

此外，在自动化生产过程中，自动化机构的设计也起了决定性的作用。例如，冲压加工是大批量生产广泛采用的工艺过程，冲压加工的主机（冲床）是由机床厂大批生产的定型产品。为了提高产品质量，减轻劳动强度，提高劳动生产率，更为迫切需要的是根据具体的工艺过程设计适当的上下料机构、输送机构，或灵巧的机械手。

由此可见实现高速度、高精度的复杂运动，关键在于设计制造精巧的机构。因此机构的选型和设计已成为现代自动机械设计的核心问题。能否设计制造巧妙适用的机构，在一定程度上决定了这种机械设备的技术性能和使用价值。

“机构学”正是适应现代机械设计的需要而发展的一门学科。“自动机械机构学”则侧重于自动机械设计中最常用的机构的分析与综合。

“机械原理”或“机构学”是机械工程各专业的一门主课。对于以培养机械设计工程师为主要目标的机械设计与制造专业，“机械原理”的重要性更是显而易见。对于以自动机械设计为专业主要方向的学生，在学过“机械原理”之后，增设一门“自动机械机构学”，则是为了满足自动机械设计实践的需要。

因此，本课程的任务是在“机械原理”的基础上，就现代机构设计的原理和方法作必要的补充与深化。

## 二、本课程的地位

（1）本课程与先修课程“机械原理”的差别为：

①“机械原理”以建立概念、阐述基本原理为主，本课程则侧重于设计计算方法。

②“机械原理”比较广泛地涉及各种机构，本课程侧重于自动机械设计中用得最多的几种机构。

③本课程所采用的方法与目前“机械原理”中常用方法有较大的差异。下面还要详述这方面的特点。

（2）在“机械设计与制造”类专业教学计划中通常还有“机械优化设计”、“机器动力学”等必修课或选修课。优化设计和动力学无疑是机构学不可缺少的内容。但既已另设课程，为了避免重复，有关这两方面的内容在本课程中都予省略。从这个意义上说，本课程只限于机构学的最基本的问题。

（3）如前所述，本课程以机构分析与综合为主要内容。在“自动机械设计”中还要详述机构的造型与设计，因此本课程作为一门先修课为“自动机械设计”提供必要的基础。

## 三、机构学的基本内容

让我们先复习一下几个熟知的基本概念，例如什么是机器、机构。虽然这些概念早已有过适应当时生产发展水平的定义，而且在“机械原理”中已经阐述过，但是由于现代机器制造的迅速发展，使这些古老的概念不断地补充了新的含义。

关于机器的传统定义可以表述为：机器是按照一定的运动规律，利用自然力作用的装置。即机器是传递力、用以代替人的体力作功的装置。

由于机器的发展，使“机器的含义发生了变化，传统的定义逐步被更广泛的定义所替代。现代化的机器可以这样定义：机器是一种作机械运动的装置，用来变换能量、材料和信息，以代替或减轻人的体力劳动和脑力劳动。

所谓材料是指被加工的对象、被搬运的物体，总之一切工作对象都可以称为材料。

机器与其它装置的不同是做机械运动，通过机械运动来变换能量、材料或信息。根据所实现的变换的不同，机器可以分为动力机器、加工机器、输送机器、信息机器。

在以后的讨论中主要是指加工机器，通过加工机器变换材料的尺寸、形状、状态或物理化学性质。例如印刷机械则主要是改变被加工对象（油墨和纸）的状态。包装机械则主要是改变被加工对象（包装箱或包装材料）的尺寸、形状。

关于机构的概念也有不少变迁。目前一般通用的定义是：机构是几个相互接触的物体所组成的系统。它可以按一定的要求将其中某个或某几个物体的运动变换成系统中其它物体的运动。组成机构的物体称为机构的构件。这些物体可以是刚体、挠性体、变形体，也可以是气体或液体。本课程中所讨论的机构构件则以刚体为主。

变换机械运动是机构的主要特征。也就是说没有机械运动变换的装置并不能称为机构。例如电动机由转子：定子和轴、轴承等组成，但这个系统不能称为机构。虽然电动机可以转换能量，即将电能转换为机械能，但并没有机械运动的变换。

通常机构是机器的重要组成部分。例如加工机器中总是需要把原动机的运动变换成所需要的各种运动，齿轮机构是用得最多的减速机构；齿轮-齿条是将旋转变换成直线运动的机构；曲柄-摇杆机构是将旋转变换成为往复摆动的机构。

并不是所有机器中必定包含机构。即使加工机器中也不一定有机构，例如可以通过直线电机来实现直线运动，并不需要通过变换机构将旋转电机的旋转变为直线运动。

当然机构毕竟还是大多数机器中最重要的组成部分。

机构学的基本内容是机构分析与机构综合。前面已经提到动力学的内容不包含在本课程中。

机构分析是根据给定的机构运动简图，来研究机构的运动特性和动力特性；机构综合是根据要求的特性来设计机构简图，通常简称为机构设计。但必须重复指出这里所说设计是简图设计，也称为综合设计。

分析与综合是性质完全不同的两个过程。进行分析之前总是假定问题已有解答，而且分析所用的方法通常是稳定可靠的。在综合设计中却完全不同，首先并不是预先就知道满足约束条件的解答，而必须通过迭代搜索，在满足约束条件的可能解答中寻求最佳的解。但是这种解答并不一定总是确实存在的，也就是说并不能保证搜索过程一定是收敛的。

当然把机构学分为分析与综合只是从方法上说，是有条件的。事实上综合过程中往往包含着分析。最常用的一种综合方法就是以分析为基础的迭代计算，即初步选定一组参数进行分析，如果不能满足给定的约束条件，即不能满足预定的要求，则修改某些参数再进行分析，直到选出满足要求的最佳参数为止。

例如在凸轮设计时就可以采用这种以分析为基础的迭代计算方法。首先初步选定凸轮的基圆半径，然后按要求的运动规律计算凸轮轮廓上各点的压力角及曲率半径。发现压力角超过许可值或曲率半径小于许用的范围，则增大基圆半径或修改其它参数重新计算，直到各点的压力角和曲率半径都满足要求为止。

以分析为基础的迭代计算，逐步寻求最佳的解答，这种方法已经具有优化设计的性质。但从现代优化设计的观点来看还不是严格的优化设计。因为在迭代计算过程中，每一步参数的修改还带有经验性，而且每一步参数的调整都是人工的而不是自动进行的，本质上还是试凑法。现代优化设计则是以数学规划为基础，每一步迭代计算都是由计算机自动修改参数，自动搜索最佳解答。由于机构优化设计不属于本课程的内容，故不详述。

在本课程中根据自动机械设计的需要，并且与先修课及有关后续课避免不必要的重复，确定以下基本内容。

（1）连杆机构的分析与综合；

（2）凸轮机构的分析与综合；

（3）间歇运动机构；

（4）组合机构。

（1）、（2）两部分是本课程的基础，注重在原理和方法上自成体系。（3）、（4）两部分则偏重于应用。特别是组合机构型式繁多，难于找到一般性的设计原理，只能就几种实例说明具体的设计方法。

## 四、本课程所采用的基本方法

长期以来，机构的分析与综合都是以图解法为主。其优点是简明易懂，便于应用。工程设计中一般也不要求很精确的解答，许多场合用近似的图解法就可以满足需要。因此到目前为止，图解法仍不失为工程师日常工作中的简捷方法。

图解法可以提供直观的形象和明显的意义。在方案设计阶段利用图解法有助于开扩思路，人们往往把图解法作为一种启发思维的手段。

以图解法所及的近似解作为迭代计算的初始值，

但是图解法固有的缺点是精确度不高．在精度要求较高的场合，图解法就无能为力了。同时图解法只适用于比较简单的问题，对于比较复杂的问题一定要勉强去用图解法往往事倍功半，这一点在机械原理中用图解法分析机构的速度、加速度已经有所体会。对于一个中等复杂程度的杆机构，用图解法求构件上某一点在某一时刻的速度、加速度已经相当麻烦，如果要求在一个循环周期中任意一点任意时刻的速度、加速度，用图解法就会显得十分困难。

早期机构学的发展与图解法密切相关，这是由于机构学问题的运动方程往往是非线性的，通常都是比较复杂的超越方程组。在使用计算机以前，这种非线性方程的求解是十分困难的。即使在方法上完全可以解决，但限于实际计算工作量太大，不能不令人望而生畏。

由于计算机的广泛使用，整个工程计算的面貌完全改观了。反映在机构学所采用的方法上也是如此。无论是非线性代数方程组，还是微分方程组，用计算机求解通常都是轻而易举。客观上就使工程师可以摆脱繁琐的图解作业，而采用更精确更省力的方法，以至自动化设计。正如对于整个科学技术工作一样，计算机的使用使机构学的发展出现了崭新的阶段。

近年来电子计算机日益普及，平均价格逐年大幅度下降。特别是微型机及个人计算机的迅猛发展，一般小型企业或实验室配备功能完备、存储量可观的微型机系统，已经并不困难。可以预计以微型机或个人计算机作为每个工程师日常计算工具的时期很快就要到来。

作为培养设计工程师的专业，使学生在校期间不仅具有使用计算机的能力，而且要有这种工作和思维的习惯，并达到一定的熟练程度，无疑是十分必要的。目前高等专业学校都已配备多终端小型机或微型机系统，因此使这种必要性变为可能性已经具备物质基础。

根据工程设计的要求和机构学发展的现状，数值解析法将作为本课程的基本方法。对基本原理和方法的阐述，以至最后的应用都考虑到便于用计算机求解。并要求学生在学习过程中或课程设计中能自行编制程序，独立地完成若干个作业。当然对于比较简单的问题也可以用计算器求解。

为了与现有机械类专业学生的基础知识相适应，只采用已学过的工程数学和数值计算方法。

总之，本课程从实际应用出发，以数值解析方法作为主要方法．图解法则作为必要的补充。

## 五、本课程的内容结构

根据自动机械设计的需要，并考虑到目前教学计划有关先修课及后续课的安排，本书内容分为四部分：

（1）连杆机构的分析与综合（第一至第四章）；

（2）凸轮机构的分析与综合（第五至第六章）；

（3）间歇运动机构（第七章）；

（4）组合机构（第八章）。

连杆机构以平面杆机构运动分析为主，介绍动力分析与平衡的基本知识。空间杆机构的分析与综合作为选修内容。

凸轮机构以平面凸轮分析与综合为主，介绍高速凸轮的基本概念。有关空间凸轮的知识安排在间歇运动机构中。虽然基本原理和方法是以平面凸轮为基础，但在实例应用上空间凸轮通常作为间歇运动机构。

连杆机构和凸轮机构是本课程的基础，在内容和方法上尽可能自成体系。间歇机构与组合机构虽然在生产实际中已广为应用，但由于这些机构形式繁多，目前还缺少普遍性的设计原理和方法。从教学上看这两部分内容可能显得庞杂。本书根据实际条件和需要选择几种典型，不一定按顺序逐一讲解。

工业机器人是自动机械中一个主要的、迅速发展的方向，而且机器人机构学已经成为机构学的一个重要分支。限于目前教学计划与选修课程内容安排，本课程中还不可能系统阐述机器人机构学，而只能通过简单实例介绍机器人机构学的基本知识。

# 目录

# 第一章　平面连杆机构运动分析

机构运动分析的任务是按已知的机构运动简图及主动件运动规律，确定其它构件的运动。对于连杆机构来说，已知机构运动简图就是在结构简图上标注了进行运动分析所必需的尺寸。机构运动分析的基本内容是：

（1）求构件的位置，包括求构件上特定点的运动轨迹。

（2）求构件的角速度及角加速度，或构件上特定点的速度、加速度。

连杆机构运动分析的图解法在“机械原理”中已学过。由于电子计算机的普及，在机构运动分析中解析法得到了广泛应用，因此本课程中以解析法为主。

机构运动分析有各种不同的解析方法。最为通用的是矢量法和旋转矩阵法（即座标变换法）。对于平面问题矢量法较为简便，而且在解空间问题中矢量法也引起了相当重视[1]。本章是平面连杆分析，所以以矢量法为主。这种方法将贯穿在以下各章的平面机构运动分析中。下一章将介绍位移矩阵法，以便过渡到第四章空间连杆机构分析所采用的旋转矩阵法。

由于工业机器人的广泛应用，机器人机构学得到了迅速发展。开式链杆机构的分析与综合也已成为重要的实际问题。由于篇幅所限，只能在本章第三节简单介绍机器人机构学。

## 第一节　矢　量　法

### 一、用矢量表示连杆上一点的位置

描述一个或多个无约束的质点运动，最好是用笛卡尔座标或极座标。但任何机构都是一个相互连接的质点系或刚体系。每个构件的运动都是相互制约的。对于这种有约束的系统，用笛卡尔座标系就显得麻烦。矢量法是描述有约束系统的运动的简便工具。

例如图1-1所示杆机构上某点D的位置可以用矢量**a**表示

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3 \qquad (a)$$

其中　$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$分别为各杆AB、BC、CD的矢量。

为了便于计算，通常用复数表示矢量，即

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1&=a_1e^{i\phi_1}\\ \boldsymbol{a}_2&=a_2e^{i\phi_2}\\ \boldsymbol{a}_3&=a_3e^{i\phi_3}\end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

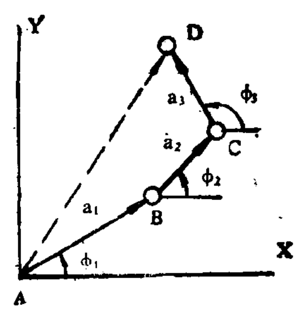

图 1-1　用矢量表示D点位置

$a_1$、$a_2$、$a_3$及$\phi_1$、$\phi_2$、$\phi_3$分别是各个矢量的模及幅角。注意度量幅角时必须用统一的、固定的坐标轴方向。

将（b）代入（a），分别取复数的实部和虚部，即得D点在固定的x-y座标系中的座标$x_D$，$y_D$

$$\left.\begin{aligned}X_D&=a_1\cos\phi_1+a_2\cos\phi_2+a_3\cos\phi_3\\Y_D&=a_1\sin\phi_1+a_2\sin\phi_2+a_3\sin\phi_3\end{aligned}\right\}\qquad(c)$$

## 二、四杆机构的位置分析

四杆机构是最基本的杆机构。其它杆机构都是以此为基础的演化发展。因此杆机构的运动分析也是以四杆机构为基础。

四杆机构位置分析的任务是已知输入角 $\phi_1$ 及各杆长度$a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$确定各杆位置。也就是说已知$\phi_1$ 求$\phi_2$及$\phi_3$（图1-2）因为四杆机构是一个单自由度系统，已知输入角$\phi_1$，系统的位置就完全确定了。

为了使问题简化，作辅助线DB，将四边形划分为 两个三角形。

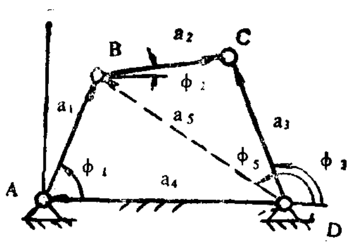


图 1-2　四杆机构位置分析

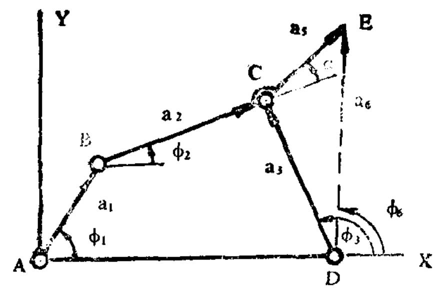


图 1-3　连杆BC平面上E点位置分析

在△ABD中，设矢量$\boldsymbol{a}_5$的模$a_5$＝BD，幅角为$\phi_5$。在此三角形中与三边对应的矢量分别为$\boldsymbol{a}_4$、$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_5$。它们的关系式是：

$$\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_5$$

即
$$a_4e^{i\phi_4}+a_1e^{i\phi_1}=a_5e^{i\phi_5}\qquad(1—1)$$

因为$\boldsymbol{a}_4$沿$x$轴的负方向，所以$\phi_4=\pi$。（1—1）式称为△ABD的回路方程。

对（1—1）式两边分别取实部及虚部得方程组

$$\left.\begin{aligned}-a_4+a_1\cos\phi_1&=a_5\cos\phi_5\\a_1\sin\phi_1&=a_5\sin\phi_5\end{aligned}\right\}\qquad(1—2)$$

已知$a_1$、$a_4$及$\phi_1$就可以解出$a_5$，即在三角形中已知两边的长度及相应的幅度，可以求第三边的长度及相应的幅角。

考虑△DBC，同样写出回路方程

$$a_5e^{i\phi_5}+a_2e^{i\phi_2}=a_3e^{i\phi_3}$$

由此可得方程组

$$\left.\begin{aligned}a_5\cos\phi_5+a_2\cos\phi_2&=a_3\cos\phi_3\\a_5\sin\phi_5+a_2\sin\phi_2&=a_3\sin\phi_3\end{aligned}\right\}\qquad(1—3)$$

已知$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$、$\boldsymbol{a}_5$及$\phi_5$就可以解出$\phi_2$、$\phi_3$。这就是已知三角形三边长度及与一边相对应的幅角，可以确定与其它两边相对应的幅角。

在这里说明一下：由于这个方法的基础是矢量-复数的表达形式，所谓与一边相对应的幅角，严格地说应该是与某一边相对应的矢量的幅角。为了避免叙述罗嗦，在这里设定，以后凡是提到一边的幅角，都是指与这一边相对应的矢量的幅角。这就是说所谓某一边就是指某一个矢量。

至此为止就完全确定了四杆机构的位置。

将这个方法推广应用就可以解决所有简单的平面连杆机构的运动分析问题。关于简单与复杂的概念下面再讲。

例如要确定图 1-3 所示四杆机构的连杆上一点E的位置。能够确定任意时刻的位置也就可以确定该点的运动轨迹。因此，求构件的位置问题就包含了求轨迹的问题。

根据上述两个步骤，给定主动件输入角$\phi_1$就可以确定$\phi_2$、$\phi_3$。然后再考虑三角形DCE，因为E点是连杆BC平面上的定点，即BC与CE的夹角$\alpha$为已知。杆CE的长度$a_5$也是已知的。因此在三角形DCE中$\boldsymbol{a}_3$、$\phi_3$及$\boldsymbol{a}_5$、$\phi_5$（$\phi_5=\phi_2+\alpha$）为已知，求$\boldsymbol{a}_6$及$\phi_6$。这又是在三角形中已知两边长度及相应幅角求第三边的长度及幅角的问题。

## 第二节　简单平面连杆机构

### 一、闭式链平面连杆机构分类

由上例可见，任何闭式链杆机构总是可以划分为若干个封闭的回路，这些封闭回路的基本单元就是闭合三角形。即与三角形三边对应的矢量是闭合的。

作为封闭回路的基本单元——闭合三角形，其中包括三个边长和三个幅角。共有六个参数。每个封闭回路可以列出两个回路方程。通过这两个方程可以解出两个未知数。即如果闭合三角形中六个参数有四个是已知的，则其余的两个未知数可以利用该回路的回路方程解出。即在求解这个三角形时并不需要考虑其它三角形。也就是说连杆系中各个回路相互独立。

如果闭式链杆机构的基本回路（闭合三角形）中只包括两个未知数，由这种基本回路组成的杆机构称为简单连杆机构。

有些闭式链杆机构的基本回路中，可能有些回路的未知数超过两个，而另一些回路中未知数少于两个，在求解这种杆机构时，必须将几个回路联立起来。

连杆系统中有一个或几个闭合回路中所包含的未知数（边长或幅角）超过二个，由这种回路所组成的杆机构称为复杂杆机构。关于复杂杆机构的运动分析在下节叙述。

由于简单连杆机构每个基本单元（三角形）只包含二个未知数，而每个基本单元都可以列出两个方程（平面问题），恰好可以解出这二个未知数。因此对于简单平面杆机构的分析，可以先从某个基本单元入手，逐步推出其它回路，最终解出全部未知数。

最后还要强调，机构的复杂程度并不是由构件的多少来确定。构件数目虽然很多，如果基本回路都是相互独立的，就可以逐个用简单方法求解。

图1—4是一种抱合机械手的结构示意图，这种机械手是空罐（食品罐装用）自动成形机的主要机构。它的运动是通过曲柄BC带动连杆系来完成抱合手爪的往复摆动，将马口铁薄板抱合成圆筒形。这是一个 8 杆机构，但仔细分析就会发现这个系统仍然是简单

连杆机构。因为所有基本回路都只包含二个未知数（图1-5）。

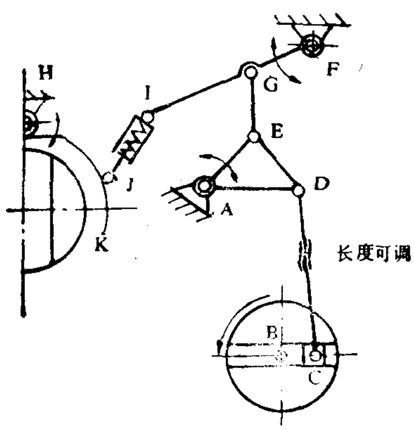


图 1-4　抱合机械手结构示意图（右半部）

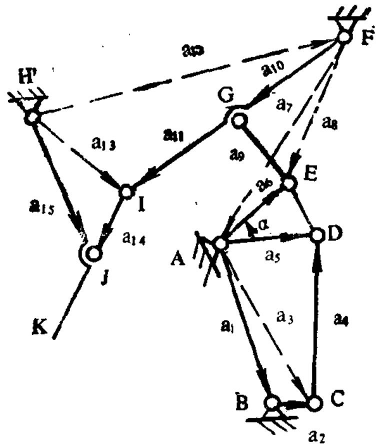


图 1-5　抱合机械手矢量图

可按如下步骤进行位置分析：

（1）解△ABC：已知矢量$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$求$\boldsymbol{a}_3$

因固定铰A、B位置为已知，即矢量$\boldsymbol{a}_1$为已知。给定曲柄BC的长度及输入角，即矢量$\boldsymbol{a}_2$为已知。

（2）解△ACD：已知$\boldsymbol{a}_3$及$\boldsymbol{a}_4$、$\boldsymbol{a}_5$的长度求它们的幅角。

（3）解△AFE：已知$\boldsymbol{a}_6$、$\boldsymbol{a}_7$求$\boldsymbol{a}_8$

因EA的长度为已知，且EA与AD的夹角$\alpha$为已知，即确定矢量$\boldsymbol{a}_5$之后，矢量$\boldsymbol{a}_6$可以确定。又A、F都是固定铰，所以矢量$\boldsymbol{a}_7$为已知。

（4）解△EFG：已知矢量$\boldsymbol{a}_8$及$\boldsymbol{a}_9$、$\boldsymbol{a}_{10}$的模求$\boldsymbol{a}_9$、$\boldsymbol{a}_{10}$的幅角。

因EG、FG的长度都是已知的。

（5）解△HFI：已知矢量$\boldsymbol{a}_{11}$、$\boldsymbol{a}_{12}$求$\boldsymbol{a}_{13}$。

因H、F都是固定铰，矢量$\boldsymbol{a}_{12}$为已知。$\boldsymbol{a}_{11}$的长度为FI，幅角与$\boldsymbol{a}_{10}$相同。

（6）解△HIJ：已知矢量$\boldsymbol{a}_{13}$及$\boldsymbol{a}_{14}$、$\boldsymbol{a}_{15}$的模求$\boldsymbol{a}_{14}$及$\boldsymbol{a}_{15}$的幅角。

因长度IJ及HJ都是给定的。

至此为止整个机构的位置分析已经完成。

从此例中可以看出，每一步计算，许多工作都是重复的。只要编出程序，代入数据，很容易用计算机求解。这就是下面所要讲的三角形解法。

## 二、简单平面杆机构的三角形解法

由以上几个例子说明简单平面杆机构的运动分析可以归结为求解三角形。闭合三角形由三个矢量组成，每个矢量由模及幅角所确定。因此解三角形的问题就是在六个参数中已知任意四个求解其余两个。从形式上可以分为以下四种情形：

（1）已知二矢量的模及相应的幅角，求第三矢量的模及幅角。

（2）已知三个矢量的模及其中一个幅角，求其余二矢量的幅角。

（3）已知一矢量的模及三个幅角，求其余二矢量的模。

（4）已知第一个矢量的模及幅角，已知第二个矢量的模及第三个矢量的幅角，求第二个矢量的幅角及第三个矢量的模。

下面分别叙述这四种情形的算法。有关的BASIC语言子程序（参见第四节。）

1．第一种情形

如图1-6所示，在闭合三角形中已知$a_1$、$a_2$、$\phi_1$、$\phi_2$，求$a_3$、$\phi_3$。

注意每个矢量的幅角必须按统一的座标轴方向量度。

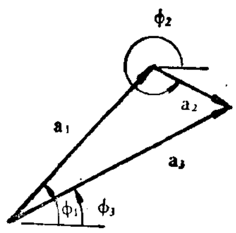


图 1-6　第一种情形

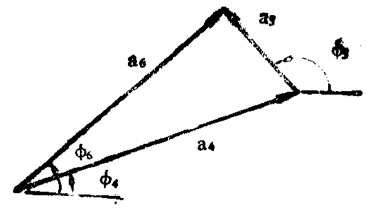


图 1-7　第二种情形

由复数方程

$$a_1 e^{j\phi_1} + a_2 e^{j\phi_2} = a_3 e^{j\phi_3} \tag{1—4}$$

导出超越方程组

$$\left.\begin{aligned} a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2 = a_3\cos\phi_3 \\ a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2 = a_3\sin\phi_3 \end{aligned}\right\} \tag{1—5}$$

由此可以解出$\phi_3$

$$\phi_3 = arctg\left(\frac{a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2}{a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2}\right. \tag{1—6}$$

已知$\phi_3$就很容易由式（1-5）解出$a_3$

$$a_3 = a_1\cos(\phi_1 - \phi_3) + a_2\cos(\phi_2 - \phi_3) \tag{1—7}$$

2．第二种情形

在三角形中已知$a_4$、$a_5$、$a_6$及$\phi_4$，求$\phi_6$、$\phi_5$（图1-7）。

由复数方程

$$a_4 e^{j\phi_4} + a_5 e^{j\phi_5} = a_6 e^{j\phi_6} \tag{1—8}$$

导出超越方程组

$$\left.\begin{aligned} a_4\cos\phi_4 + a_5\cos\phi_5 = a_6\cos\phi_6 \\ a_4\sin\phi_4 + a_5\sin\phi_5 = a_6\sin\phi_6 \end{aligned}\right\} \tag{1—9}$$

将各式两边平方后相加即得

$$a_4^2 + a_5^2 + 2a_4a_5\cos(\phi_5 - \phi_4) = a_6^2$$

由此可以直接解出$\phi_5$。但考虑到有些计算机的标准函数中没有反余弦而只有反正切，所以需要先算出$\sin(\phi_5 - \phi_4)$。

令　$$C_1 = \cos(\phi_5 - \phi_4) = \frac{a_6^2 - a_4^2 - a_5^2}{2a_4a_5} \tag{a}$$

则　$$S_1 = \sin(\phi_5 - \phi_4) = \pm\sqrt{1 - c_1^2} \tag{b}$$

根号前面的正负号根据矢量$a_4$与$a_5$的相对方位而定。以矢量$a_4$方向为X轴方向（图

1-8）。当矢量$\boldsymbol{a}_5$在第一、二象限时$\sin(\phi_5-\phi_4)$为正，根号前取正号；当$\boldsymbol{a}_5$在第三、四象限时根号前面取负号。

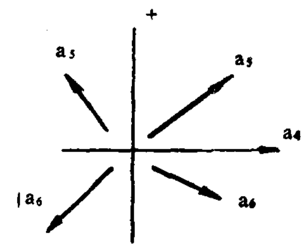


图 1-8　按象限判断符号

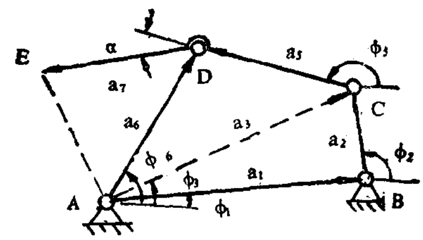


图 1-9　挑线杆机构矢量图

根据（a）、（b）两式可以计算幅角$\phi_5$

$$\phi_5=\phi_4+arctg(S_1/C_1) \tag{1—10}$$

由式（1—10）算出$\phi_5$以后代回（1—9）式，就可以算出$\phi_6$。

$$\phi_6=arctg\frac{\boldsymbol{a}_4\sin\phi_4+\boldsymbol{a}_5\sin\phi_5}{\boldsymbol{a}_4\cos\phi_4+\boldsymbol{a}_5\cos\phi_5} \tag{1—11}$$

**例1**　求缝纫机挑线杆机构挑线的运动轨迹。

四杆机构式挑线机构是利用挑线孔的轨迹及几个转折点的运动特性来拉紧缝线。图1-9是机构矢量图。

已知各杆尺寸为$\boldsymbol{a}_1=44$，$\phi_1=10^\circ$，$\boldsymbol{a}_2=20$，$\boldsymbol{a}_5=22.5$，$\boldsymbol{a}_6=19$，$\boldsymbol{a}_7=37$、$\alpha=5^\circ$，BC为曲柄，$\phi_2$为输入角。求曲柄旋转360°时挑线孔E的轨迹。

（1）考虑△ABC。给定输入角$\phi_2$，已知$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\phi_1$解出AC的长度$\boldsymbol{a}_3$及幅角$\phi_3$（第一种情形）。

（2）考虑△ACD。已知$\boldsymbol{a}_3$、$\phi_3$、$\boldsymbol{a}_5$、$\boldsymbol{a}_6$求幅角$\phi_5$、$\phi_6$（第二种情形）。

（3）考虑△ADE。已知$\boldsymbol{a}_6$、$\phi_6$、$\boldsymbol{a}_7$、$\phi_7$（$\phi_7=\phi_6+\alpha$），求AE及幅角（第一种情形）。

将已知数据代入，由如下程序就可以打印出输入角$\phi_2$旋转360°（每隔5°）E点的轨迹。

```
5  PRINT "    X                    Y"
20  A1=44:T1=3.1415926/18:A2=20
25  FOR K=0 TO 359 STEP 5
30  T2=3.1415926*K/180:GOSUB 1100:REM CASE 1
40  A4=A3:T4=T3:A5=22.5:A6=19:I=1:GOSUB 1200:REM CASE 2
50  A1=A6:T1=T6:A2=37:T2=3.14159/36:GOSUB 1200:X=A3*COS(T3):Y=A3*
    SIN(T3)
60  PRINT X, Y
   NEXT K
80 END
```

以上调用的子程序及参数I见本章（第四节）。

3. 第三种情形

在三角形中已知$\boldsymbol{a}_1$、$\phi_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\phi_3$求$\phi_2$、$\boldsymbol{a}_3$（图1-6）。

将式（1—5）重写如下：

$$\boldsymbol{a}_1\cos\phi_1+\boldsymbol{a}_2\cos\phi_2=\boldsymbol{a}_3\cos\boldsymbol{\phi}_3 \tag{a}$$

$$\boldsymbol{a}_1\sin\phi_1+\boldsymbol{a}_2\sin\phi_2=\boldsymbol{a}_3\sin\boldsymbol{\phi}_3 \tag{b}$$

由（a），（b）式消去$\boldsymbol{a}_3$得

$$\boldsymbol{a}_2\sin(\phi_2-\phi_3)=-\boldsymbol{a}_1\sin(\phi_1-\phi_3)$$

即

$$\sin(\phi_2-\phi_3)=-\boldsymbol{a}_1\sin(\phi_1-\phi_3)/\boldsymbol{a}_2 \tag{c}$$

由（c）似乎可以直接解出$\phi_2$，因其中$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\phi_1$，$\phi_3$都为已知，事实上并不能由（c）计算$\phi_2$，因为无法确定反正弦在哪个象限。为此先要由（c）算出$\cos(\phi_3-\phi_3)$，即

$$\cos(\phi_2-\phi_3)=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{a}_1\sin(\phi_1-\phi_3)}{\boldsymbol{a}_2}\right)^2} \tag{1—12}$$

右边的正负号是根据三角形中$\boldsymbol{a}_2$及$\boldsymbol{a}_3$两边的相对位置来确定的。正如在第二种情形中已讨论过的。矢量$\boldsymbol{a}_2$及$\boldsymbol{a}_3$的夹角是锐角时（不论是顺时针还是反时针方向）取正，是钝角时取负。这样才能导出$\phi_2$的计算公式

$$\mathrm{tg}(\phi_2-\phi_3)=s/c$$

其中$S=-\boldsymbol{a}_1\sin(\phi_1-\phi_2)/\boldsymbol{a}_2$，$C=\pm\sqrt{1-s^2}$

由此即得

$$\phi_2=\phi_3+arctg(s/c) \tag{1—13}$$

4. 第四种情形

在三角形中已知$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$及$\phi_1$求$\phi_2$、$\phi_3$（图1-6）

这种情形的算法与第三种情形类似，可以留做练习或参看〔5〕。

## 三、速度、加速度分析

对表示位置的矢量（复数）方程求导一次即得速度，再求导一次即得加速度。由于实际问题中最常用的是上述第一、二两种情形，所以下面只推导这两种情形的速度、加速度表达式。其余两种情形可以用类似方法导出。

按照三角形解法进行速度分析、前提是位置分析已完成。即三角形各边长度及相应幅角都已确定。同理，加速度分析的前提是位置、速度分析都已完成。所有BASIC语言子程序参见本章第四节。

1. 第一种情形

（1）速度分析：除已知三角形边长及相应幅角以外，还要已知两个边及其幅角对时间的导数。即已知$\boldsymbol{a}_1$、$\phi_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\phi_2$、$\boldsymbol{a}_3$、$\phi_3$，又知$\dot{a}_1$、$\dot{a}_2$、$\dot{\phi}_1$、$\dot{\phi}_2$，求第三边及其幅角对时间的导数$\dot{a}_3$、$\dot{\phi}_3$。

由式（1—4）两边对时间求导得：

$$\dot{a}_1e^{j\phi_1}+ja_1\dot{\phi}_1e^{j\phi_1}+\dot{a}_2e^{j\phi_2}+ja_2\dot{\phi}_2e^{j\phi_2}=\dot{a}_3e^{j\phi_3}+ja_3\dot{\phi}_3e^{j\phi_3} \tag{1—14}$$

（1-14）各项的物理意义是明显的。左边第一项表示沿矢量$\boldsymbol{a}_1$的速度，第二项是角速