高等学校理工科文化补习試用教材

初等数学

解析几何

北京市高等院校数学教材编写组编

人民教育出版社

为了贯彻执行毛主席关于**“走上海机床厂从工人中培养技术人员的道路”**的指示，适应教育革命的需要，我们编写了《初等数学》作为理工科大学工农兵学员文化补习试用教材。

本书是在北京各院校文化补习教学实践的基础上编写的。编写大纲及初稿，曾得到部分学员和教师的评审。全书共分五册，即《初等代数》、《初等几何》、《三角函数》、《解析几何》及《公式和数表》。

编写过程中，我们试图打破书本与实践脱节、烦琐哲学的旧体系，联系三大革命的实际，突出基本规律及其辩证发展的线索，以便有助于培养学员分析问题和解决问题的能力。

本书的基本内容大体上反映了理工科各专业对初等数学的要求。由于各专业在教学要求和文化补习安排上有所不同，学员文化程度有差别，编写时，我们注意使本书能够适应上述不同情况。为此：

1. 列入了预备知识。初一程度的可以从预备知识开始学习，初二、三程度的可以从基本内容的有关章节开始学习。

2. 列入了选学内容，约占全书的四分之一。可以根据各专业教学的可能和不同的需要选用，也可供学员结合实践需要自学。

3. 基本内容中章节顺序可以适当变更。如在《初等代数》中，变数、坐标、图象和一次、二次函数是逐步出现的，到《三角函

数》中才概括为一般函数概念．但这些内容大都是独立成节的，因此也可以集中起来学．基本内容的深度也分了层次，以便在教学中取舍。

遵照毛主席关于“**要自学**”的指示，本书在基本规律的说明和例解方面比较详细，配置了较多的练习题，基本内容中各章有小结，每册末有总结．因此，本书也可作为具有高小毕业以上文化程度的工农兵青年自学之用。

由于我们受思想水平、实践经验的局限，本书离“**教材要彻底改革**”的要求差距很大．定稿时间仓促，没有能够更广泛的征求意见，有些缺点，如篇幅还偏大，基本规律提炼不够，有的地方叙述流于琐细等问题，未能进一步解决．热烈欢迎使用本书的同志提出宝贵意见。

一九七三年六月

目　录

基 本 内 容

选　学　内　容

基 本 内 容

第一章　曲线和方程

初等几何中讨论了直线和圆的性质．实际应用中，还常遇到其他的曲线．例如，行星运动的轨道是椭圆，抛射体运动的轨道是抛物线，凸轮的轮廓线有的是螺线等．研究直线和圆以外的曲线，初等几何的方法就不够用了．实践中分析物体运动的规律，引进用坐标确定位置的方法，从而产生了解析几何．

在初等代数中已经学过，数轴上的点和实数之间有一一对应关系；在直角坐标系中，平面上的点和实数对(x, y)之间有一一对应关系．因而数轴上一个定点可以用一个实数表示，平面上一个定点P_0可以用一对实数(x_0, y_0)表示(图 1-1)．

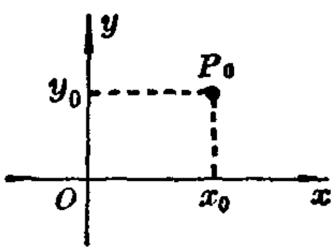


图　1-1

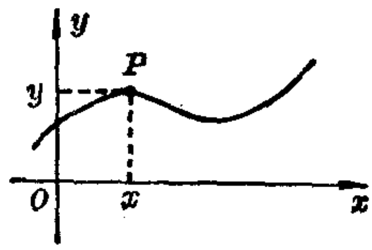


图　1-2

曲线可以看作是动点按照某种规律运动的轨迹(图 1-2)，曲线上动点P的坐标x和y是一对变量，它们应该满足一定的关系．这种关系用代数方法表示出来，就是包含x、y两个变量的一个二元方程．因此，对于曲线性质的研究，就可以转化为对相应的代数方程的讨论．

简单说，解析几何就是用代数方法研究几何图形性质的学

科．它是在初等几何和初等代数的基础上，通过坐标系把两者结合而发展起来的．

这一章讨论两个基本问题：如何利用坐标表示基本的几何量——线段长度；在坐标系中曲线和方程的关系．

第一节　距离和中点

线段长度是一种基本几何量．因此，在用坐标法研究几何图形之前，先讨论利用坐标研究线段长度的方法．重点是计算两点间的距离和求中点坐标的方法．

距　离　公　式

物体的位移是既有大小又有方向的量．在解析几何中，表示这种有大小又有方向的量用有向线段．如图 1-3，设物体在 ox 轴上作直线运动，它由 A 点到 B 点的位移，用有向线段 AB 表示；由 B 点到 A 点的位移，用有向线段 BA 表示．

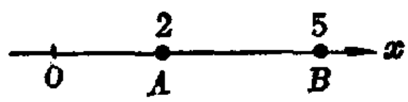


图　1-3

这两个位移大小相等、方向相反．因此，有向线段 AB 和 BA 也是大小相等、方向相反的量．

在数轴上的有向线段，可以用数量来表示．如图 1-3，在 ox 轴上的有向线段 AB，它的大小就是有向线段的长度，即 3 个单位，它的方向和 ox 轴的方向相同，我们用正数表示，即

$$AB=+3.$$

有向线段 AB 的大小和方向由 $+3$ 这个数完全表示出来了．同样，有向线段 BA 的长度也是 3，但方向和 ox 轴相反，用负数表示，即

$$BA=-3.$$

因此，有向线段 AB 和 BA 有如下的关系：

$$AB=-BA.$$

既表示了有向线段的大小、又表示了有向线段方向的数，叫做有向线段的数量.

解析几何中的线段，常指有向线段. 对于有向线段，要注意两个字母的次序. 写在前面的字母表示有向线段的起点，写在后面的字母表示有向线段的终点.

在数轴上，有向线段 AB 的数量和 A、B 两点的坐标有密切的关系. 它恰好等于终点 B 的坐标减起点 A 的坐标，如图 1-3，有

$$AB=5-2=+3.$$

同样，BA 的数量恰好等于终点 A 的坐标减起点 B 的坐标，即

$$BA=2-5=-3.$$

一般地说，如果在 ox 轴上，A 点的坐标是 x_1，B 点的坐标是 x_2（图 1-4），那么

$$AB=x_2-x_1, \qquad (1)$$
$$BA=x_1-x_2.$$

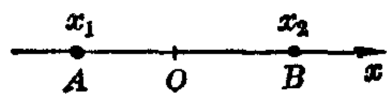


图 1-4

自己分析一下，不论 A、B 两点在 x 轴上的位置如何，(1)式都成立.

有向线段 AB 的长度，用 $|AB|$ 表示，也叫做 A、B 两点的距离. $|AB|$ 不是负数. 如图 1-4，

$$|AB|=|x_2-x_1|. \qquad (2)$$

显然，
$$|AB|=|BA|.$$

(1)、(2) 是数轴上 AB 的数量和长度的计算公式.

在平面上，如果一条有向线段和坐标轴平行，它的数量仍旧

可以用这条有向线段的两个端点的坐标表示出来. 如图 1-5, 有向线段 AB 的方向和 x 轴相同, 它的数量为

$$AB=x_2-x_1, \quad (>0)$$

而有向线段 BA 的方向和 x 轴相反, 它的数量为

$$BA=x_1-x_2. \quad (<0)$$

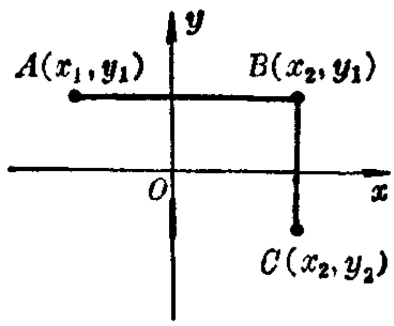


图 1-5

同样, 有向线段 CB 和 BC 是平行于 y 轴的, 方向一正一反, 它们的数量为

$$CB=y_1-y_2, \quad (>0)$$

$$BC=y_2-y_1. \quad (<0)$$

当然, 从有向线段的长度看, 总有

$$|AB|=|BA|,$$

$$|CB|=|BC|.$$

现在来讨论平面上任意两点间的距离.

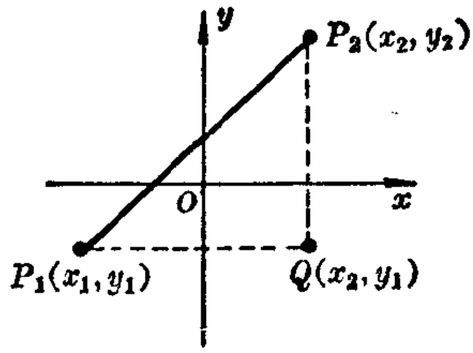


图 1-6

设 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 是平面上任意两个定点, 如图 1-6, 求 P_1、P_2 两点间的距离.

如图, 过 P_1、P_2 分别作 x 轴、y 轴的平行线, 相交于 Q, 那么 Q 点的坐标是 (x_2, y_1). $\triangle P_1QP_2$ 是直角三角形, 根据勾股定理, 有

$$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|QP_2|^2.$$

$$\because \quad |P_1Q|^2=|x_2-x_1|^2=(x_2-x_1)^2, \qquad \text{(为什么?)}$$

$$|QP_2|^2=|y_2-y_1|^2=(y_2-y_1)^2,$$

$$\therefore \quad |P_1P_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

于是得到计算 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 两点间距离的公式

$$\boldsymbol{|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}} \tag{3}$$

特别是，平面上任一点$M(x,y)$到原点$O(0,0)$的距离

$$r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{4}$$

问：如果P_1、P_2在平面上的其他位置，(3)式还对不对？为什么？

例 冲制如图1-7所表示的零件时，需要知道三孔中心的距离.已知三孔中心的坐标是$A(-2,4)$、$B(4,0)$、$C(-5,0)$，求三孔中心的距离.

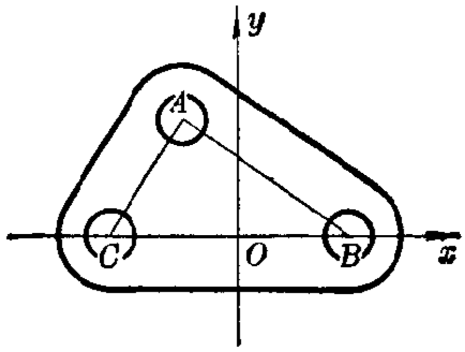


图 1-7

解： 根据距离公式，

$$|BA|=\sqrt{(-2-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{52}=7.21,$$

$$|AC|=\sqrt{[-5-(-2)]^2+(0-4)^2}=\sqrt{25}=5.$$

至于距离$|CB|$，由图显然有

$$|CB|=4-(-5)=9.$$

中　点　坐　标

已知两点的坐标，怎样求这两点连线中点的位置呢？在解析几何中，求一个点的位置，就是求这点的坐标.

已知$P_1(x_1,\ y_1)$和$P_2(x_2,\ y_2)$，求P_1、P_2连线中点M的坐标(x,y).

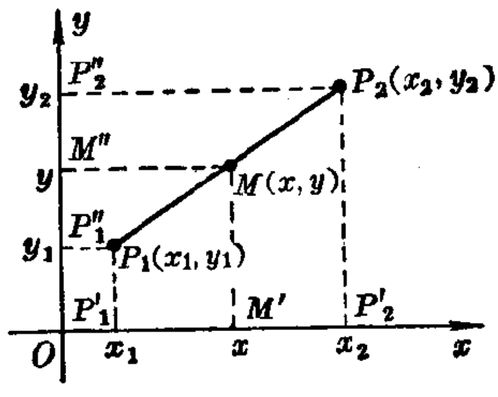


图 1-8

如图1-8，过P_1、M、P_2分别作平行于坐标轴的直线，它们和坐标轴的交点分别是P'_1、M'、P'_2和P''_1、M''、P''_2.

由于M是P_1、P_2连线的中点，根据平行截割定理可以知道，M'是$P'_1P'_2$的中点. 在x轴上，P'_1M'和$M'P'_2$的数量相等，即

$$x-x_1=x_2-x.$$

$$\therefore \quad x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

类似地，有

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

于是知道，中点坐标是两端点坐标的平均值，即

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases} \tag{5}$$

例 1 已知 $P_1(2,-2)$ 和 $P_2(-5,3)$ 两点，求 P_1、P_2 连线中点 M 的坐标（图 1-9）。

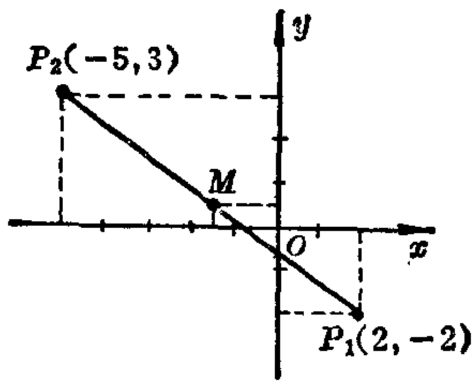


图 1-9

解：$x=\dfrac{2+(-5)}{2}=-1.5,$

$y=\dfrac{-2+3}{2}=0.5.$

所以 P_1、P_2 连线的中点 M 的坐标是 $(-1.5, 0.5)$。

例 2 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(3,7)$、$B(5,-1)$、$C(-2,-5)$，求中线 CD 的长度（图 1-10）。

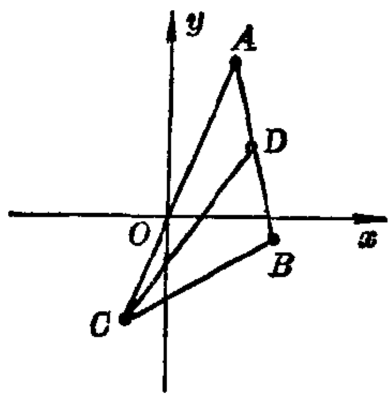


图 1-10

解：先求 AB 边中点 D 的坐标 (x,y)。用中点坐标公式(5)，得

$$x=\frac{3+5}{2}=4, \quad y=\frac{7+(-1)}{2}=3.$$

再用距离公式(3)，得

$$|CD|=\sqrt{[4-(-2)]^2+[3-(-5)]^2}=\sqrt{100}=10.$$

例3 设在 $P_1(1,2)$ 点和 $P_2(7,5)$ 点处分别有质点，各重 5 克和 15 克，求这两个质点的重心的坐标.

解：如图 1-11，两质量对于重心 G 的力矩应该相等，即

$$5|P_1G|=15|GP_2|.$$

$$\therefore \quad \frac{|P_1G|}{|GP_2|}=\frac{15}{5}=\frac{3}{1},$$

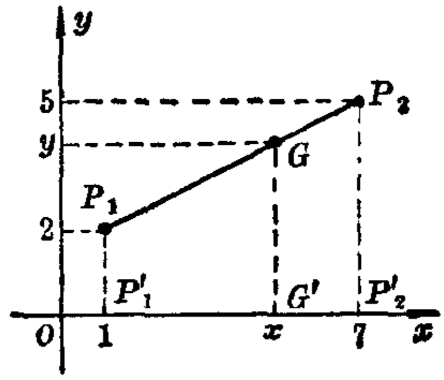


图 1-11

即重心 G 将 P_1、P_2 的连线分成两段，其比为 3:1.

设 G 点横坐标为 x. 如图，应有 $P_1'G'=3G'P_2'$，即

$$x-1=3(7-x).$$

解得

$$x=\frac{22}{4}=5.5.$$

同法可得 G 点的纵坐标

$$y=\frac{17}{4}=4.25.$$

结果求得，所给两质点的重心在 $G(5.5, 4.25)$ 点处.

问：设有 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 两点，$P(x, y)$ 点把 P_1、P_2 连线分成两段的比 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$，试推导求 P 点坐标的公式：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

习　题

1. 在直角坐标系中描出下列各点：

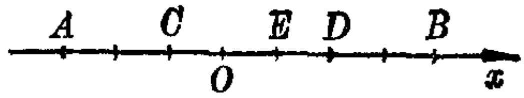
$(1,3)$，　$(1,-3)$，　$(-1,3)$，　$(-1,-3)$，

$(0,4)$，　$(0,-4)$，　$(4,0)$，　$(-4,0)$.

2. 平面上两个点的连线被 x 轴（或 y 轴）垂直平分时，说这两点对称于 x 轴（或 y 轴）；两个点的连线以原点 O 为中点时，说这两点对称于原点. 设有一点为 $P(x, y)$，求和 P 点关于 x 轴、y 轴、原点对称的点的

坐标．并指出第1题中各点的对称性．

3. 如图，x 轴上每一格等于一个单位长度，写出有向线段 AB、BC、CD、DE、EA 的数量和长度．



(第3题)

4. y 轴上 A、B 两点的纵坐标分别是 y_1 和 y_2，设

(1) $y_1=8$, $y_2=6$;　(2) $y_1=5$, $y_2=-3$;

(3) $y_1=-4$, $y_2=0$;　(4) $y_1=-9$, $y_2=-11$.

求 AB、BA 和 $|AB|$.

5. 正方形的边长为5，以两条对角线为坐标轴，写出四个顶点的坐标．

6. 一个质点从 $A(-3,2)$ 点到 $B(4,5)$ 点作直线运动，求它经过的距离．

7. 求证：以 $A(0,0)$、$B(3,1)$、$C(1,7)$ 为顶点的三角形是直角三角形．

8. 在 x 轴上有一点 P，它和 $A(1,-3)$ 点的距离等于5，求 P 点的坐标．

9. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(-a,0)$、$B(a,0)$、$C(0,\sqrt{3}a)$，求证这个三角形是等边三角形．

10. 三角形的三个顶点是 $A(2,1)$、$B(-2,3)$、$C(0,-1)$，求三条中线的长．

11. 连结 $P_1(2,y)$ 和 $P_2(x,6)$ 两点的线段的中点是 $P(3,2)$，求 x 和 y.

12. 设有 $P_1(-2,4)$ 和 $P_2(5,3)$ 两点，P 点在 P_1P_2 的延长线上，且 $|P_1P|=2|P_2P|$，求 P 点的坐标．

第二节　曲线的方程和方程的图形

在解析几何里，我们总是把曲线看作是动点按照一定规律运动的轨迹．

在直角坐标系中，由于动点 P 可以用一对变量 x 和 y 表示，曲线（动点运动的轨迹）就可以用包含 x、y 两个变量的一个代数方程来表示．下面就来讨论这个问题．

求曲线的方程

我们通过几个具体例子，搞清楚曲线方程的概念，学会求曲

线方程的方法.

例 1 设有一个圆，圆心在 O 点，半径等于 r. 在直角坐标系中，用包含 x、y 两个变量的一个方程表示这个圆.

解：以 O 点为坐标原点，选定坐标系如图 1-12.

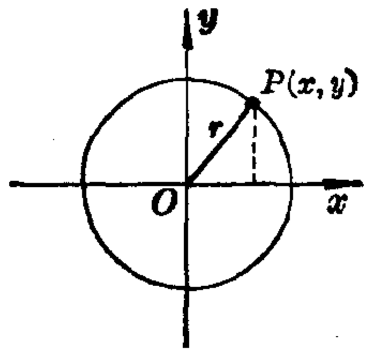


图 1-12

在圆上取一动点 P，设它的坐标为 (x,y). 动点 $P(x,y)$ 按照什么规律运动就形成圆形呢？我们知道，圆上各点到圆心 O 的距离都等于半径 r，而到圆心的距离等于 r 的点都在这个圆上. 这就是 $\odot O$ 上各点所具有的共同性质，也是动点 $P(x,y)$ 在 $\odot O$ 上运动时所遵循的规律.

这个规律表明，无论动点 P 在圆上什么位置，总有

$$|OP|=r,$$

而

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2},$$

因此有

$$\sqrt{x^2+y^2}=r. \tag{1}$$

现在来分析 $\odot O$ 和方程(1)的关系：

$\odot O$ 上任何一点 P 的坐标 (x, y) 都满足这个方程，而且所有满足这个方程的 (x,y) 所对应的点都在 $\odot O$ 上. 因此，我们把方程(1)叫做是 $\odot O$ 的方程.

为了运算的方便，把(1)式两端平方，得

$$x^2+y^2=r^2. \tag{2}$$

这就是经常用的圆心在坐标原点、半径为 r 的圆的方程.

通过这个例子，我们可以进一步明确曲线的方程的概念.

设有一条曲线和一个含有 x、y 两个变量的方程，如果：

(1) 曲线上所有点的坐标(x, y)都满足这个方程，

(2) 所有满足方程的(x,y)所对应的点，都在这条曲线上，

那么，这个方程就叫做这条曲线的方程，而这条曲线就叫做这个方程的图形.

注意，所谓曲线的方程，有两层意思：

第一，只要是曲线上的点，它的坐标都要满足这个方程，无一例外；

第二，凡是满足方程的(x, y)所对应的点，都要在这条曲线上，一个也不能少.

在例 1 中，方程 $x^2+y^2=r^2$ 是圆心在原点，半径为 r 的圆的方程. 大家按上面两条检验一下，看是不是都符合.

怎样求曲线的方程呢？从例 1 可以看到，步骤如下：

(1) 建立坐标系；

(2) 把曲线看作动点按照一定规律运动而成的图形，找出动点遵循的规律；

(3) 设曲线上动点的坐标为(x, y)，把曲线上动点遵循的规律，用动点的坐标 x、y 表示出来，就是曲线的方程；

(4) 进行必要的化简.

数学中，把按照一定规律运动的点形成的图形，叫做这个动点的轨迹. 因此，一条曲线可以看作是具有一定性质的点的轨迹. 例如，圆是到一点(圆心)距离等于定长(半径)的点的轨迹. 说一条曲线是具有一定性质的点的轨迹，也是有两层意思：第一，曲线上的点都具有这个性质；第二，具有这个性质的点都在这条曲线上.

例 2 已知平面上$A(6, 0)$、$B(2, 3)$两点，如图 1-13，求距离 A、B 等远的点的轨迹的方程.

解：这是已给定坐标系的情况. 设 $P(x, y)$是距离 A、B 两

点等远的任一点. 列出 x, y 应满足的方程，就是所求轨迹的方程.

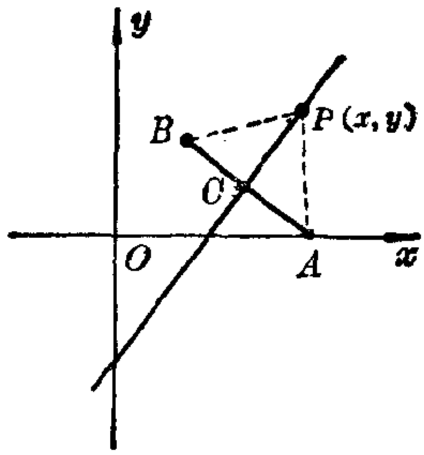


图 1-13

$$\because \quad |AP|=|BP|,$$

而 $$|AP|=\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2},$$

$$|BP|=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2},$$

所以 x、y 应满足方程

$$\sqrt{(x-6)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}.$$

再进行化简，两边平方，得

$$(x-6)^2+y^2=(x-2)^2+(y-3)^2,$$

化简后，得

$$6y-8x+23=0, \tag{3}$$

这就是所求轨迹的方程.

因为距离 A、B 两点等远的点都在 A、B 连线的中垂线上，而且 A、B 连线的中垂线上的点都距离 A、B 等远，所以方程(3)也就是 AB 的中垂线的方程. 它的图形是一条直线.

例 2 是已经给定了坐标系，求距离 A、B 等远的点的轨迹方程. 如果没有固定坐标系，自己建立坐标系时，注意利用图形的对称性，可以使求出的方程简单.

例 3 设已知图 1-14 中 A、B 两点距离为 5，求到 A、B 等远的点的轨迹的方程.

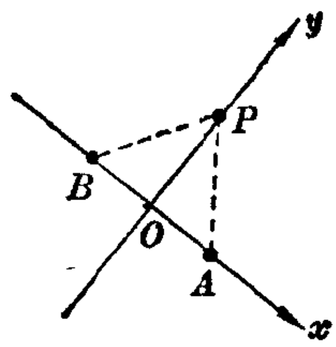


图 1-14

解：取 A、B 连线的中点 O 为坐标原点，A、B 所在的直线为 x 轴，如图 1-14. 这时，A、B 两点的坐标分别是 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$，$\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$.