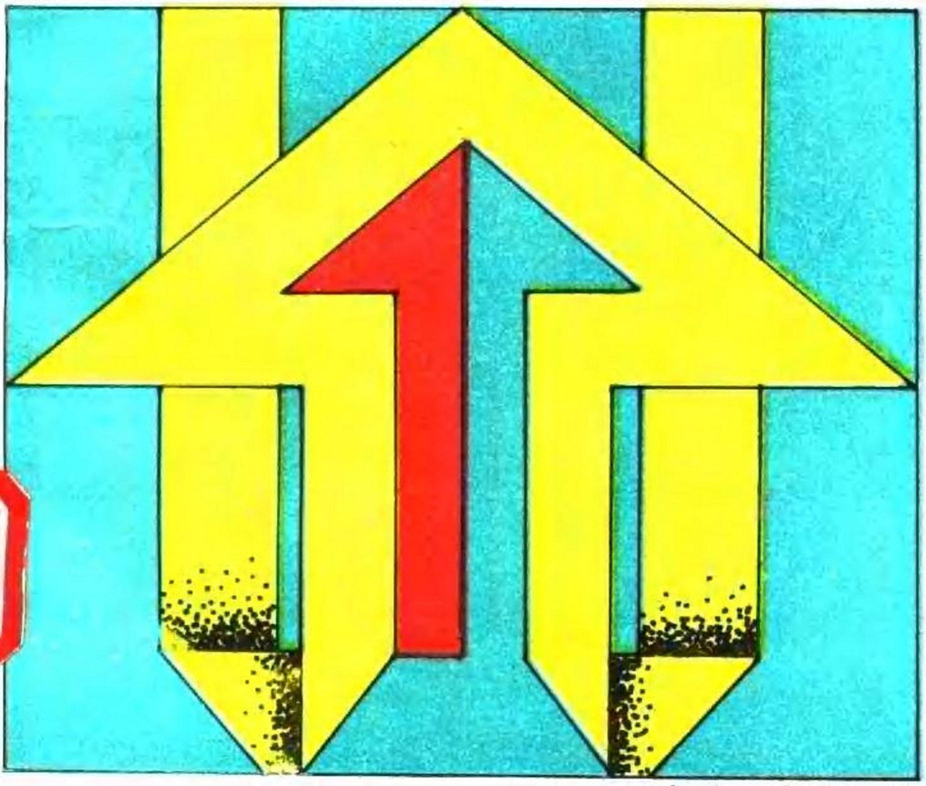
群论及其在粒子物理学中的应用

高崇寿 著



高等教育出版社

群论及其在粒子物理学中的应用

高崇寿 著

高等教育出版社

(京)112号

内容提要

本书是作者在多年为北京大学研究生开课讲义的基础上，根据粒子物理学的发展和研究成果，经整理、充实、提高而写成的.

全书分为两部分. 第一部分包括第一章到第四章，对群、群表示、李群、李代数和李群表示的基本原理，结合理论物理中常用的实例，作了简明扼要的叙述. 第二部分包括第五章到第九章，对整体对称性、强子的内禀对称性、味 $SU(N)$ 整体对称性、等效相互作用分析和定域规范不变性进行了介绍. 内容的选取和组织，着重于研究工作中提出的问题，并不拘泥于群论的理论系统，并反映了近年来群论在粒子物理学中应用的很多重要成果，包含了作者多年从事粒子物理教学和科研的成果及心得；特别是应用抽象的群论原理于粒子物理的具体实验分析上，有深入独到之处，可使读者较快地接触到这方面的前沿问题.

本书可作为学习粒子物理实验和理论的研究生的教学用书，也可供粒子物理工作者和理论物理工作者参考.

责任编辑　李松岩

群论及其在粒子物理学中的应用

高崇寿　著

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 11.625　字数280 000

1992 年 9月第1版　1992 年 9月第1次印刷

印数 0001—1 240

ISBN 7-04-003914-1/O·1139

定价 4.40 元

序

粒子物理学是人类探索物质微观结构规律前沿的学科，50—60年代，实验发现了大量的新粒子和新现象，促进了理论研究的发展. 60年代强子结构理论和电弱统一理论建立时，在对粒子和相互作用对称性的研究探索中，群论的运用起了重要的作用. 粒子物理学的研究离不开群论方法的应用.

在粒子物理学的研究和教学工作中，一直感到尽管可以从一些群论书上系统地学习群的理论，也可以从一些粒子物理学书上系统地学习粒子物理学知识，但还是需要一本把这两方面结合起来，扼要地讲述群论及其在粒子物理学中的应用的书，本书就是在这方面所作的初步尝试. 本书是在多次为研究生开设的群论及其在粒子物理学中的应用系统讲座的讲义基础上，根据粒子物理学的发展和研究成果写成的. 粒子物理学的发展中许多重大进展直接是关于粒子及其相互作用规律对称性的，许多进展的取得是和运用多方面的群的概念、理论和方法对实验显现的新现象和新的规律性进行综合的对称性分析分不开的. 本书内容的选取和组织着重从研究工作中提出的问题着手，不完全按照群论的系统来撰写. 粒子物理学中用到的群论和方法很多，本书并没有对这些群作全面介绍，只讲解了最基本的最常用的一部分. 本书对于群论的数学理论只作了最扼要的介绍，一般不给出严格的证明，有兴趣的读者可以去读有关的群论专著. 本书第一章给出群论和群表示论的基础，第二、三、四章讲述李群、李代数及其表示等内容. 第五、六、七、八、九章讲述群论在粒子物理学中几个方面的应用，其中第五章讲述整体对称性，第六章讲述强子的内禀对称性，第七章讲述味$SU(N)$整体对称性，第八章讲等效相互作用分析，

第九章讲定域规范不变性. 我希望本书能对学习和研究粒子物理学的实验及理论物理工作者，能对学习粒子物理学的研究生和大学生有所裨益.

由于作者水平和时间的限制，书中难免有错误和不妥之处，请读者予以指正.

感谢刘连寿教授提出请我就群论及其在粒子物理学中的应用为国内的研究生开设系统讲座，促进了本书的撰写. 感谢韩其智教授和孙洪洲教授仔细阅读了书稿，并对本书的撰写提出了很好的建议. 感谢谢柏青仔细校阅了全稿.

高崇寿

1991 年于北京

目　录

引　言

对称性是人们在观察自然和认识自然过程中所产生的一种观念．在自然界千变万化的运动演化过程中，显现出了各式各样的对称性．自然界千变万化的运动演化，从一个侧面来说，就体现为显现出各式各样的对称性，同时又通过这些对称性的演化和破缺来反映出运动演化的特点．从一定意义上来说，运动的多样性的一个重要表现是自然界同时显现出多种不同类型的对称性．这些对称性互相交织在一起，在演化过程中不断有对称性发生破缺，同时往往又显现出新的对称性来．因此研究自然现象中显现的各种对称性，研究它们产生和破缺的演化规律，是人们认识自然规律的一个重要方面．

无论什么样的对称现象，都是与把两种不同的情况相比较分不开的．在数学上，将两种情况间通过确定的规则对应起来的关系，称为从一种情况到另一种情况的变换．物理学中对称性的观念可以概括为：如果某一现象或系统在某一变换下不改变，则说该现象或系统具有该变换所对应的对称性．既然每一种对称性都和某种特定的变换相联系，那么对称性的千差万别也就集中反映在与之相联系的各种变换上．系统地研究各种变换之间普遍联系规律的数学分支是群论．

群论是数学的一个重要分支，它在自然科学和日常生活中都有广泛的应用，给出重要的结果．下面我们举一个生活中有趣的例子：

甲和乙合作用扑克牌变戏法，从一副扑克牌中抽出一张牌藏起来，把剩下的 51 张牌任意地分成两组分别给甲和乙．甲和乙两人合作起来去猜抽出去的那张牌，但他们分别只能看自己手里的

牌．他们要合作猜出那张牌，就需要乙把自己手里的牌都告诉甲，这样甲就可以通过核对判断抽出那张牌是什么．但甲和乙之间的联系限于只允许乙发一个密码电报给甲，电报的内容限于只能叫一张牌．这个戏法表现为乙根据手里的牌叫一张牌，甲根据自己手里的牌和乙叫的那张牌把抽出去的牌猜出来．

按一般的估计，乙手里的牌数很多并且数目不确定，通过只叫一张牌似乎不大可能把手里所有的牌的全部情况都告诉甲，这样甲在猜时就难以作确切的判断．因此许多人认为这个戏法实际上是一种魔术，亦即乙一定还用某种高超的技巧向甲传了暗号．然而这个戏法里除了乙叫了一张牌外并没有再另传更多的暗号．用数学仔细分析可以看到，乙只要叫一张牌就可以把甲作判断时所需要的全部信息都传给甲．

一副牌共 52 张，标记一张牌用它的花色和点，点的取值为从 1 到 13．花色共有 4 种：♠♥♦♣．这 4 种按颜色区分，2 种♥♦是红的，2 种♠♣是黑的．还可以把黑桃和红桃统称为桃，把方块和梅花统称为花，则这 4 种按花色区分，2 种♠♥是桃，2 种♦♣是花．这样如果用 Z_n 代表 n 阶循环群，考虑 $G=Z_{13}\times Z_2\times Z_2$ 是 3 个循环群的直乘(直积)群，每一张牌可以和这个群的一个元素一一对应．由于一副牌的所有点数之和可以被 13 整除，因此乙可以看自己手里的牌的点数之和被 13 除后余数是多少，就按这余数来叫那个作为密码电报的牌的点数，如果余数为零就叫 K．甲先算出自己手里的牌的点数之和被 13 除后余数是多少，再通过乙打来的密码电报知道了乙手里牌的余数，就可以算出还缺几点才可以加到一起刚好可以被 13 整除．这缺的点数就是抽出去那张牌的点数．如果刚好一点都不缺，抽出去的那张牌就一定是 K．接着乙要数一下自己手里的红牌张数．如果自己手里有偶数张红牌，就在叫那个作为密码电报的牌时叫一种红的花色；但如果自己手里

有奇数张红牌，就在叫那个作为密码电报的牌时叫一种黑的花色．甲也先数自己手里红牌的张数，看是偶数还是奇数．再根据乙通过密码电报提供的乙手中红牌的奇偶性，就可以判断抽出去的那张牌的颜色是红的还是黑的．然后乙还要数一下自己手里的桃牌张数，如果自己手里有偶数张桃牌，就在叫那个作为密码电报的牌时叫一种桃；但如果自己手里有奇数张桃牌，就在叫那个作为密码电报的牌时叫一种花．甲也先数自己手里桃牌的张数，看是偶数还是奇数．再根据乙通过密码电报提供的乙手中桃牌的奇偶性，就可以判断抽出去的那张牌是桃牌还是花牌．这样乙通过叫一张牌确实就可以把甲作判断所需要的全部信息都传给甲．

从这个例子可以看出，这个戏法变起来使人感到非常奇妙，实际上从群论的观点来看，这个戏法的数学依据非常简单清楚，只用到了群论中最简单的三个循环群的直乘．

再看一个物理学中的典型例子．量子力学中给出氢原子的能级公式为

$$E=-\frac{m\alpha^2}{2n^2},$$

给定能量后的简并度为 $2n^2$．简并度 2 的出现是由于电子的自旋为 $\frac{1}{2}$，它在任意给定方向的投影有两个可取值即 $\pm\frac{1}{2}$，在没有外磁场时，这两个态的能量是简并的．由于原子核对电子的作用力是一种有心力，电子在原子核周围运动时的轨道角动量是一个守恒量．量子力学给出，在角动量给定为 l 后，沿空间某一特定方向的投影还可以有 $2l+1$ 个不同的值，但它们的能量是相同的，亦即这 $2l+1$ 个态的能量是简并的．然而，氢原子的能级的简并度并不是 $2(2l+1)$，而是 $2n^2$．给定主量子数 n 后，轨道量子数 l 的可取值为

$$l=0,1,\cdots,n-1.$$

对于氢原子来说，主量子数 n 相同而量子数 l 不同的各轨道能量也是简并的，这样简并度为

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2,$$

比由于相互作用是有心力所给出的简并度要大得多. 在经典力学里，如果不考虑电子的韧致辐射的话，给出氢原子的能量将只决定于电子运动轨道的半长轴. 换言之，半长轴相同但轨道角动量不同的轨道具有相同的能量. 这也就是这个更高的简并度的物理来源，它在量子力学里表现为能级按主量子数 n 来确定，主量子数 n 相同但量子数 l 不同的态是简并的. 从数学上来说，由于氢原子中原子核对电子相互作用的特殊性，氢原子的动力机理不仅满足有心力相互作用所具有的 $SO(3)$ 转动群的不变性，而且具有更高的 $SO(4)$ 群的不变性. 氢原子能级的简并度为 $2n^2$ 正是与氢原子具有 $SO(4)$ 群对称性密切相关. 物理上可以很直观地看到氢原子具有 $SO(3)$ 转动群的不变性，但氢原子实际上具有某种更高的 $SO(4)$ 群的不变性就不是很容易判断了.

可以先在经典力学的范围内对氢原子的对称性进行考察. 电子在中心力场中运动的 Hamilton 量为

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(r).$$

运动方程为

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\boldsymbol{p}}{m},$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\nabla V(r).$$

中心力场 Hamilton 量具有三维空间的转动不变性，这决定了角动量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ 是一个守恒量，即

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0.$$

再考察一个正比于 $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p}$ 的量随时间的变化

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p}\right)=-r^2\frac{dV}{dr}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),$$

由此得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p}+r^2\frac{dV}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

对于氢原子来说，势能为

$$V(r)=-\frac{e^2}{r},$$

由此得到

$$r^2\frac{dV}{dr}=e^2,$$

代入后得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p}+e^2\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=0.$$

这表明氢原子由于势能的特殊性，Runge-Lenz 矢量

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{m}\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p}+e^2\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

也是一个守恒矢量，对于经典的椭圆轨道来说，其大小为

$$A=\sqrt{e^4+\frac{2L^2E}{m}},$$

其方向为从力心指向远核点，这里能量E的值小于零．这个守恒矢量的出现反映了椭圆轨道的封闭性，即运动过程中椭圆轨道没有旋进．角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 守恒反映了中心力场 Hamilton 量具有三维空间的转动不变性，Runge-Lenz 矢量守恒表明氢原子的动力机理可能还具有某种新的旋转对称性．

在量子力学的范围内，对氢原子的对称性进行考察时，仍然有角动量守恒：

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=i[H,\boldsymbol{L}]=0.$$

为了确定 Runge-Lenz 矢量的形式，考虑

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2m}(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\right)=\frac{e^2}{2m}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^2\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=-\frac{e^2}{2m}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right),$$

这样可以看出 Runge-Lenz 矢量应表为

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})+e^2\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

仍是一个守恒矢量. 通过 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 适当的线性组合后可以给出一组新算符，它们所有的对易关系和 $SO(4)$群的生成元所满足的对易关系相同，这表明氢原子的动力机理具有某种 $SO(4)$群的对称性，这种对称性称为动力学对称性.

从这个例子可以看出，物理学中所遇到的对称性是丰富多采的，有些对称性的存在是很直观的，很容易就可以认识其存在. 但也有些对称性是由动力机理的特殊性质所决定的，这些对称性往往并不很直观，但它们同样是起作用的. 在分析物理对象的对称性时，不仅要找出全部具有相当直观性的时间对称性和空间对称性，还要找出所有的不具有直观性的动力学对称性和内部对称性，才能对物理对象的性质特点作出完全的概括和描写.

在人类探索自然规律的过程中，对称性的研究和探索起着重要的作用. 物理学在探索新领域中的未知规律时，常常首先是从实验上研究发现一些守恒定律，通过对称性和守恒定律的联系来认识未知规律应具有哪些对称性.

物理学在探索对称性和自然规律的关系方面的一个重要进展是建立了 Noether 定理. 这个定理指出：如果运动规律在某一不明显依赖于时间的变换下具有不变性，必相应存在一个守恒定律. 如果运动规律的某一对称性并不严格成立而有所破缺，则相应的守恒量将变为似近守恒量，物理学家可以根据实际观察到的近似

守恒量近似守恒的程度，推测基本运动规律可能采取的形式．对称性和对称性的破缺是密切联系的，它们是运动的规律性和多样性在一个侧面的体现．数学上可以通过变换群的性质给对称性以确切的定量描述，也可以通过变换群的性质给对称性的破缺以确切的定量描述；运动规律的对称性和物理上存在守恒量有直接关系，在一定条件下对称性会发生破缺，并且在某些条件下，对称性还会“自发破缺”．人们在探索未知的新规律中，不仅充分利用对称性的观念，还充分利用对称性破缺的观念．人们不仅去探讨如何发现和认识客观存在的对称性，还去探讨如何去发现和认识已经破缺的对称性．

粒子物理学是研究场和粒子的性质、运动、相互作用、相互转化规律的学科，是研究粒子内部结构规律的学科．粒子物理学是探索物质微观结构规律的前沿学科．粒子的运动规律中显现出多种多样的丰富的对称性，同时又显现多种多样的对称性破缺现象．运用群论对粒子运动对称性和对称性破缺规律的探索研究在粒子理论的发展中起过重要的作用，也是粒子理论探索研究中的一个重要方面．

第一章　群和群表示

在这章里，我们并不全面地讨论群论和群表示论的基本内容，也不对基本概念着重从数学上进行探讨，只是扼要地介绍一下有关的群及群表示的基本性质.

§1.1　群和子群

1. 群的定义

群的定义在历史上曾有两种互相等价的提法. 对于一个集合 G 中的元素，定义一个运算(称为乘法)，如果这乘法满足:

(1) 若 $a,b\in G$，则 $ab\in G$;　　(封闭性)

(2) 若 $a,b,c\in G$，则 $(ab)c=a(bc)$;　　(结合律)

(3) 存在 $e\in G$，对任何 $a\in G$，都有 $ea=a$;　　(存在左单位元)

(4) 对任何 $a\in G$，存在 $a^{-1}\in G$，使 $a^{-1}a=e$;　　(存在左逆元)

则 G 构成一个群.

可以证明在上述定义下，右单位元存在并且等于左单位元；右逆元存在并且等于左逆元，因此有些书定义群时把上述(3)和(4)改为存在单位元和存在逆元. 但是严格说来是不必要的，这样把一部分可以证明的东西也放进定义里去了.

群的另一种定义是把上面(3)和(4)合起来用下面一条代替:

(3′) 对任意 $a,b\in G$，一次方程 $xa=b$ 和 $ay=b$ 在 G 中都有唯一的解 x 和 y.

对于这样确定的(3′)能否减弱到只要求对方程 $xa=b$ 有唯一

解，回答是否定的，也就是说条件(3′)不能减弱．

举一个反例：若集合G由两个元素$a'=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$和$b'=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$组成，乘法为普通矩阵乘法，全部乘法写出来是：

$$a'a'=a',\quad a'b'=a',\quad b'b'=b',\quad b'a'=b'$$

显然封闭性、结合律以及$xa=b$有唯一解都满足，但是这个集合中$ay=b$并没有唯一解，它也确实不构成群．

因此，要审核一个集合对于定义于这个集合上的乘法运算是否构成一个群，除了首先检验其封闭性和结合律是否成立外，取上述两种定义中任何一种的要求来检验就可以了．

在群的定义基础上作以下几点说明：

(1) 乘法的定义中并不要求可对易(即满足交换律)，如果对群G的任何两个元素$a,b\in G$都有$ab=ba$，则称群G为Abel群，否则称为非Abel群．

(2) 群的元素个数称为群的阶．阶数有限的群称为有限群；若群的元素个数无限则称为无限群．

(3) 对有限群的任一元素a，作其幂次a，a^2，…，必定可以找到一个幂次n_a，使$a^{n_a}=e$，这式子满足的最小n_a值，称为a的阶．

(4) 如果G中所有元素都可以通过G中某一个元素a的幂次给出，则称G为循环群，循环群是一种Abel群．a称为G的生成元．

2. 子群的定义

子群的定义为：如果群G的一个子集合G'对于群G的乘法构成群，则称G'为G的子群．

对于判别子群下述定理是很重要的：

若$G'\subset G$，G'是群G的子群的必要充分条件是：对于任何a，