常微分方程组与稳定性理论

蔡燧林　盛　骤编

高等教育出版社

常微分方程组与稳定性理论

蔡燧林　盛骤　编

高等教育出版社

本书是编者根据力学、自动控制、无线电电子学、化学动力学、生态学等专业对常微分方程的需要编写的。全书共分五章，主要内容：常微分方程组的基本概念，线性微分方程组的一般理论，常系数线性微分方程组（介绍几种解法），定性理论初步，稳定性理论基础。本书可供工科院校有关专业作试用教材或教学参考书。

常微分方程组和稳定性理论

蔡燧林 盛骤 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张5.75 字数137,000

1986年8月第1版 1986年8月第1次印刷

印数 00,001—5,150

书号 13010·01260 定价 1.05元

前　言

高等院校工科和部分理科(非数学专业)的常微分方程，大多是在高等数学课程中讲授,篇幅少,内容不多. 对于那些需要常微分方程较多较深的专业,例如力学、自动控制、无线电电子学,以及化学动力学、生态学等专业,这是远为不够的. 编写一本合适的教学参考书或教材,供有关专业使用,很有必要. 本书是针对这一情况而编写的. 它可作为需要常微分方程较多的理(非数学专业)工科各专业的教学参考书，也可作为教材使用. 同时可供广大工程技术人员自学和参考.

全书共分五章，第一、二两章是常微分方程组、线性常微分方程组的基本概念和基本理论. 第三章是常系数线性微分方程组的几种解法. 这里我们不采用矩阵的约当法式，而是首先用归纳法证明了通解形式，然后用循环列的方法讲授具体解法. 鉴于工程学科的需要，我们还介绍了矩阵指数法和拉普拉斯变换法. 第四章论述了定性理论的基本内容,包括奇点,极限环及其存在或不存在的判别法. 第五章论述了稳定性的基本概念和基本理论. 较为详细地介绍了自治系统的李雅普诺夫稳定性和全局稳定性，论证了李雅普诺夫第二方法的有关定理. 给出了常系数线性系统渐近稳定情形的李雅普诺夫函数存在性的证明，在例题中指明了这种情形的李雅普诺夫函数的作法. 该章对非自治系统也作了介绍. 书中还介绍了常微分方程组在线性电路、非线性电路、自动控制、生态平衡等方面的实例. 各章备有适量的习题，书末附有答案.

本书只要求读者具有微积分和线性代数的基本知识. 书中用到的矩阵指数和常微分方程组的解对初值的连续依赖性定理，在附录中给出.

本书第二、四、五章由蔡燧林编写，第一、三章由盛骤编写. 全书插图由张礼明同志绘制.

本书承湖南大学李森林教授和山东海洋学院梁中超教授审阅，他们提出了许多宝贵的意见，我们表示衷心的感谢.

书中不足和错误之处，恳切地希望读者批评和指正.

蔡燧林　盛　骤

1985年8月

目　录

第一章　常微分方程组的基本概念…………………………………… 1

§ 1　基本概念……………………………………………………………… 1

§ 2　解的存在唯一性定理………………………………………………… 4

§ 3　可积组合……………………………………………………………10

第二章　线性微分方程组的一般理论 ……………………………………15

§ 1　概述…………………………………………………………………15

§ 2　线性齐次微分方程组通解的结构…………………………………17

§ 3　基本解矩阵…………………………………………………………22

§ 4　线性非齐次微分方程组通解的结构·常数变易法……………28

第三章　常系数线性微分方程组 ……………………………………32

§ 1　常系数线性齐次方程组解法 I——特征根法……………………32

§ 2　常系数线性齐次方程组解法 II——矩阵指数法…………………48

§ 3　常系数线性齐次方程组解法 III——拉普拉斯变换法 ………56

§ 4　常系数线性非齐次微分方程组的解法……………………………57

§ 5　几个应用的例子……………………………………………………61

第四章　定性理论初步 ………………………………………………70

§ 1　自治系统·相空间…………………………………………………70

§ 2　平面自治系统的奇点………………………………………………75

§ 3　极限环………………………………………………………………88

§ 4　单摆运动·范德坡方程……………………………………………95

第五章　稳定性理论基础 ………………………………………… 106

§ 1　李雅普诺夫稳定性概念·用一次近似判定稳定性………… 106

§ 2　李雅普诺夫第二方法(直接方法)……………………………… 117

§ 3　全局稳定性……………………………………………………… 132

§ 4　非自治系统的稳定性…………………………………………… 138

§ 5　艾瑞尔曼问题·柯尔莫哥洛夫模型…………………………… 144

附录一　向量级数 ………………………………………………………… 151
附录二　矩阵指数 e^A …………………………………………………… 153
附录三　微分方程组的解对初值的连续依赖性定理 ………… 156
习　题 ……………………………………………………………………… 157
习题答案 ………………………………………………………………… 170

第一章　常微分方程组的基本概念

§1　基本概念

常微分方程组是用来描述物理系统、化学系统、生物系统、经济系统等等的有力工具．例如，在现代控制理论中，在分析动态连续系统时，系统通常都是由常微分方程组来描述的．下面举一个例子．

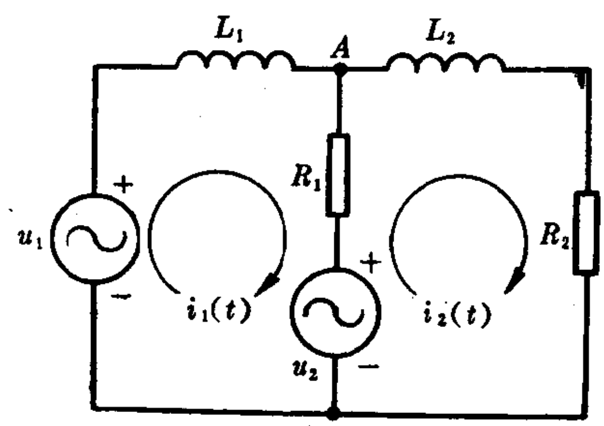

图 1-1

设有一电路如图 1-1 所示．输入电源电压 $u_1(t)$，$u_2(t)$ 为已知，需要求 A 点的电压 $u_A(t)$，（以 u_1，u_2 的负极为基准）即系统的输出．电路的参数 L_1、L_2、R_1、R_2 为已知常数．设 $i_1(t)$、$i_2(t)$ 为回路中的电流．根据基尔霍夫（Kirchhoff）定律知，电路的行为可以用下面的常微分方程组来描述：

$$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1i_1-R_1i_2-u_1(t)+u_2(t)=0, \\ L_2\dfrac{di_2}{dt}-R_1i_1+(R_1+R_2)i_2-u_2(t)=0. \end{cases}$$

或即

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt}=-\dfrac{R_1}{L_1}i_1+\dfrac{R_1}{L_1}i_2+\dfrac{1}{L_1}u_1(t)-\dfrac{1}{L_1}u_2(t), \\ \dfrac{di_2}{dt}=\dfrac{R_1}{L_2}i_1-\dfrac{R_1+R_2}{L_2}i_2+\dfrac{1}{L_2}u_2(t). \end{cases} \tag{1.1}$$

若能从中求出 $i_1(t), i_2(t)$，则所求的 A 点的电压为

$$u_A(t)=i_1(t)R_1-i_2(t)R_1+u_2(t).$$

(1.1)式是含有两个未知函数 i_1, i_2 的常微分方程组.

本书研究含有 n 个未知函数的微分方程组[1]，其形式为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t,x_1,\cdots,x_n),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(t,x_1,\cdots,x_n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(t,x_1,\cdots,x_n),\end{cases}\tag{1.2}$$

其中 $f_i(t,x_1,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,n)$ 为定义在 $n+1$ 维空间 $(t,x_1,\cdots,x_n)$ 的某区域 $D\triangleq(a,b)\times G$ 内的函数. 这里 (a,b) 为 t 的变化区间，G 为 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的变化区域. 我们称微分方程组(1.2)为一阶微分方程组的**标准形式**.

我们首先指出，任意一个已就最高阶导数解出的 n 阶常微分方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}=f\left(t,x,\frac{dx}{dt},\cdots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right),\tag{1.3}$$

在引入适当的未知函数后，就能化成一阶微分方程组的标准形式(1.2). 事实上，只要令

$$x=x_1,\frac{dx_1}{dt}=x_2,\frac{dx_2}{dt}=x_3,\cdots,\frac{dx_{n-1}}{dt}=x_n,$$

那么，方程(1.3)就化成了含 n 个未知函数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一阶微分方程组

1) 我们常将常微分方程组简称为微分方程组；在本书中还简称为方程组。

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt}=x_2, \\
\dfrac{dx_2}{dt}=x_3, \\
\cdots\cdots \\
\dfrac{dx_{n-1}}{dt}=x_n, \\
\dfrac{dx_n}{dt}=f(t,x_1,\cdots,x_n).
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

容易知道，任意一个已就最高阶导数解出的微分方程组，用上述的办法也能化成一阶微分方程组的标准形式．由此可见，讨论一阶微分方程组的标准形式(1.2)具有普遍的意义．

若在区间$(\alpha,\beta)(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$内定义的$n$个连续可微函数$x_1(t),\cdots,x_n(t)$，能使

$$
\frac{dx_i(t)}{dt}\equiv f_i(t,x_1(t),\cdots,x_n(t)),\quad \alpha<t<\beta\,(i=1,2,\cdots,n)
$$

则称函数组$x_1(t),\cdots,x_n(t)$为方程组(1.2)在区间(α,β)内的解．有时省去“在区间(α,β)内”一词．

我们还考虑方程组(1.2)满足初值条件的解．方程组(1.2)的初值条件的形式如下：

$$
x_1(t_0)=x_{10},\cdots,x_n(t_0)=x_{n0},
\tag{1.5}
$$

其中t_0是自变量的某个指定的初值；而$x_{10},\cdots,x_{n0}$依次是未知函数$x_1(t),\cdots,x_n(t)$的某个指定的初值．

方程组(1.2)与初值条件(1.5)一起，即

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\cdots,x_n), \\
x_i(t_0)=x_{i0},
\end{cases}
\quad (i=1,2,\cdots,n)
\tag{1.6}
$$

构成一个**初值问题**．方程组(1.2)满足初值条件(1.5)的解，称为初值问题(1.6)的解．

方程组(1.2)的含有n个任意常数$c_1,\cdots,c_n$的解族

$$x_i(t)=\varphi_i(t,c_1,\cdots,c_n),(i=1,2,\cdots,n),\tag{1.7}$$

如果对于区域 D 内任意给定的点$(t_0,x_{10},\cdots,x_{n0})$，总能确定 $c_1,\cdots,c_n$ 的值，使得对应的解(1.7)满足初值条件(1.5)，则称解族(1.7)为方程组(1.2)在区域 D 内的**通解**.

如果由函数方程组：

$$\Phi_i(t,x_1,\cdots,x_n,c_1,\cdots,c_n)=0,\ (i=1,2,\cdots,n)\tag{1.8}$$

所确定的隐函数：

$$x_i(t)=\varphi_i(t,c_1,\cdots,c_n)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

是方程组(1.2)的通解，则称(1.8)为(1.2)的**通积分**.

§2 解的存在唯一性定理

引入向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}f_1(t,\boldsymbol{x})\\f_2(t,\boldsymbol{x})\\\vdots\\f_n(t,\boldsymbol{x})\end{pmatrix},\quad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\\frac{dx_2}{dt}\\\vdots\\\frac{dx_n}{dt}\end{pmatrix},$$

则方程组(1.2)可写成

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}).\tag{1.9}$$

初值条件(1.5)可写成

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\qquad 其中\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix}x_{10}\\x_{20}\\\vdots\\x_{n0}\end{pmatrix}.\tag{1.10}$$

初值问题(1.6)就成为

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0.\end{cases}\tag{1.6'}$$

初值问题(1.6′)的解是一个向量函数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$.

初值问题(1.6′)的解在什么条件下存在？这个问题在理论上是必需要研究的，在实际上也是十分重要的. 因为只有解存在时，才能研究它.这时，即使无法获得精确解，也可采用适当的方法求出其近似解，或对方程组的解作定性的研究.如果方程组的解根本不存在，那么一切努力都是徒劳的.

关于初值问题(1.6′)的解的存在唯一性的研究，人们已做过大量工作. 下面介绍其中一个最常用的存在唯一性定理.

定理 1.1 设

1. 向量函数 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在 $n+1$ 维空间 $(t,\boldsymbol{x})$ 中的闭区域

$$D:\ |t-t_0|\leqslant a,\quad \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^{1)}\leqslant b$$

上连续；

2. $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在 D 上关于 $\boldsymbol{x}$ 满足李普希茨条件，即存在常数 $K>0$，使对于 D 上任意两点 $(t,\boldsymbol{x}_1)$，$(t,\boldsymbol{x}_2)$，不等式

$$\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_2)\|\leqslant K\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|\tag{1.11}$$

都成立. 则初值问题(1.6′)在区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 上存在唯一的解. 其中 $M=\max\limits_{(t,\boldsymbol{x})\in D}\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\|$，$h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$.

证明 我们采用逐次逼近法来证明. 其步骤是，(i) 在区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 上构造一个适当的连续向量函数序列 $\{\boldsymbol{x}_n(t)\}$；(ii) 证明 $\{\boldsymbol{x}_n(t)\}$ 在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上一致收敛于某向量函数 $\boldsymbol{x}^*(t)$；(iii) 证明 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 是初值问题(1.6′)的解；(iv) 证明解是唯一的.

(i) 以 $\boldsymbol{x}_0$ 代替方程组(1.9)右端 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 中的 $\boldsymbol{x}$，得

---

1) $\|\cdot\|$ 是向量的范数，见附录一.

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_0). \tag{1.12}$$

将上式对 t 积分，并令它满足条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，得到方程组（1.12）满足条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$的解 $\boldsymbol{x}_1(t)$，即

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_0)dt.$$

$\boldsymbol{x}_1(t)$在区间$|t-t_0|\leqslant h$ 上连续，且在该区间上有

$$\|\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_0)\|dt\right|\leqslant M|t-t_0|\leqslant$$

$$\leqslant Mh\leqslant b. \tag{1.13}$$

即当$|t-t_0|\leqslant h$ 时，$(t,\boldsymbol{x}_1(t))\in D$.

再以 $\boldsymbol{x}_1(t)$代替方程组(1.9)右端$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$中的 $\boldsymbol{x}$，得

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1(t)). \tag{1.14}$$

将上式积分(这是允许的，因为当$|t-t_0|\leqslant h$ 时$(t,\boldsymbol{x}_1(t))\in D$)，仍令它满足条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，得到方程组（1.14）满足条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}_2(t)$，即

$$\boldsymbol{x}_2(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1(t))dt.$$

$\boldsymbol{x}_2(t)$在$|t-t_0|\leqslant h$ 上连续，且在该区间上有

$$\|\boldsymbol{x}_2(t)-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant M|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b.$$

故当$|t-t_0|\leqslant h$ 时，$(t,\boldsymbol{x}_2(t))\in D$.

重复以上的步骤，得到一个向量序列$\{\boldsymbol{x}_n(t)\}$，其中

$$\boldsymbol{x}_n(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_{n-1}(t))dt. \tag{1.15}$$

$\boldsymbol{x}_n(t)$是方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_{n-1}(t))$$

满足条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解. 下面我们用数学归纳法证明 $\boldsymbol{x}_n(t)$ 在$|t-t_0|\leqslant h$ 上连续，且在该区间上有

$$\|\boldsymbol{x}_n(t)-\boldsymbol{x}\|\leqslant b,(n=1,2,\cdots).$$

事实上，当 $n=1$，2 时已证明是对的. 设 $n-1$ 时是对的，即设 $\boldsymbol{x}_{n-1}(t)$ 在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上连续，且在该区间上有

$$\|\boldsymbol{x}_{n-1}(t)-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant b,$$

则由(1.15)式知，$\boldsymbol{x}_n(t)$ 在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上连续，且在该区间上有

$$\|\boldsymbol{x}_n(t)-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_{n-1}(t))\|dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant M|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b.$$

$\{\boldsymbol{x}_n(t)\}$ 就是我们所要求的序列.

(ii) 现在证明 $\{\boldsymbol{x}_n(t)\}$ 在区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 上一致收敛. 这等价于证明级数

$$\boldsymbol{x}_0+\sum_{n=1}^{\infty}[\boldsymbol{x}_n(t)-\boldsymbol{x}_{n-1}(t)]\tag{1.16}$$

在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上一致收敛[1]. 为此，我们用数学归纳法来证明在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上有

$$\|\boldsymbol{x}_{n+1}(t)-\boldsymbol{x}_n(t)\|\leqslant\frac{K^nM}{(n+1)!}|t-t_0|^{n+1},(n=1,2,\cdots).$$

由条件(1.11)知，

$$\|\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_0\|=\left\|\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_0)dt\right\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_0)\|dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant M|t-t_0|,$$
$$\|\boldsymbol{x}_2(t)-\boldsymbol{x}_1(t)\|=\left\|\int_{t_0}^{t}[\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_0)]dt\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_0)\|dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|K\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant KM\left|\int_{t_0}^{t}|t-t_0|dt\right|=KM\frac{|t-t_0|^2}{2!}.$$

[1] 向量函数级数(1.16)一致收敛的意义见附录一.

一般，假定有

$$\|\boldsymbol{x}_n(t)-\boldsymbol{x}_{n-1}(t)\|\leqslant\frac{K^{n-1}M}{n\,!}|t-t_0|^n,$$

则有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_{n+1}(t)-\boldsymbol{x}_n(t)\|&\leqslant\left|\int_{t_0}^t\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_n(t))-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_{n-1}(t))\|dt\right|\leqslant\\&\leqslant K\left|\int_{t_0}^t\|\boldsymbol{x}_n(t)-\boldsymbol{x}_{n-1}(t)\|dt\right|\leqslant\\&\leqslant\frac{K^nM}{n\,!}\left|\int_{t_0}^t|t-t_0|^ndt\right|=\\&=\frac{K^nM}{(n+1)\,!}|t-t_0|^{n+1}.\end{aligned}$$

由数学归纳法知，级数(1.16)的每一项的范数都不大于级数

$$\|\boldsymbol{x}_0\|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K^{n-1}M}{n\,!}|t-t_0|^n\tag{1.17}$$

的对应项．但当$|t-t_0|\leqslant h$时，级数(1.17)的每一项都不大于收敛正项级数

$$\|\boldsymbol{x}_0\|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K^{n-1}M}{n\,!}h^n$$

的对应项．故级数(1.16)在区间$|t-t_0|\leqslant h$上一致收敛．因此，当$n\to\infty$时$\boldsymbol{x}_n(t)$在区间$|t-t_0|\leqslant h$一致收敛于极限函数$\boldsymbol{x}^*(t)$．又由于级数(1.16)的每一项在$|t-t_0|\leqslant h$上连续，故$\boldsymbol{x}^*(t)$在$|t-t_0|\leqslant h$上也连续．

(iii) 现在来证明$\boldsymbol{x}^*(t)$是初值问题(1.6′)的解．注意到对于$n=1,2,\cdots$,都有$\boldsymbol{x}_n(t_0)=\boldsymbol{x}_0$．在上式中令$n\to\infty$取极限，即有$\boldsymbol{x}^*(t_0)=\boldsymbol{x}_0$．即$\boldsymbol{x}^*(t)$满足(1.6′)中的初值条件．

要证$\boldsymbol{x}^*(t)$满足方程组(1.9),可以在方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}_n(t)}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_{n-1}(t))\tag{1.18}$$

中令 $n\to\infty$ 得到. 事实上,

1° 由(1.18)知在区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 上 $\boldsymbol{x}_n(t)$ 有连续的导数; 2° 由条件 (1.11) 及 $\{\boldsymbol{x}_n(t)\}$ 的一致收敛性知, 序列 $\{\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_n(t))\}$ 在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上一致敛于 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^*(t))$. 于是在(1.18)式中令 $n\to\infty$, 得

$$\frac{d}{dt}[\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n(t)]=\boldsymbol{f}(t,\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_{n-1}(t)),$$

或即

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*(t)}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^*(t)). \tag{1.19}$$

上式表明 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 是方程组(1.9)的解.

(iv) 最后证明解的唯一性. 设另有一向量函数 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 也满足初值问题(1.6′),即

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{\boldsymbol{x}}(t)}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t)), & |t-t_0|\leqslant h,\\ \tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)=\boldsymbol{x}_0.\end{cases} \tag{1.20}$$

将(1.20)与(1.19)相减, 得

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{x}^*(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}(t)]=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^*(t))-\boldsymbol{f}(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t)).$$

将上式两边从 t_0 到 t 积分,并设 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+h$,得

$$\boldsymbol{x}^*(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\int_{t_0}^t[\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^*(t))-\boldsymbol{f}(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t))]dt,$$

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{x}^*(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}(t)||&\leqslant\int_{t_0}^t||\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^*(t))-\boldsymbol{f}(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t))||dt\leqslant\\&\leqslant K\int_{t_0}^t||\boldsymbol{x}^*(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}(t)||dt.\end{aligned} \tag{1.21}$$

记 $u(t)=\int_{t_0}^t||\boldsymbol{x}^*(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}(t)||dt$,知 $u(t)\geqslant0$. (1.21)式即可写成

$$u'(t)-Ku(t)\leqslant0.$$

上式两边同乘以 $e^{-K(t-t_0)}$，得

$$[u(t)e^{-K(t-t_0)}]'\leqslant 0.$$

从 t_0到 t 积分得

$$u(t)e^{-K(t-t_0)}\leqslant 0.$$

即有 $$u(t)\leqslant 0,$$

因此 $$u(t)\equiv 0.$$

即得 $$\boldsymbol{x}^*(t)\equiv\tilde{\boldsymbol{x}}(t).$$

对于 $t\in[t_0-h,t_0]$，同样可证 $\boldsymbol{x}^*(t)\equiv\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$.

由(1.19)式，我们还看到，在存在唯一性定理的条件下，初值问题(1.6′)在区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 上的唯一解，在该区间上具有连续的导数.

§3 可积组合

一般说来，象用初等积分法解微分方程那样，用初等积分的方法来求微分方程组(1.2)的解是困难的. 这是因为，在(1.2)的第 i 个方程中，除了含有 x_i，$\frac{dx_i}{dt}$和 t 以外，一般，还出现其它的 x_j $(j\neq i)$，而这些 x_j 与 t 或 x_j 与 x_i 之间存在着何种关系是未知的. 但对于某些特殊类型的方程组，我们能够将方程组中的一部分或所有的方程进行重新组合，然后引进新的未知函数，使得到一个只含一个自变量的一阶微分方程，并且可以用初等积分法求解. 这种方程叫做**可积组合**. 利用一个可积组合，可使原方程组所含的未知函数的个数减少一个. 沿用这种方法可求得原方程组的解. 下面举例来说明.

例 1 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=2(x_1^2+x_2^2)t,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=4x_1x_2t.\end{cases}\tag{1.22}$$